UDK 528.41:528.14
Pregledni rad

DILEME U VEZI SA IZRAVNAVANJEM I OCENOM TAČNOSTI SLOBODNIH GEODETSKIH MREŽA

Jovan STEVANOVIĆ — Beograd*

1. UVOD SA OSVRTOM NA DISKUSIJU O OVOM PROBLEMU

U zadnje vreme se u našim geodetskim časopisima dosta razvila diskusija o mogućnosti ocene tačnosti koordinata odnosno kota slobodnih geodetskih mreža i smislu dobivene tačnosti. Povod za diskusiju ipak može se reći da je bio rad [1] u kome je, za određene uslove, matematički korektno data jedna mogućnost izravnavanja koordinata trigonometrijske mreže. Osnovne postavke u radu [1], što je za orijentaciju diskusije koja je kasnije usledila bilo najvažnije, jesu:

— postupak se odnosi na slobodnu trigonometrijsku mrežu,
— sve tačke u mreži se tretiraju kao nepoznate, svaka dobija popravke koordinata nakon izravnavanja i za svaku se dobivaju srednje greške koordinata i
— trag korelacione matrice koordinata je minimalan.

Rad [2] je prilično verna reprodukcija rada [1], preko koga je naša geodetska javnost mogla na našem jeziku da se upozna sa idejama rada [1]. U radovima [3] i [4] je, pored šireg pristupa mogućnostima izravnavanja bez merenih koordinata i sa merenim koordinatama, skrenuta pažnja na neke osobenosti inverzne matrice normalnih jednačina, sa ukazivanjem na to kada je inverzna matrica ujedno i pokazatelj tačnosti koordinata a kada to nije, da bi se na kraju izrazila rezerva prema nekim zaključcima rada [1] i neslaganje sa stavom da se postupkom [1] dobija objektivnija tačnost koordinata slobodne mreže. U radu [5] je izraženo neslaganje sa gledištima o smislu inverzne matrice koja su izneta u [3], a zatim se radovima [6], [7], [8] i [9] razvila diskusija, koja, u slučaju da je korektno vođena, verovatno bi neke stvari postavila na pravo mesto. Ali, što se diskusija više odvijala, postajala je sve manje principijelna pa je prekinuta. Međutim, dileme su ostale a postale su povod za nove diskusije.

---

* Adresa autora: Prof. dr Jovan Stevanović, dipl. geod. inž., Rudarsko-geološki fakultet, Beograd, Djušina 7.

U seriji radova navedenih od [10] do [15] oblikuje se poseban prilaz problemu da se za sve nepoznate koordinate obezbede srednje greške sa kojima se one određuju, preko fiktivnih jednačina popravaka,. U međuvremenu, u radu [16] je izložena mogućnost da se sve koordinate tretiraju kao nepoznate i da im se odrede popravke i srednje greške, ako se primarno formiranim kompletnim normalnim jednačinama koje su neinvertibilne, pridodaju još 4 uslovne jednačine preko kojih se omogućuje invertibilnost. Opšta karakteristika ovih kasnijih diskusija jeste: uvažavanje osnovnih postavaka rada [1], konstatacija da je praktična primena postupka datog u [1] tehnički otežana i traganje za načinima koji bi davali iste rezultate kao postupak u [1], ali, koji bi bili lakše izvodljivi. Međutim, u [17] se, pored sopstvenih sugestija kako se navedeni problem može tretirati (definisanjem koordinatnog sistema na osnovu tačaka van mreže), nalaze i razmišljanja o relativnosti ocene tačnosti koja se dobija preko navedenih postupaka, tj. unose se nove dileme u diskusiju. Bitna novina rada [17] jeste navod o razmišljanju da se, u interesu savremenosti geodetske tehnike, utvrdi obaveznost primene postupka navedenog u [1] ili sličnog, koji daje iste rezultate.

Povod za ovu intervenciju najviše jeste navod u [17] o tendencijama da se utvrdi obaveznost primene postupka u [1]. Pošto se shvatanja u [3] i [4] nisu slagala sa shvatanjima u [1], a kako diskusija nije pružila ubedljive razloge da su shvatanja u [3] i [4] neodrživa, i dalje sam mišljenja da u radu [1], kada je u pitanju slobodna mreža, nije postavljeno sve kako treba, što me obavezuje da ponovo iznesem svoja shvatanja, i da jednim fundamentalnijim prilazom ovoj problematici obražložim svoje mišljenje o tome.

2. POTREBA DEFINISANJA KOORDINATNOG SISTEMA

Pod slobodnom mrežom podrazumevaće se mreža u kojoj za nijednu tačku nisu poznate koordinate kada se radi o triangulaciji, odnosno za nijedan reper nije poznata nadmorska visina kada se radi o nivelmanu. Mogućnosti izravnavanja slobodnih mreža su opšte poznate. Uslovno izravnavanje ne iziskuje neki komentar. Posredno izravnavanje, u najkraćim crtama, kao što je poznato, bi bilo:

Jednačine popravka su:

$$V = AX + l \tag{1}$$

Ovde je: X — vektor nepoznatih popravaka

A — matrica koeficijenta jednačina popravaka

l — vektor slobodnih članova jednačina popravaka

V — vektor popravaka merenih veličina

Uobičajenim postupkom, ako je korelaciona matrica merenih veličina Q_l, preko uslova minimuma, dobiće se normalne jednačine:

$$A^*Q_l^{-1}AX + A^*Q_l^{-1}l = 0 \tag{2}$$

ili kratko:

$$BX + L = 0 \tag{3}$$

Najčešće praktikovan način — da se proglase 2 tačke da imaju poznate koordinate — prouzrokovao je nedoumicu zbog činjenice da su za te 2 tačke popravke i srednje greške koordinata jednake nuli. Mreža je slobodna, u procesu merenja sve tačke su imale isti tretman, a nakon izravnavanja 2 tačke imaju specifičan status — bezpogrešne su. Jezikom matematike rečeno, kompletna matrica normalnih jednačina B je neinvertibilna, tj. neregularna sa defektom 4, odnosno 3 ako je merena i u izravnavanje uključena bar jedna strana. Zbog ovoga rešenje kompletnog sistema normalnih jednačina je neodređeno. Eliminisanjem 4 odnosno 3 odabranih vrsta i kolona u matrici normalnih jednačina, ona postaje regularna i invertibilna, ali su priraštaji određeni izravnavanjem i srednje greške za koordinate tačaka koje odgovaraju eliminisanim vrstama i kolonama jednaki nuli, što je u diskusijama ocenjeno kao neprihvatljivo. Matematičkom operacijom, preko dvostrukog uslova minimuma, kako je dato u [1] i [2], eliminiše se ova neprihvatljivost. Malo drugojačijim matematičkim operacijama, preko dodatnih uslovnih jednačina [16] ili fiktivnim jednačinama popravaka [10] takođe se nadoknađuje naveden nedostatak uobičajenog postupka posrednog izravnavanja i obezbeđuju srednje greške za sve koordinate. Ali, sve su to traganja za matematičkim rešenjima, pri čemu je zaboravljena realna geodetska strana problema. Ovako jednostran prilaz u traženju rešenja samo preko matematičkih operacija otežava odgovor na pitanja: Šta takvo izravnavanje znači?. Kakav je smisao takve ocene tačnosti?.

Da bi se omogućio dublji prilaz problemu, a kasnija izlaganja bila shvatljivija, poći ćemo od izvesnog proširenja pojma slobodne mreže: Ni jedna tačka u mreži nije poznata u smislu kao data tačka, ali, za određivanje međusobnog odnosa tačaka mreže mogu biti merene:

— apsolutne veličine — koordinate i azimuti odnosno direkcioni uglovi u triangulaciji kao i nadmorske visine u nivelmanu,

— relativne veličine — uglovi, pravci i dužine u triangulaciji, odnosno visinske razlike u nivelmanu.

Merenje apsolutnih veličina je komplikovanije od merenja relativnih veličina, manje je tačno i u glavnom se ne praktikuje ali nije nemoguće. Izuzetak je mreža prvog reda u kojoj se određuju apsolutne veličine na pr. u triangulaciji astronomskim putem. Dalja analiza će u glavnom da se bazira na merenju relativnih veličina, ali, da bi se što više doprinelo raščišćavanju navedene problematike, biće korišćena navedena mogućnost merenja apsolutnih veličina.

Rezultati posrednog izravnavanja jesu izravnate vrednosti apsolutnih i relativnih veličina. Da bi bilo moguće dobiti izravnate vrednosti apsolutnih veličina, neophodno je definisati koordinatni sistem u kome se računaju koordinate odnosno nadmorske visine. Za slobodnu mrežu u smislu kako je napred navedeno, logično rešenje problema posrednim izravnavanjem nije moguće bez merenja neophodnog broja apsolutnih veličina. Neophodan broj je onaj broj i priroda apsolutnih veličina koji omogućuje definisanje koordinatnog sistema. Ako se traži rešenje bez merenih apsolutnih veličina, tada mora da se pođe od pretpostavaka o apsolutnim veličinama koje nisu realne, strogo uzevši pitanje je da li su logične, pa za posledicu obavezno imaju neku defektnost. Kakva je ta defektnost zavisi od učinjenih pretpostavaka, ali, u principu može da se razvija diskusija o prihvatljivim, manje prihvatljivim i neprihvatljivim defektnostima.

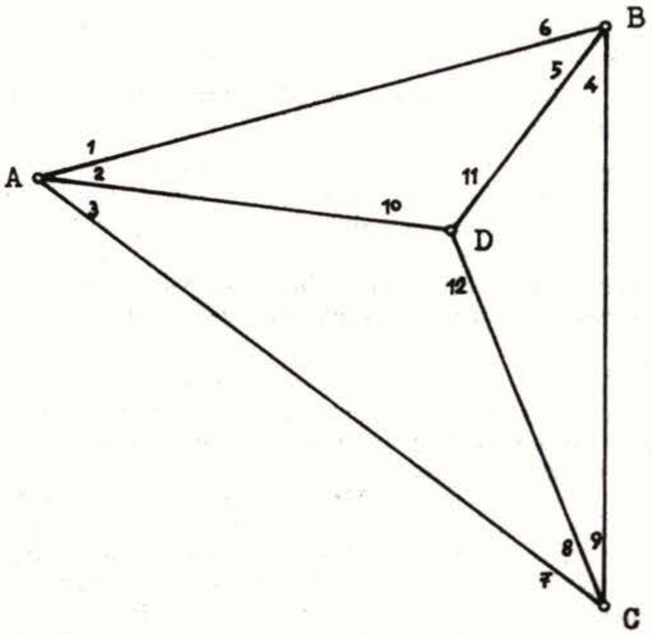
U svakom slučaju, posredno izravnavanje nije moguće bez definisanja koordinatnog sistema, a ako su merene samo relativne veličine mora se ići na pretpostavke, pri čemu je broj mogućih pretpostavaka, preko kojih se definiše koordinatni ssitem, neograničen. U vezi sa ovim, drugojačije rečeno, normalne jednačine nisu neinvertibilne zato što nije moguće rešenje, već zato što postoje beskonačno mnoga rešenja. Svako takvo kompletno rešenje jeste uslovljeno naknadnim podacima, koji moraju biti dati u pogodnoj matematičkoj formi koja će da omogući rešenje.

Primeri

U sledećem će biti razmatrano niz mogućnosti preko kojih se može sagledati razmatrana problematika, a radi ilustracije tih mogućnosti obrađeni su odgovarajući primeri kako iz triangulacije tako i iz nivelmana. Ovde u uvodnom delu biće dati osnovni podaci o tim primerima, jednačine popravaka i normalne jednačine.

Primer iz trangulacije

Obrađen je centralni sistem sa 3 trougla, u kome su opažani pravci. Primer je preuzet iz [20], str. 218, gde je obavljeno uslovno izravnavanje ovog centralnog sistema datog na sl. 1.



Sl. 1

Na tačkama A, B, C i D opažani su pravci:

		°	'	''			°	'	''
	1.	0	00	00,00		7.	0	00	00,00
A:	2.	17	43	57,19	C:	8.	18	31	23,33
	3.	49	11	38,13		9.	61	23	42,55
	4.	0	00	00,00		10.	0	00	00,00
B:	5.	56	18	29,42	D:	11.	149	09	47,99
	6.	69	24	39,28		12.	229	58	57,44

Matrica jednačina popravaka A_t i vektor slobodnih članova l su:

$$A_t = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} \multicolumn{2}{c}{A} & \multicolumn{2}{c}{B} & \multicolumn{2}{c}{C} & \multicolumn{2}{c}{D} \\ a & b & c & d & e & f & g & h \end{array} \\ \left|\begin{array}{cccccccc} -6,82 & -3,37 & -7,82 & +5,48 & +4,34 & +1,10 & +10,30 & -3,20 \\ +12,36 & -4,76 & +3,91 & -2,74 & +4,34 & +1,10 & -20,61 & +6,41 \\ -5,53 & +8,14 & +3,91 & -2,74 & -8,68 & -2,19 & +10,30 & -3,20 \\ -3,91 & +2,74 & +12,03 & +2,01 & -2,75 & -10,73 & -5,36 & +5,98 \\ -3,91 & +2,74 & -8,19 & +3,86 & +1,37 & +5,36 & +10,73 & -11,96 \\ +7,82 & -5,48 & -3,83 & -5,86 & +1,37 & +5,36 & -5,36 & +5,98 \\ +8,73 & +2,19 & -1,38 & -5,36 & -1,77 & +6,72 & -5,53 & -3,55 \\ -4,36 & -1,10 & -1,38 & -5,36 & -5,34 & -0,64 & +11,06 & +7,10 \\ -4,36 & -1,10 & +2,75 & +10,73 & +7,12 & -6,08 & -5,53 & -3,55 \\ +20,61 & -6,40 & +5,36 & -5,98 & +5,53 & +3,55 & -31,50 & +8,84 \\ -10,30 & +3,20 & -10,73 & +11,96 & +5,53 & +3,55 & +15,50 & -18,71 \\ -10,30 & +3,20 & +5,36 & -5,98 & -11,06 & -7,10 & +16,00 & +9,88 \end{array}\right| \end{array}$$

$$l = \left|\begin{array}{c} -1,11 \\ -1,32 \\ +2,44 \\ -3,20 \\ +0,57 \\ +2,64 \\ +4,40 \\ +0,56 \\ -4,95 \\ -3,29 \\ -0,17 \\ +3,46 \end{array}\right|$$

Približne koordinate koje su korišćene za sastavljanje jednačina popravaka su:

	y_0	x_0
A	7.560,00	10.134,00
B	19.360,00	18.396,00
C	22.451,00	6.367,00
D	13.644,00	12.025,00

Matrica normalnih jednačina (štampan je samo deo iznad glavne dijagonale) i vektor slobodnih članova normalnih jednačina su:

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc}
\multicolumn{2}{c}{A} & \multicolumn{2}{c}{B} & \multicolumn{2}{c}{C} & \multicolumn{2}{c}{D}
\end{array} \\
B_t = \left|\begin{array}{rrrrrrrr}
+1073 & -314 & +183 & -380 & +236 & +279 & -1491 & +416 \\
 & +214 & +15 & +60 & -176 & -83 & +476 & -191 \\
 & & +502 & -197 & -160 & -289 & -525 & +471 \\
 & & & +485 & +241 & -57 & +336 & -488 \\
 & & & & +390 & +139 & -466 & -204 \\
 & & & & & +338 & -129 & -198 \\
 & & & & & & +2482 & -683 \\
 & & & & & & & +878
\end{array}\right|
\end{array}
\qquad
L = \left|\begin{array}{r}
-35{,}45 \\ +54{,}26 \\ -57{,}94 \\ -111{,}60 \\ -121{,}95 \\ +65{,}98 \\ +215{,}62 \\ -8{,}67
\end{array}\right|
$$

U okviru početnih podataka biće naveden i vektor popravaka pravaca nakon uslovnog izravnavanja, koji je preuzet iz [20]:

$$
v = \left|\begin{array}{r}
-0{,}072 \\ +0{,}634 \\ -0{,}568 \\ -0{,}138 \\ -1{,}169 \\ +1{,}307 \\ +1{,}337 \\ -1{,}765 \\ +0{,}428 \\ -1{,}431 \\ +0{,}342 \\ +1{,}089
\end{array}\right|
$$

Primer iz nivelmana

Obrađena je slobodna nivelmanska mreža sa 4 repera, kako je dato na sl. 2, u kojoj je iznivelano ukupno 6 visinskih razlika:

visinske razlike:	1	5,000	dužina vlaka:	1,0 km.
	2	10,015		3,0
	3	15,030		3,0
	4	5,008		3,0
	5	10,010		2,0
	6	5,004		2,0

Približne nadmorske visine su:

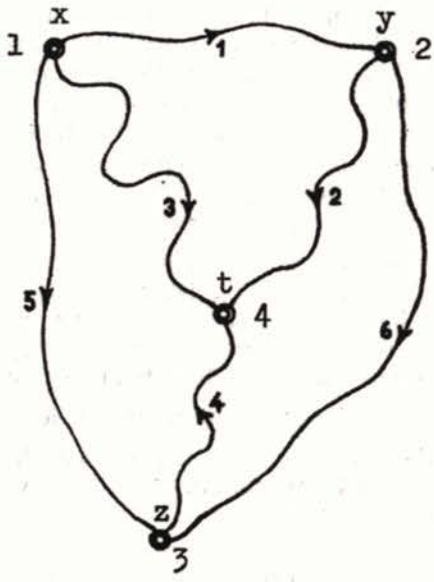
$$
\begin{aligned}
H_1 &= x_0 = 10{,}000 \\
H_2 &= y_0 = 15{,}000 \\
H_3 &= z_0 = 20{,}000 \\
H_4 &= t_0 = 25{,}000
\end{aligned}
$$

Matrica jednačina popravaka A, vektor slobodnih članova l i težine su:

$$A_n = \begin{vmatrix} -1 & +1 & & \\ & -1 & & +1 \\ -1 & & & +1 \\ & & -1 & +1 \\ -1 & & +1 & \\ & -1 & +1 & \end{vmatrix} \qquad l = \begin{vmatrix} 0 \\ -15 \\ -30 \\ -8 \\ -10 \\ -4 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{c} \text{težine} \\ 1 \\ 0{,}33 \\ 0{,}33 \\ 0{,}33 \\ 0{,}50 \\ 0{,}50 \end{array}$$

Matrice normalnih jednačina i vektor slobodnih članova su:

$$B_n = \begin{vmatrix} +1{,}833 & -1{,}000 & -0{,}500 & -0{,}333 \\ & +1{,}833 & -0{,}500 & -0{,}333 \\ & & +1{,}333 & -0{,}333 \\ & & & +0{,}999 \end{vmatrix} \qquad L = \begin{vmatrix} +15{,}000 \\ +6{,}995 \\ -4{,}336 \\ -17{,}649 \end{vmatrix}$$



Sl. 2

3. MOGUĆNOSTI DEFINISANJA KOORDINATNOG SISTEMA

Ako za slobodnu mrežu, pri posrednom izravnanvanju, mora da se pođe od neke pretpostavke o apsolutnim veličinama koje će da definišu koordinatni sistem, tada za to postoje, kako je navedeno, veliki broj mogućnosti.

Svaku od ovih mogućnosti prate neke specifičnosti, kako sa gledišta tehničkog postupka tako i sa gledišta ocene tačnosti i smisla ocene tačnosti. U sledećem će biti navedene i do izvesne mere klasificirane neke od mogućnosti. Ujedno će biti data u najsažetijem obliku i matematička podloga, koja bi trebalo da omogući lakše shvatanje tih mogućnosti.

3.1. *Definisanje koordinatnog sistema pretpostavkom da je neophodan broj koordinata poznat i konstantan.*

Očigledno, ova pretpostavka je u stvari dobro poznat postupak koji se najčešće praktikuje. Pretpostavljajući da su poznate i konstante 4 odnosno 3 koordinate, biće priraštaji tih koordinata jednaki nuli, pa se broj nepoznatih i broj jednačina smanjuje za 4 odnosno 3. Neka je matrica ovako smanjenog broja normalnih jednačina, za jednu kombinaciju isključivanja nepoznatih, B_1, za drugu kombinaciju — B_2, itd. Neka su i slobodni članovi L_1 odnosno L_2 itd. Ovakvi sistemi su invertibilni. Rešavanjem, dobiće se vektor X_1 odnosno X_2, a preko jednačina 1, dobiće se popravke v jednake za svaku kombinaciju isključivanja. Inverzna matrica direktno omogućuje računanje srednjih grešaka koordinata za tačke koje se tretiraju kao nepoznate. Osobenosti ovog postupka, koje su važne i koje treba istaknuti, su:

— Izravnate vrednosti apsolutnih veličina i srednje greške apsolutnih veličina zavise od izbora koordinatnog sistema, tj. od toga za koje dve tačke su usvojene konstantne koordinate. Proizvoljno je koje će dve tačke biti proglašene da imaju konstantne koordinate. Proizvoljne su do izvesne mere i izravnate vrednosti koordinata. Međutim, ako su dve tačke proizvoljno izabrane, srednje greške koordinata izražavaju tačnost ostalih koordinata u odnosu na ove dve tačke. Na prvi pogled, proizvoljna je i dobivena tačnost koordinata, ali ona je ipak uslovljena konfiguracijom mreže.

— Popravke izravnavanja v i izravnate vrednosti relativnih veličina (uglova, pravaca, dužina) ne zavise od izbora koordinatnog sistema. Ne zavisi od koordinatnog sistema ni tačnost izravnatih relativnih veličina, bez obzira što se srednje greške relativnih veličina računaju preko srednjih grešaka koordinata koje zavise od izbora koordinatnog sistema.

— Sa praktične tačke gledišta ovaj postupak je najjednostavniji.

Primer iz triangulacije: Ako se u napred navednoj matrici normalnih jednačina B_t isključe koordinate tačaka A i B, invertovanjem dobiće se matrica, koja je obeležena sa Q_{1t}:

$$Q_{1t} = 10^{-5}\begin{vmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&+705&-7&+222&+335\\ 0&0&0&0&-7&+395&+55&+131\\ 0&0&0&0&+221&+55&+129&+166\\ 0&0&0&0&+334&+131&+166&+351 \end{vmatrix}$$

trag = 0,01580

Ako se isključe koordinate tačaka C i D, dobiće se matrica Q_{2t}:

$$Q_{2t} = 10^{-5} \begin{vmatrix} +241 & +320 & -47 & +130 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ +320 & +920 & -108 & +93 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -47 & -108 & +250 & +79 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ +130 & +93 & +79 & +328 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{trag} = 0{,}01739$$

Vektori X_1 i X_2, dobiveni na osnovu ovih matrica, zamenjeni u jednačine (1), daju popravke pravaca jednake popravkama koje su navedene na početku. Zbog kasnijih potreba ,gornje matrice su date u dve alternative.

Primer iz nivelmana: Na sličan način, polazeći od navedenih normalnih jednačina za nivelman, isključujući prvo nepoznatu x a zatim nepoznatu t, dobiće se korelacione matrice Q_{1n} i Q_{2n}:

$$Q_{1n} = 10^{-4} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +7061 & +3533 & +3536 \\ 0 & +3527 & +9943 & +4487 \\ 0 & +3526 & +4489 & +12674 \end{vmatrix}$$

$$\text{trag} = 2{,}9678$$

$$Q_{2n} = 10^{-4} \begin{vmatrix} +12692 & +9166 & +8199 & 0 \\ +9161 & +12694 & +8199 & 0 \\ +8191 & +8194 & +13643 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{trag} = 3{,}9029$$

Nepoznate dobivene preko jedne ili druge korelacione matrice se razlikuju međusobno, a popravke v se ne razlikuju i iznose:

$$v^* = | +2{,}82 \quad +4{,}03 \quad -8{,}15 \quad +4{,}08 \quad -0{,}23 \quad +2{,}95 |$$

3.2. *Indirektno definisanje koordinatnog sistema preko dodatnih uslova, tretirajući sve koordinate kao nepoznate.*

U situaciji kada apsolutne veličine nisu merene, a kada zbog potreba izravnavanja moramo ići na odgovarajuće pretpostavke o apsolutnim veličinama, pri čemu ne postoji jednoznačna logika preko kojih pretpostavaka ići, jedna mogućnost u velikom broju varijanti može biti pretpostavka da su apsolutne veličine promenljive, a da se koordinatni sistem definiše dodatnim uslovima u vidu uslovnih jednačina koje treba da odrede koordnatni sistem. U opštem obliku, neka su, pored navedenih jednačina popravaka, date i 4 (odnosno 3) uslovne jednačine, koliko je dovoljno za određivanje koordinatnog sistema:

$$DX = 0 \tag{4}$$

Ovde bi D bila matrica koeficijenata uslovnih jednačina. Uslov minimuma za ovako kombinovano posredno-uslovno izravnavanje bi bio:

$$vQ_l^{-1}v^* + 2KDX = \min. \tag{5}$$

Normalne jednačine bi imale oblik:

$$\begin{aligned} BX + D^*K + A^*Q_l^{-1}l &= 0 \\ DX &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

Ovaj sistem je invertibilan. Rešavanjem ovih normalnih jednačina dobiće se sve nepoznate X i korelate K, a zamenom X u (1) dobiće se popravke v. Inverzna matrica omogućuje računanje srednjih grešaka za sve nepoznate apsolutne veličine X. Nepoznate X i njihove srednje greške zavise od prirode uslovnih jednačina. Izravnate vrednosti relativnih veličina i njihove srednje greške ne zavise od uslovnih jednačina i iste su kao kod 3.1.

Postoje razne mogućnosti definisanja koordinatnog sistema uslovnim jednačinama, a ovde će biti navedene samo neke za koje rezultati izravnavanja relativnih veličina ne zavise od učinjenih pretpostavaka:

a) Definisanje koordinatnog sistema uslovima da su priraštaji za 4 (odnosno 3) koordinate jednaki nuli. Proizvoljno je koje su to koordinate, a ako se odnose na tačke 1 i 2, uslovne jednačine bi bile:

$$\begin{aligned} dx_1 &= 0 \\ dy_1 &= 0 \\ dx_2 &= 0 \\ dy_2 &= 0 \end{aligned} \tag{7}$$

Ova mogućnost daje potpuno iste rezultate i za apsolutne i za relativne veličine kao 3.1. Komplikovanija je za 4 normalne jednačine. Pominje se samo da bi se kompletirao spisak mogućnosti. (U principu, priraštaji ne moraju biti jednaki nuli. Mogu biti jednaki nekoj konstanti ili konstantama što ima odgovarajuće posledice, ali ovde tome neće biti posvećena pažnja.)

b) Definisanje koordinatnog sistema uslovima da su priraštaji koordinata jedne tačke, priraštaj direkcionog ugla između dve tačke i priraštaj strane između dve iste ili druge dve tačke jednaki nuli. Na primer, preko tačke 1 za priraštaje koordinata i tačaka 3 i 4 za priraštaje za direkcioni ugao i dužinu, uslovne jednačine bi nakon odgovarajuće transformacije i skraćivanja sa dužinom, bile:

$$\begin{aligned} dx_1 &= 0 \\ dy_1 &= 0 \\ (y_4 - y_3)\,dx_3 - (x_4 - x_3)\,dy_3 + (y_4 - y_3)\,dx_4 + (x_4 - x_3)\,dy_4 &= 0 \\ (x_4 - x_3)\,dx_3 - (y_4 - y_3)\,dy_3 + (x_4 - x_3)\,dx_4 + (y_4 - y_3)\,dy_4 &= 0 \end{aligned} \tag{8}$$

Ako je merena bar jedna strana i uključena svojom jednačinom popravke u izravnavanje, suvišna je zadnja jednačina. Ako je na primer posredstvom žiroteodolita određen bar jedan direkcioni ugao koji je svojom jednačinom popravke uključen u izravnavanje, suvišna je treća uslovna jednačina. Ovim postupkom dobiće se da su priraštaji i srednje greške koordinata samo za tačku 1 jednaki nuli. Za ostale tačke dobiće se srednje greške koje će da izražavaju pogrešnost koordinata u odnosu na tačku 1 i pravac 3—4. Izravnate vrednosti i srednje greške relativnih veličina ostaće iste kao kod slučaja 3.1.

c) Definisanje koordinatnog sistema uslovima da su koordinate težišta dveju tačaka konstantne, kao i da su priraštaji jednog direkcionog ugla i jedne strane jednaki nuli. Uslovne jednačine, npr. preko tačaka 1 i 2, bi bile:

$$\begin{aligned} dx_1 + dx_2 &= 0 \\ dy_1 + dy_2 &= 0 \\ d\nu_1^2 &= 0 \\ dS_1^2 &= 0 \end{aligned} \tag{9}$$

Za ovaj slučaj priraštaji i srednje greške koordinata svih tačaka bi bili različiti od nule. Srednje greške koordinata bi zavisile od toga koje koordinate bi bile zastupljene u navedenim uslovnim jednačinama. Izravnate vrednosti i srednje greške relativnih veličina bi bile iste kao kod slučaja 3.1.

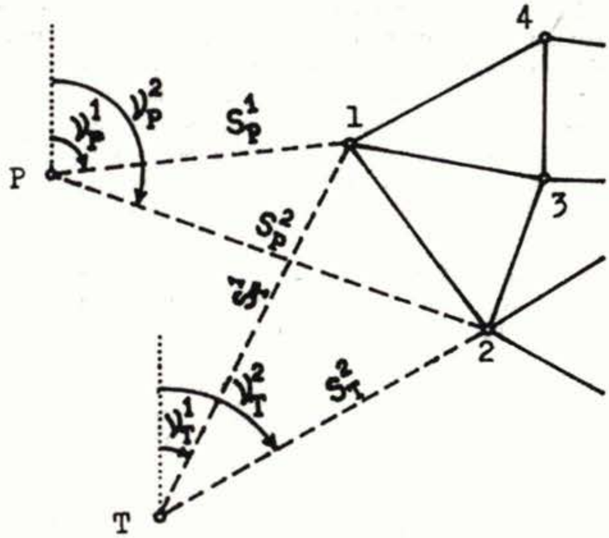
Primer iz nivelmana. Za nivelmansku mrežu dovoljna je samo jednačina za nepromenljivost težišta dveju nadmorskih visina. Neka je za naveden primer jednačina: $dx + dt = 0$. Kada se sa ovom uslovnom jednačinom i navedenim jednačinama popravaka za nivelman formiraju i reše 5 normalnih jednačina za 5 nepoznatih od kojih je jedna korelata K, i ako se na osnovu nepoznatih sračunaju popravke, može se konstatovati da se one slažu sa popravkama visinskih razlika navedenih u okviru 3.1. Inverzna odnosno korelaciona matrica je:

$$Q_{3n} = 10^{-4} \begin{array}{|rrrr|} x & y & z & t \\ +3171 & +1403 & +922 & -3171 \\ +1403 & +6699 & +2689 & -1404 \\ +923 & +2689 & +8627 & -922 \\ +3171 & -1404 & -922 & +3178 \end{array}$$

trag = 2,1675

d) Definisanje koordinatnog sistema preko nepromenljivosti odnosa između tačaka van mreže čije su koordinate poznate i tačaka u mreži. Ovaj slučaj se svodi na uslove koji indirektno obezbeđuju da su priraštaji koordinata odgovarajućih tačaka jednaki nuli. I za ovu mogućnost postoje više varijanti. Ako su tačke van mreže obeležene sa P i T, uslovne jednačine, ako se ide npr. prkeo tačaka 1 i 2 u mreži bi bile:

$$\begin{aligned} d\nu_P^1 &= 0 \\ dS_P^1 &= 0 \\ \\ d\nu_T^2 &= 0 \\ dS_T^2 &= 0 \end{aligned} \tag{10}$$



Sl. 3

Na sl. 3 je dat šematski razmeštaj tačaka.

Ako je za ove potrebe raspored tačaka P, T, 1 i 2 povoljan, tj. ako je presek pravaca od tačaka P i T do tačke 1 povoljan a isto tako i presek pravaca od P i T do tačke 2, uslovne jednačine mogu biti:

$$d\nu_P^1 = 0 \quad d\nu_T^1 = 0 \quad d\nu_P^2 = 0 \quad d\nu_T^2 = 0 \qquad (11)$$

Ako su lučni preseci povoljni mogu se postaviti uslovne jednačine u vidu:

$$dS_P^1 = 0 \quad dS_T^1 = 0 \quad dS_P^2 = 0 \quad dS_T^2 = 0 \qquad (12)$$

Možda nije nužno naglasiti da je postupak za formiranje uslovnih jednačina sličan kao kod 3.2/b, samo bi priraštaji koordinata tačaka P i T bili jednaki nuli.

Jedna varijanta ovog slučaja bi mogla biti da se određuje konstantnim direkcionim uglovima i dužinama odnos između jedne tačke van mreže i dveju tačaka u mreži.

Tačka van mreže može biti i koordinatni početak. U tom slučaju bi uslovne jednačine izražavale da su priraštaji polarnih koordinata za 2 tačke jednaki nuli.

Pored uočljivih specifičnosti, zajednička karakteristika svih navedenih mogućnosti jeste da se za definisanje koordinatnog sistema koristi neophodan broj podataka koji se odnose na apsolutne veličine. Zbog ovoga bi nivo srednjih grešaka koordinata bio ujednačen. Veličine srednjih grešaka koordinata u glavnom zavise od tačnosti merenja relativnih veličina, geometrijskog sklopa mreže i funkcionalne veze tačaka mreže sa tačkama koje definišu koordinatni sistem.

e) Definisanje koordinatnog sistema na osnovu pretpostavke da je poznat veći broj apsolutnih veličina nego što je potrebno za definiciju koordinatnog sistema. I za ovu mogućnost postoje različite varijante a biće obrađene samo dve, kojima se u uslovnim jednačinama za definisanje koordinatnog sistema koriste sve tačke u mreži. Koordinatni sistem se definiše poziciono jednom tačkom — težištem svih približnih koordinata. Da bi težište bilo određeno mora se pretpostaviti da su poznate koordinate svih tačaka. Uslovne jednačina nepromenljivosti težišta su:

$$\begin{aligned} \Sigma dx &= 0 \\ \Sigma dy &= 0 \end{aligned} \qquad (13)$$

Uslovne jednačine kojima se određuje orijentacija i razmera mreže dobivaju se ako se pretpostavi da su polarne koordinate za tačku i konstante. Pošto je:

$$\operatorname{tg} \nu_0^i = \frac{y_i}{x_i} \qquad (14)$$

$$S_{0i}^2 = x^2 + y^2 \qquad (15)$$

nakon diferenciranja, izjednačavanja priraštaja sa nulom i skraćivanja sa S, dobiće se jednačine koje izražavaju nepromenljivost polarnih koordinata za tačku i:

$$-y_i dx_i + x_i dy_i = 0 \qquad (16)$$

$$x_i dx_i + y_i dy_i = 0 \qquad (17)$$

Po jednoj varijanti problem je rešiv i sa navedene 4 uslovne jednačine (jedn. 13, 16 i 17), što bi spadalo u neku srednju mogućnost pri kojoj se za definisanje koordinatnog sistema koristi veći broj podataka no što je neophodno, ali, i pored pretpostavke da su poznate sve koordinate, one se ne koriste u potpunosti.

Ali, ako se postave za svaku tačku po dve jednačine kao što su jednačine (16) i (17) i naprave odgovarajući zbirovi ovih jednačina, dobiće se jednačine:

$$-\Sigma y_i dx_i + \Sigma x_i dy_i = 0 \qquad (18)$$

$$\Sigma x_i dx_i + \Sigma y_i dy_i = 0 \qquad (19)$$

koje sa jednačinama (13) čine komplet uslovnih jednačina, kojima se definiše koordinatni sistem pretpostavljajući da približne koordinate svih tačaka imaju status poznatih koordinata. Ovakav slučaj je izložen u pomenutom radu [16].

Ovde, kod prve varijante koriste se sve približne koordinate za definisanje koordinatnog sistema na način koji je manje celishodan od načina kod druge varijante gde se podaci, bez obzira što se samo pretpostavlja da postoje, koriste na najcelishodniji način. U svakom slučaju izravnate vrednosti i srednje greške relativnih veličina za obe varijante biće kao u 3.1.

Međutim, treba naglasiti da i prva a naročito druga varijanta baziraju na pretpostavci velikog broja poznatih podataka za određivanje koordinatnog sistema. Iz ovakve pretpostavke, koja očigledno jeste samo pretpostavka, dalji matematički postupak daje za drugu varijantu koordinatni sistem »čvršće određen« i »tačnije definisan« no po prvoj varijanti, a »znatno tačnije« no kod ostalih navedenih mogućnosti. Ovo će da se odrazi na srednje greške izravnatih koordinata koje će za drugu varijantu u celini da budu najmanje. Kada bi se za definisanje koordinatnog sistema koristio toliki broj stvarno poznatih koordinata, tada bi razlike u veličinskom redu tragova matrica odražavale realan odnos tačnosti pojedinih mogućnosti. Ali sa korišćenjem približnih koordinata, koje su samo po pretpostavci poznate, takve razlike u tačnosti su posledica matematičko-špekulativnog prilaza problemu i mora da se ocene kao nerealne.

Primer iz nivelmana. Ako se za navedenu nivelmansku mrežu iskoriste navedene jednačine popravaka sa uslovnom jednačinom da je:

$$dx + dy + dz + dt = 0$$

formiraju i invertuju normalne jednačine, dobiće se korelaciona matrica:

$$Q_{4n} = 10^{-1} \begin{vmatrix} +3301 & -228 & -1196 & -1877 \\ -230 & +3299 & -1196 & -1877 \\ -1193 & -1193 & +4262 & -1877 \\ -1877 & -1877 & -1871 & +5630 \end{vmatrix}$$

$$\text{trag} = 1{,}642$$

Očigledno, trag matrice, odnosno veličinski red srednjih grešaka nadmorskih visina, jeste kod ove matrice znatno manji no kod matrice Q_{3n} i matrica Q_{1n} i Q_{2n}.

3.3. *Definisanje koordinatnog sistema pretpostavkom da su neke koordinate merene*

Ako u slobodnoj mreži ne postoje tačke sa poznatim koordinatama preko kojih bi se definisao koord. sistem, i ako se, da bi se definisao koordinatni sistem mora ići na pretpostavke, tada nema jakih logičnih argumenata u prilog prednosti pretpostavke da su neke koordinate poznate i konstantne u odnosu na pretpostavku da su npr. iste koordinate merene i promenljive. U prilog prvog pretpostavci — slučaj 3.1. stoji samo činjenica da je preko nje problem lakše rešiv jer treba rešavati broj normalnih jednačina koji je za 4 odnosno 3 manji od broja koordinata. Kod pretpostavke merenih koordinata broj normalnih jednačina je jednak broju nepoznatih koordinata. Izravnate vrednosti i srednje greške koordinata za prvu i drugu pretpostavku će se međusobno razlikovati. Izravnate vrednosti i srednje greške relativnih veličina kod obe pretpostavke biće međusobno jednake ako se pretpostavlja da je izmeren samo neophodan broj koordinata za definisanje koordinatnog sistema.

Za prvu od navedenih pretpostavaka, tj. slučaj 3.1, biće srednje greške koordinata, koje su pretpostavljene kao poznate, jednake nuli, što sigurno nije logično. Za ovu pretpostavku merenih koordinata biće srednje greške koordinata, za tačke koje su po pretpostavci merene, onolike koliko se pretpostavi da jesu, što takođe nije logično, ali možda može biti logičnije nego da su one jednake nuli.

Matematički posmatrano, u odnosu na objašnjenje u 3.1., razlike su:

— Vektor popravaka merenih veličina bi bio:

$$V^* = |v_1 v_2 \ldots v_{x1} v_{y1} \ldots| \tag{20}$$

— Moraju biti usvojene i neke pretpostavke o korelacionoj matrici koordinata Q, za koju nema razloga da ne bude dijagonalna matrica.

— Jednačine popravaka za koordinate su oblika:

$$v_{xi} = X_i \tag{21}$$

— Jednačine popravaka za relativne veličine su isto kao kod 3.1. Uzimajući ovo u obzir normalne jednačine bi bile:

$$BX + Q_x^{-1}X + L = 0 \tag{22}$$

a) Pretpostavka da su izmerene koordinate za 2 tačke. Ako su npr to tačke 1 i 2, tada je specifičnost formiranja normalnih jednačina, u odnosu na objašnjenje dato na početku, sadržana samo u tome što se dijagonalnim članovima u matrici B, koji odgovaraju koordinatama x_1 i y_1, x_2 i y_2 dodaju pretpostavljene težine koordinata. Ovako modifikovana matrica normalnih jednačina postaje invertibilna. Međutim, treba naglasiti da je neophodno da pretpostavljene težine koordinata budu usklađene sa težinama merenih relativnih veličina. Ako su težine koordinata samo simbolične, invertibilnost će biti samo teoretska, a praktičan postupak jako otežan. Popravke koordinata koje su po pretpostavci merene biće jednake nuli. Za sve tačke u mreži srednje greške koordinata biće različite od nule. Izravnate vrednosti i srednje greške relativnih veličina biće iste kao kod 3.1.

Primer iz nivelmana. Za napred navedenu nivelmansku mrežu, polazeći od pretpostavke da je izmerena nadmorska visina t sa težinom 1, izravnavanje po objašnjenju datom u ovom poglavlju dalo je iste vrednosti za nepoznate kao u 3.1, Korelaciona matrica ima oblik:

$$Q_{5n} = \begin{vmatrix} +2{,}2677 & +1{,}9144 & +1{,}8185 & +1{,}0000 \\ +1{,}9148 & +2{,}2677 & +1{,}8185 & +1{,}0000 \\ +1{,}8188 & +1{,}8188 & +2{,}3643 & +1{,}0000 \\ +1{,}0000 & +1{,}0000 & +1{,}0000 & +1{,}0000 \end{vmatrix}$$

Ova matrica se razlikuje od matrice Q_{2n} u tome što su joj svi članovi veći za 1.

b) Pretpostavka da su izmerene sve koordinate u mreži. Matematičko objašnjenje navedeno u 3.3 za opšti slučaj, odnosilo bi se u potpunosti na ovu mogućnost. Za razliku od do sada analiziranih slučajeva, ovde pretpostavka da su izmerene sve koordinate jeste istovremeno i pretpostavka da postoji veći broj podataka o mreži koji se uvode u izravnavanje, što deformiše slobodnu mrežu. Zbog ovoga izravnate vrednosti relativnih veličina neće biti jednake kao kod slučaja 3.1., usled čega ova pretpostavka se samo pominje, ali joj neće biti posvećena pažnja.

3.4. *Izravnavanje preko dvostrukog uslova minimuma ako su izmerene sve koordinate*

Pošto se, kako je navedeno, apsolutne veličine određuju daleko teže i sa slabijom tačnošću od relativnih veličina, to sa realno merenim apsolutnim i relativnim veličinama, postupkom izravnavanja navedenom u 3.3 pod b), apsolutne veličine mogu, svojom slabijom tačnošću, da pokvare tačnost relativnih veličina i da se u celini dobije izravnata mreža male tačnosti. Slično se dešava i sa naknadno opažanim gradskim i rudničkim trigonometrijskim mrežama, u kojima se relativne veličine mere sa što je moguće većom tačnošću, a orijentacija i smeštaj mreže u državni koordinatni sistem obavljaju se na osnovu koordinata većeg broja, ranije u okviru državne mreže, određenih tačaka koje su ušle u sastav nove mreže. Ranije određene tačke su određene sa relativno slabijom tačnošću u odnosu na merenja u naknadnoj mreži, pa bi se zajedničkim izravnavanjem apsolutnih i relativnih veličina, preko jednostrukog uslova minimuma, uz tretiranje koordinata datih tačaka da su merene, dobila nezadovoljavajuća tačnost za naknadnu mrežu. Zbog ovoga se izravnavanje obavlja preko dvostrukog uslova minimuma. Prvo se izravnaju samo relativne veličine preko uslova minimuma za popravke relativnih veličina, u glavnom postupkom koji je ovde naveden pod 3.1. Posle ovoga se pristupa određivanju najverovatnijih vrednosti definitivnih koordinata, preko uslova minimuma samo za popravke koordinata, ali, uz uslov da se međusobni odnos tačaka utvrđen preko prvog uslova minimuma ne promeni. Za rešavanje ovog problema postoje više mogućnosti koje se razlikuju po formi ali daju iste rezultate. Te mogućnosti koje nalazimo u literaturi su:

1. Opšte poznata Helmertova transformacija,

2. Postupak izložen u [21] kod koga se uz drugi uslov minimuma koristi dovoljan broj uslovnih jednačina nepromenljivosti uglova i strana u mreži koji su utvrđeni nakon prvog uslova minimuma,

3. Mittermayerov postupak koji pored prvog uslova minimuma, uz drugi uslov minimuma, koristi dovoljan broj normalnih jednačina koje su posledica prvog uslova minimuma, preko kojih se zadržava nepromenljivost figure prvobitno izravnate mreže. Mittermayerov postupak, u sklopu ove problematike je korektan postupak, daje iste rezultate i u smislu rezultata izravnavanja i u smislu tačnosti sa Helmertovim postupkom, jedino što je Helertov postupak lakši za primenu.

4. Postupak objašnjen u [3] koji bazira na istim postavkama kao i postupak Mittermayera.

Postupci navedeni pod 1, 2 i 4, osnovnim idejama, genetski, vezani su za uklapanje naknadno opažanih mreža u državni sistem. Samo Mittermayerov postupak jeste genetski vezan za izravnavanje slobodne mreže, tj. približne koordinate se koriste kao date, a rezultat izravnavanja se identifikuje sa rezultatom koji bi se dobio sa merenim odnosno datim koordinatama.

U skladu sa dosadašnjim načinom objašnjavanja u vezi sa slobodnom mrežom i Mittermayerovim postupkom, može se reći da se i ovdje radi o potrebi definisanja koordinatnog sistema. Matrica B u 2. je neinvertibilna, jer nije definisan koordinatni sistem. Ako se pretpostavi da su sve približne koordinate dobivene merenjem, tada se sve one mogu iskoristiti za definisanje koordinatnog sistema preko dvostrukog uslova minimuma. Izravnate vrednosti i tačnost relativnih veličina su iste kao u 3.1., a ne zavise od približnih koordinata. Pošto se izravnavanje obavlja preko dvostrukog uslova minimuma, nisu potrebne nikakve pretpostavke o težinama približnih koordinata, odnosno, one su međusobno jednake. Što je u mreži veći broj tačaka, sa merenim koordinatama — realno, a sa približnim koordinatama — prividno, povećava se broj podataka za definisanje koordinatnog sistema, a samim tim se povećava i tačnost koordinata. Za jednu mrežu, pretpostavkom da su sve približne koordinate poznate, dobiće se »maksimalna« tačnost koordinata, odnosno, trag matrice biće minimalan.

3.4.1. *Ilustracija izravnavanja preko dvostrukog uslova minimuma*

a) Helmertov postupak. Ovaj postupak je dovoljno poznat u našoj literaturi, ali, radi jasnijeg definisanja načina dobijanja korelacione matrice definitivno izravnatih koordinata, biće potrebno da se u najkraćem objasni primenjen postupak.

Trigonometrijska mreža je ranije izravnata kao slobodna mreža, npr. postupkom u 3.1, i dobivene su, preko približnih koordinata, izravnate koordinate i korelaciona matrica Q_{1t} ili Q_{2t}. Ako se pođe od pretpostavaka:

— Sistem iz koga se vrši transformacija (koji odgovara državnom sistemu kod uobičajene primene Helmertovog postupka) je definisan približnim koordinatama. Približne koordinate dobivaju tretman merenih koordinata, koje treba ispraviti da bi se dobile definitivne koordinate. Vektor približnih koordinata neka je X_0.

— Sistem iz koga se vrši transformacija definisan je koordinatama koje su dobivene postupkom u 3.1. Figura, definisana izravnatim koordinatama u 3.1., transformacijom ne sme biti deformisana. Neka je vektor ovih koordinata obeležen sa X'.

— Elemente transformacije treba odrediti uz uslov da suma kvadrata popravaka približnih koordinata bude minimalna. Neka je vektor definitivnih koordinata obeležen sa X, a vektor popravaka približnih koordinata sa V_x.

Polazne jednačine koje se odnose na koordinate neke tačke su:

$$\begin{aligned} x_i &= x_{0i} + v_{xi} = x'_i + x'_i dq - y'_i d\Theta + b \\ y_i &= y_{0i} + v_{yi} = y'_i + y'_i dq + x'_i d\Theta + a \end{aligned} \tag{23}$$

ili u matričnom obliku:

$$X = X_0 + V_x = X' + CZ \tag{24}$$

Ovde je:

$$C = \begin{vmatrix} x'_1 & -y'_1 & 1 & 0 \\ y'_1 & x'_1 & 0 & 1 \\ \cdot & \cdot & & \\ x'_n & -y'_n & 1 & 0 \\ y'_n & x'_n & 0 & 1 \end{vmatrix} \tag{25}$$

$$Z^* = | d_{\urcorner} \quad d\Theta \quad b \quad a | \tag{26}$$

Na osnovu (24) dobija se:

$$V_x = CZ + X' - X_0 \tag{27}$$

Uz pretpostavku da je $Q_{x_0} = E$, nakon formiranja i rešavanja normalnih jednačina dobiće se:

$$Z = -(C^*C)^{-1} C^* (X' - X_0) \tag{28}$$

Zamenom ovog izraza u (27), a zatim u (24), dobiće se:

$$X = [E - C(C^*C)^{-1}C^*] X' - C(C^*C)^{-1}C^*X_0 \tag{29}$$

Izraz za korelacionu matricu definitivno izravnatih koordinata bi bio:

$$Q_{XH} = [E - C(C^*C)^{-1}C^*] Q_{X'} [E - C(C^*C)^{-1}C] +$$

$$+ C(C^*C)^{-1}C^*Q_{X0}\, C(C^*C)^{-1}C^* \tag{30}$$

Za navedeni primer iz trijangulacije je:

$$C = \begin{vmatrix} 10134 & -7560 & 0 & 1 \\ 7560 & 10134 & 1 & 0 \\ 118396 & -19360 & 0 & 1 \\ 19360 & 18396 & 1 & 0 \\ 6367 & -22451 & 0 & 1 \\ 22451 & 6367 & 1 & 0 \\ 12025 & -13644 & 0 & 1 \\ 13644 & 12025 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Sa ovom matricom, ako se u izrazu (30) smatra da je $Q_{X_0} = 0$, i ako se kao matrica Q_X, iskoristi matrica Q_{1t} navedena u poglavlju 3.1., dobiće se korelaciona matrica definitivno izravnatih koordinata:

$$Q_{XH} = 10^{-5} \begin{vmatrix} +38 & +37 & -1 & -36 & -31 & +37 & -6 & -37 \\ +35 & +144 & +81 & -27 & -86 & +12 & -34 & -125 \\ -2 & +87 & +77 & +7 & -44 & -31 & -34 & -56 \\ -37 & -30 & +7 & +64 & +54 & -42 & -19 & +6 \\ -31 & -86 & -42 & +49 & +73 & -20 & +2 & +54 \\ +37 & +11 & -32 & -40 & -19 & +52 & +14 & -22 \\ -6 & -33 & -33 & -18 & +2 & +13 & +38 & +37 \\ -37 & -128 & -56 & +5 & +57 & -24 & +39 & +143 \end{vmatrix}$$

trag = 0,00629

Ako se kao Q_X, iskoristi matrica Q_{2t} navedena u 3.1, dobiće se matrica koja je jednaka gornjoj matrici Q_{XH}.

b) Mittermayerov postupak. Kod ovog postupka, sa ustaljenim oznakama u literaturi, na osnovu matrice B navedene na početku u okviru poglavlja 2, dobiće se korelaciona matrica definitivno izravnatih koordinata ovim postupkom preko poznatog izraza:

$$Q_{XM} = B_1 (B_1^* B_1)^{-1} B_1^* (B_1^* B_1)^{-1} B_1^* \qquad (31)$$

U ovoj jednačini oznaka B_1 označava matricu B sa eliminisanim vrstama i kolonama po prvoj varijanti u poglavlju 3.1.

$$Q_{XM} = 10^{-5} \begin{vmatrix} +39 & +37 & 0 & -37 & -32 & +38 & -6 & -38 \\ +37 & +143 & +82 & -27 & -85 & +11 & -33 & -126 \\ 0 & +82 & +78 & +6 & -43 & -32 & -34 & -56 \\ -37 & -27 & +6 & +63 & +48 & -41 & -19 & +5 \\ -32 & -85 & -43 & +49 & +72 & -19 & +2 & +56 \\ +38 & +11 & -32 & -41 & -19 & +53 & +14 & -22 \\ -6 & -33 & -34 & -19 & +2 & +14 & +38 & +38 \\ -38 & -126 & -56 & +5 & +56 & -22 & +38 & +144 \end{vmatrix}$$

trag = 0,00630

Na osnovu matrica Q_{XH} i Q_{XM} ima osnova za shvatanje da se ove matrice razlikuju samo zbog broja korišćenih decimala pri računanju, odnosno da su one međusobno jednake. Polazeći od ovoga ima osnova i za proširenje ovog shvatanja tj. da se za bilo koju mrežu, korelacione matrice dobivene Helmertovim i Mittermayerovim postupkom međusobno ne razlikuju. Obzirom da Helmertov postupak može sa praktične strane da bude jednostavniji od Mittermayerovog, ako se baš hoće ovakva korelaciona matrica, tada je svakako za preporuku da se pri njenom računanju ide preko Helmertovog postupka.

Treba uočiti da je npr. za navedenu matricu Q_{1t} u 3.1, trag = 0,01580. Za Helmertov odnosno Mittermayerov postupak dobiveno je: trag = 0,00630. Odnos ovih tragova matrica koji iznosi 2,5, predstavlja imaginarno povećavanje tačnosti definitvnh koordinata zbog toga što se koordinatni sistem Mittermayerovim postupkom određuje na osnovu pretpostavke da su poznate koordinate svih tačaka u mreži.

Ako se pođe od matrice B_n navedene u okviru poglavlja 2, a koja se odnosi na nivelman, Mittermayerovim postupkom dobiće se korelaciona matrica:

$$Q_{nM} = \begin{vmatrix} +0,3299 & -0,0230 & -0,1191 & -0,1874 \\ -0,0230 & +0,3299 & -0,1192 & -0,1874 \\ -0,1192 & -0,1192 & +0,4260 & -0,1874 \\ -0,1874 & -0,1874 & -0,1874 & +0,5625 \end{vmatrix}$$

Može se uočiti da se ova matrica neznatno razlikuje od matrice Q_{4n} navedene u okviru poglavlja 3.2 pod e), što je u skladu sa shvatanjima u literaturi da ova dva postupka daju iste rezultate.

4. NEKI EFEKTI MODIFIKACIJE KORELACIONIH MATRICA

Tokom izlaganja bila je stalno prisutna konstatacija da su popravke i tačnost relativnih veličina za sve navedene mogućnosti iste kao kod mogućnosti 3.1. (Izuzetak je samo mogućnost 3.3 pod b/, kada se pretpostavlja da se sve koordinate merene i kao takve se uključuju u izravnavanje). Ovo je posledica činjenice da su sve te, kako god bile dobivene korelacione matrice koordinata međusobno ekvivalentne. Ako su ekvivalentne, one se mogu, pravilima koja se odnose na ovu problematiku, prevesti jedna na drugu. Pri ovome se matrica odgovarajućih dimenzija može svesti na sebi ekvivalentnu matricu manjih dimenzija. I obrnuto, matrica manjih dimenzija se može prevesti na sebi ekvivalentnu matricu većih dimenzija. Osim opštih pravila koja se odnose na operacije kojima se zadržava ekvivalentnost, potrebno je znati i odgovarajuće specifičnosti preko kojih se može postići odgovarajući cilj. Jedno od opštih pravila jeste da matrica zadržava ekvivalentnost ako se svim članovima jedne vrste ili kolone doda ili oduzme isti broj. Koristeći ovo pravilo, može se nepotpuna i necentrisana korelaciona matrica izravnatih koordinata, dobivena preko 3.1, prevesti na potpunu i centrisanu matricu. Članovi vrsta i kolona matrice dobivene preko 3.1, koji odgovaraju konstantnim koordinatama, jesu jednaki nuli, a zbir svih članova odgovarajuće vrste odnosno kolone nije jednak nuli. Ako se svaki od ovih zbirova podeli sa ukupnim brojem koordinata i količnik oduzme od svakog člana te vrste odnosno kolone, pa i od onih koji su nule, dobiće se nova, potpuna, centrisana korelaciona matrica koordinata ekvivalentna polaznoj matrici. Svi članovi koji su u prvobitnoj matrici bili jednaki nuli biće u novoj matrici različiti od nule. Množenjem ove matrice sa vektorom slobodnih članova normalnih jednačina, dobiće se vektor X u kome su u principu svi priraštaji različiti od nule. Sa dobivenim vektorom X, preko jednačina (1), dobiće se popravke i tačnost relativnih veličina koji se slažu sa uobičajenim izravnavanjem preko 3.1. Prema ovome, ovakvom modifikacijom korelacione matrice koordinata, dobivene preko 3.1, postižu se neki efekti, koji su od strane nekih diskutanata postavljeni kao cilj, kako je pomenuto u uvodu.

Od interesa je ukazati na još jednu mogućnost formiranja potpune na osnovu nepotpunih matrica. Ako su, postupkom u 3.1, dobivene matrice Q_{1t} i Q_{2t} na objašnjen način, i ako se saberu i zbir podeli sa 2, a zatim obavi centrisanje tako dobivene matrice, dobiće se korelaciona matrica ekvivalentna polaznim matricama, sa kojom će se dobiti iste popravke i tačnost relativnih veličina kao preko 3.1. Može se reći da je ova matrica reprezentativnija nego jedna nepotpuna preobraćena u potpunu centrisanu.

Primeri modifikacije matrica. Ako se matrica Q_{1t}, navedena u 3.1, preobrati na opisan način u potpunu matricu, dobiće se:

$$Q'_{1t} = 10^{-5} \begin{vmatrix} +53 & +53 & +53 & +53 & -104 & -19 & -19 & -70 \\ +53 & +53 & +53 & +53 & -104 & -19 & -19 & -70 \\ +53 & +53 & +53 & +53 & -104 & -19 & -19 & -70 \\ +53 & +53 & +53 & +53 & -104 & -19 & -19 & -70 \\ -104 & -104 & -104 & -104 & +444 & -183 & +46 & +108 \\ -19 & -19 & -19 & -19 & -183 & +304 & -36 & -11 \\ -18 & -18 & -18 & -18 & +46 & -35 & +39 & +25 \\ -70 & -70 & -70 & -70 & +107 & -11 & +24 & +158 \end{vmatrix}$$

$$\mathrm{trag} = 0{,}01157$$

Ako se napravi zbir matrica Q_{1t} i Q_{2t} iz 3.1 i podeli sa 2, a zatim obavi redukcija da zbir članova svake vrste i kolone bude jednak nuli, dobiće se matrica:

$$Q_{12t} = 10^{-5} \begin{vmatrix} +87 & +91 & -27 & +33 & -71 & -28 & -28 & -54 \\ +90 & +354 & -94 & -22 & -107 & -65 & -65 & -90 \\ -27 & -94 & +150 & +36 & -42 & 0 & 0 & -25 \\ +32 & -22 & +36 & +132 & -70 & -28 & -28 & -54 \\ -71 & -108 & -42 & -70 & +243 & -70 & +43 & +75 \\ -29 & -65 & 0 & -28 & -70 & +173 & +3 & +15 \\ -28 & -65 & +1 & -28 & +44 & +3 & +40 & +33 \\ -54 & -90 & -25 & -53 & +75 & +15 & +33 & +100 \end{vmatrix}$$

$$\mathrm{trag} = 0{,}01279$$

Sa ovim matricama se dobiva odgovarajući vektor popravaka koordinata, preko koga se dobivaju popravke i korelaciona matrica pravaca, koje su iste kao u 3.1.

Ako se obavi modifikacija u 3.1 navedene korelacione matrice Q_{1n} na objašnjen način, dobiće se matrica:

$$Q'_{1n} = \begin{vmatrix} +0{,}3297 & -0{,}0232 & -0{,}1195 & -0{,}1871 \\ -0{,}0235 & +0{,}3297 & -0{,}1194 & -0{,}1867 \\ -0{,}1192 & -0{,}1194 & +0{,}4259 & -0{,}1873 \\ -0{,}1869 & -0{,}1872 & -0{,}1871 & +0{,}5611 \end{vmatrix}$$

Ako se na isti način modifikuje matrica Q_{2n}, koja je navedena u 3.1, dobiće se matrica koja je jednaka ovoj matrici, a obzirom na matricu Q_{4n} navedenu u poglavlju 3.2 pod e) i matricu Q_{nM} navedenu u okviru 3.4, koje se neznatno razlikuju od Q'_{1n}, ima osnova zaključku za nivelman, za čije definisanje koordinatnog početka jeste potreban samo jedan podatak, da će se, modifikacijom matrice dobivene bilo kojom varijantom preko postupka u

3.1, dobiti direktno Mittermayerova korelaciona matrica. Ako je za neke potrebe neophodno odrediti Mittermayerovu matricu, ovo bi bio najjednostavniji postupak kada je u pitanju nivelman.

Treba još pomenuti da je navedeni primer iz nivelmana izravnat i postupkom sa fiktivnom jednačinom popravaka, kako se preporučuje u radovima [10] — [15], pri čemu je dobivena korelaciona matrica:

$$Q_{nf} = \begin{vmatrix} +0{,}3925 & +0{,}0395 & -0{,}0566 & -0{,}1251 \\ +0{,}0395 & +0{,}3925 & -0{,}0566 & -0{,}1251 \\ -0{,}0567 & -0{,}0567 & +0{,}4886 & -0{,}1251 \\ -0{,}1251 & -0{,}1254 & -0{,}1250 & +0{,}6254 \end{vmatrix}$$

Ova matrica nije jednaka Mittermayerovoj matrici, ali se redukcijom samo vrsta ili kolona svodi na nju.

5. ZAKLJUČAK

1. Strogo posmatrano, izravnavanje slobodne mreže posrednim izravnavanjem nije moguće ako nisu, osim relativnih veličina — pravaca, uglova i dužina u tringulaciji, odnosno visinskih razlika u nivelmanu, merene i apsolutne veličine — dovoljan broj koordinata u triangulaciji odnosno nadmorskih visina u nivelmanu. Posrednim izravnavanjem se određuju i definitivne vrednosti koordinata a što nije moguće bez definisanja koordinatnog sistema.

2. Ako se ne raspolaže realnim podacima za definisanje koordinatnog sistema, jedina mogućnost jeste da se učine odgovarajuće pretpostavke preko kojih se definiše koordinatni sistem, čime se omogućuje jednoznačno izravnavanje i ocena tačnosti relativnih veličina, ali ne i jednoznačni rezultati izravnavanja i realna ocena tačnost koordinata.

3. Broj i priroda mogućnosti za pretpostavke nisu ograničeni. Svakom pretpostavkom se polazi od nepostojećih podataka zbog čega svaka pretpostavka ima svoje defekte, a jedino može da se razmišlja o više ili manje prihvatljivim defektnostima.

4. Od interesa je niz u tekstu analiziranih mogućnosti za pretpostavke podeliti u 2 grupe:

a) Pretpostavke po kojima je poznat samo neophodan broj podataka za definisanje koordinatnog sistema.

b) Pretpostavke po kojima je poznat veći broj podataka no što je potrebno za definisanje koordinatnog sistema, a najčešće se pretpostavlja da su poznate sve koordinate u mreži.

5. Kod mogućnosti pod a/ nivo tačnosti koordinata jeste ujednačen i zavisi od konfiguracije mreže i prirode pretpostavljenih podataka.

6. Kod mogućnosti pod b/ koordinatni sistem, pošto se radi samo o pretpostavci postojanja velikog broja podataka tj. svih koordinata u mreži, jeste fiktivno tačnije određen, pa je veličinski red traga matrice znatno manji no kod slučaja pod a/. Pokazatelji pogrešnosti koordinata, kod ovakve pretpostavke, zavise od ukupnog broja tačaka u mreži. Što je veći broj tačaka u mreži, veća je fiktivna tačnost koordinata.

7. Svi u tekstu pomenuti postupci izravnavanja slobodne mreže, a koji polaze od pretpostavke da su poznate sve koordinate, mogu da budu od intresa za analizu pri istraživanju, tj. za odgovore na pitanja »šta bi bilo kad bi bilo«, ali se za praktične potrebe ne može prihvatiti nikakva prednost ovih postupaka, a najmanje za donošenje zaključaka o realnoj tačnosti definitivno izravnatih koordinata.

8. Kada bi se koordinatni sistem određivao na osnovu realno poznatih koordinata svih tačaka (slučaj Helmertove transformacije) tada bi bez sumnje korelaciona matrica definitivnih koordinata izražavala realnu tačnost tih koordinata, ali, ako se samo pretpostavlja da koordinate imaju status merenih veličina, korelaciona matrica će da izražava imaginarnu tačnost koordinata koja za praksu ne može biti korisna.

9. Zbog svega, ni u kom slučaju se ne bi smelo prihvatiti da se u bilo kom vidu normativno reguliše obaveznost izravnavanja slobodnih geodetskih mreža postupcima koji baziraju na pretpostavci da su koordinate svih tačaka poznate, jer su ti postupci višestruko komplikovaniji, za praktične potrebe ništa ne znače, a mogu da imaju za posledicu krive odnosno nerealne zaključke o tačnosti mreže.

LITERATURA:

[1] Mittermayer, E.: A generalization of the least-squares method for the adjustment of free networks — Bulletin geodesique N° 104, 1972.

[2] Mihailović, K.: Apsolutne i relativne greške traženih veličina u lokalnim mrežama — Zbornik Geodetskog instituta, Beograd, 1973.

[3] Stevanović, J.: Generalisanje problema izravnavanja u triangulaciji, Geodetski list 1976, 1—3, 3—15.

[4] Stevanović, J.: Različite mogućnosti uključivanja merenih podataka u izravnavanje s obzirom na neujednačenu tačnost tih podataka, Zbornik radova Simpozijuma o osnovnim geodetskim radovima, Herceg—Novi, 1976.

[5] Mihailović, K.: Generalisanje problema izravnavanja u triangulaciji, Geodetski list 1977, 4—6, 77—83.

[6] Stevanović, J.: Prilog diskusiji o oceni tačnosti za slučaj kada se u izravnavanje uključuju približne odnosno merene veličine, Geodetski list, 1977, 4—6, 84—86.

[7] Mihailović, K.: Apsolutne i relativne veličine u geodetskim mrežama, Geodetska služba br. 16, Beograd, 1976.

[8] Stevanović, J.: O problemu ocene tačnosti pri izravnavanju apsolutnih i relativnih veličina u geodetskim mrežama, Geodetska služba br. 18, Beograd, 1977.

[9] Mihailović, K.: Dileme koje to nisu, Geodetska služba br. 19, Beograd, 1977.

[10] Molnar, I.: Određivanje nadmorske visine repera nižeg reda uzimanjem u obzir greške datih veličina, Geodetski list 1978, 7—9, 179—187.

[11] Molnar, I.: Izravnavanje nivelmanske mreže nižega reda, Geodetski list, 1979, 7—9, 201—210.

[12] Molnar, I.: Određivanje visine repera trigonometrijskog nivelmana primenom postupka izravnavanja mreže repera sa minimalnim tragom, Geodetska služba br. 25, Beograd, 1979.

[13] Molnar, I.: Prilog izravnavanju nivelmanskih mreža podelom u redove, Geodetski list, 1979, 10—12, 296—305.

[14] Molnar, I.: Prilog izravnavanju uglovnih veličina, Geodetska služba br. 27, Beograd, 1980.

[15] Molnar, I.: Realna ocena tačnosti slobodne mreže kad se u izravnavanje uključuju približne ili merene veličine, Geodetska služba br. 28, Beograd, 1980.

[16] Kovačević, D.: Prilog istraživanju praktične primene unutarnje teorije grešaka kod izravnavanja slobodnih mreža, Zbornik Savetovanja o naučnoistraživačkom radu i obrazovanju kadrova u geodetskoj struci, Jajce, 1979.

[17] Pašalić, S.: Jedna metoda izravnavanja slobodne triangulacione mreže, Geodetski list, 1983, 4—6, 69—76.

[18] Kovačević, D.: Osvrt na »Jednu metodu izravnavanja slobodne triangulacione mreže«, Geodetski list, 1984, 4—6, 101—106.

[19] Stevanović, J.: Modifikacija korelacione matrice pravaca dobivenih na osnovu uglova, da bi popravka početnog pravca bila različita od nule, Geodetski list, 1972, 10—12, 175—180.

[20] Čubranić, N.: Teorija grešaka sa računom izjednačenja, Zagreb, 1976.

[21] Stevanović, J.: Gradske i rudničke trigonometrijske mreže kao naknadno opažane mreže, Geodetski list, 1966, 4—6, 102—126.

REZIME

U radu su razmatrani problemi ocene tačnosti koordinata odnosno nadmorskih visina kod posrednog izravnavanja slobodnih geodetskih mreža. Ako u slobodnoj mreži, pored izmerenih relativnih veličina (pravaca, uglova, dužina, visinskih razlika) nisu merene i apsolutne veličine (koordinate, nadmorske visine) tada nije definisan koordinatni sistem, pa strogo uzevši, izravnanje nije moguće. Za jednoznačne rezultate izravnavanja i ocenu tačnosti izmerenih relativnih veličina, rešenje je moguće i sa pretpostavkama da postoje elementi kojima se definiše koordinatni sistem. Zbog velikog broja mogućih pretpostavaka o tome kako je definisan koordinatni sistem, nisu mogući jednoznačni rezultati izravnavanja i realna ocena tačnosti apsolutnih veličina. U radu su tretirane pretpostavke da je koordinatni sistem definisan:

— dovoljnim brojem poznatih koordinata za koje se pretpostavlja da su konstantne,

— indirektno, sa dovoljnim brojem podataka preko odgovarajućih uslovnih jednačina,

— dovoljnim brojem poznatih koordinata za koje se pretpostavlja da su merene,

— pretpostavkom da su poznate sve koordinate u mreži, uz izravnavanje preko dvostrukog uslova minimuma.

Navedene su i mogućnosti modifikacije korelacionih matrica koordinata uz zadržavanje ekvivaletnosti matrica, čime se takođe mogu dobiti odgovarajuće srednje greške koordinata za sve tačke u mreži.

Na kraju je konstatovano da ocena tačnosti apsolutnih veličina za bilo koju pretpostavku ima svoje nedostatke, a za postupke koji baziraju na pretpostavci da su poznate koordinate svih tačaka u mreži je navedeno da nemaju nikakvu prednost jer su višestruko komplikovaniji, za praktične potrebe ništa ne znače, a mogu da imaju za posledicu krive, odnosno nerealne zaključke o tačnosti mreže obzirom da se ovim postupcima dobivena tačnost povećava sa povećavanjem broja tačaka odnosno repera u mreži.

ZUSAMMENFASSUNG

In der Arbeit wurden die Probleme der Ganauigkeitsbeurteilung von Koordinaten, bzw. von Höhen ü. M. bei der vermittelden Ausgleichung von freien geodätischen Netzen behandelt. Wenn in einem freien Netz neben der beobachteten Relativgrössen (Rictungen, Winkel, Strecken und Höhendifferenzen) keine Absolutgrössen gemessen worden sind, dann besteht kein definiertes Koordinatensystem und streng genommen keine Ausgleichnung möglich ist. Für eindeutige Ergebnisse der Ausgleichnung und die Genauigkeitabschätzung der gemessenen Relativgrössen wird die Lösung auch mittels Annahmen ermöglicht, dass die gerade für ein Koordinatensystem definirenden Elemente bestehen. Wegen der grossen Zahl der möglichen Voraussetzungen, wie das Koordinaten-system festgelegt ist, sind aber keine eindeutige Ausgleichungsresultate und keine reelle Genaunigkeitsabschätzung de Absolutgrössen möglich. In dem Aufsatz wurden folgende Annahmen über die Definition des Koordinatensystems behandelt:

— durch eine ausreichende Anzahl von bekannten Koordinaten für die angenommen wird, sie seien konstant,

— indirekt mittels genügenden Daten durch die entsprechenden Bedingungsgleichungen,

— durch ausreichende Anzahl von bekannten Koordinaten, für die vorausgesetzt wird, sie seien gemessen,

— durch die Annahme alle Koordinaten im Netz sind bekannt, bei der Ausgleichung über doppelte Minimumsbedingung.

Auch wurden die Modifikationsmöglichkeiten von Korrelationsmatrizen der Koordinaten bei Behaltung der Equivalenz von Matrizen, wodurch auch die entsprechenden mittleren Koodinatenfehler für alle Netzpunkte gewonnen können.

Am Ende wurde festgestellt dass die Genauigkeitsabschätzung von absoluten Grössen bei jeder von Annahmen ihre Nachteile zeigt. Für die Verfahren, die an der Annahme beruhen, die Koordinaten aller Netzpunkte seien bekannt, wurde angegeben, dass keine Vorteile besitzen, weil sie mehrfach komplizierter und für praktische Belange bedeutungslos sind, sogar als Folge die falschen bzw. unreellen Folgerungen über die Netzgenauigkeit haben können, zumal die mit diesen Verfahren erhaltene Ganauigkeit mit wachsender Punktzahl in einem Netz sich vergrössert.

Primljeno: 1986—01—22