UDK 528.421:513.43
Originalni znanstveni rad

DIREKTNO RJEŠENJE PROBLEMA ODREĐIVANJA ELEMENATA VERTIKALNOG OBJEKTA OBLIKA STOŠCA

Damjan JOVIČIĆ, Miljenko LAPAINE, Svetozar PETROVIĆ — Zagreb*

U radu [4] I. Krivičić predložio je svoju metodu postepenog približavanja za rješenje problema određivanja elemenata, prvenstveno kuta pri vrhu, vertikalnog objekta oblika stošca. Problem je moguće riješiti direktno (egzaktno), što ćemo pokazati u ovom radu.

1. FORMULACIJA I RJEŠENJE PROBLEMA

Problem je geometrijske prirode i možemo ga formulirati pomoću slike. Pravci P_1M_1 i P_2M_2 su tangente na stožac povučene iz točaka P_1, odnosno P_2. M_1 i M_2 su dirališta tih tangenata. Poznati (izmjereni) su vertikalni kutovi v_1 i v_2, horizontalni ε_1 i ε_2, udaljenosti $d_1 = O_1P_1$ i $d_2 = O_2P_2$, te visinska razlika $h = O_1O_2$ točaka P_1 i P_2. Traži se kut τ. Kad se nađe τ, tada je sve ostalo lako (vidi [2], [3], [4]).

Sa slike vidimo da vrijede ove relacije:

$$\sin(\varepsilon_A - \varepsilon_1) = \frac{AN_1}{P_1N_1}, \qquad \sin(\varepsilon_B - \varepsilon_2) = \frac{BN_2}{P_2N_2}$$

$$\operatorname{tg} v_1 = \frac{M_1N_1}{P_1N_1}, \qquad \operatorname{tg} v_2 = \frac{M_2N_2}{P_2N_2}$$

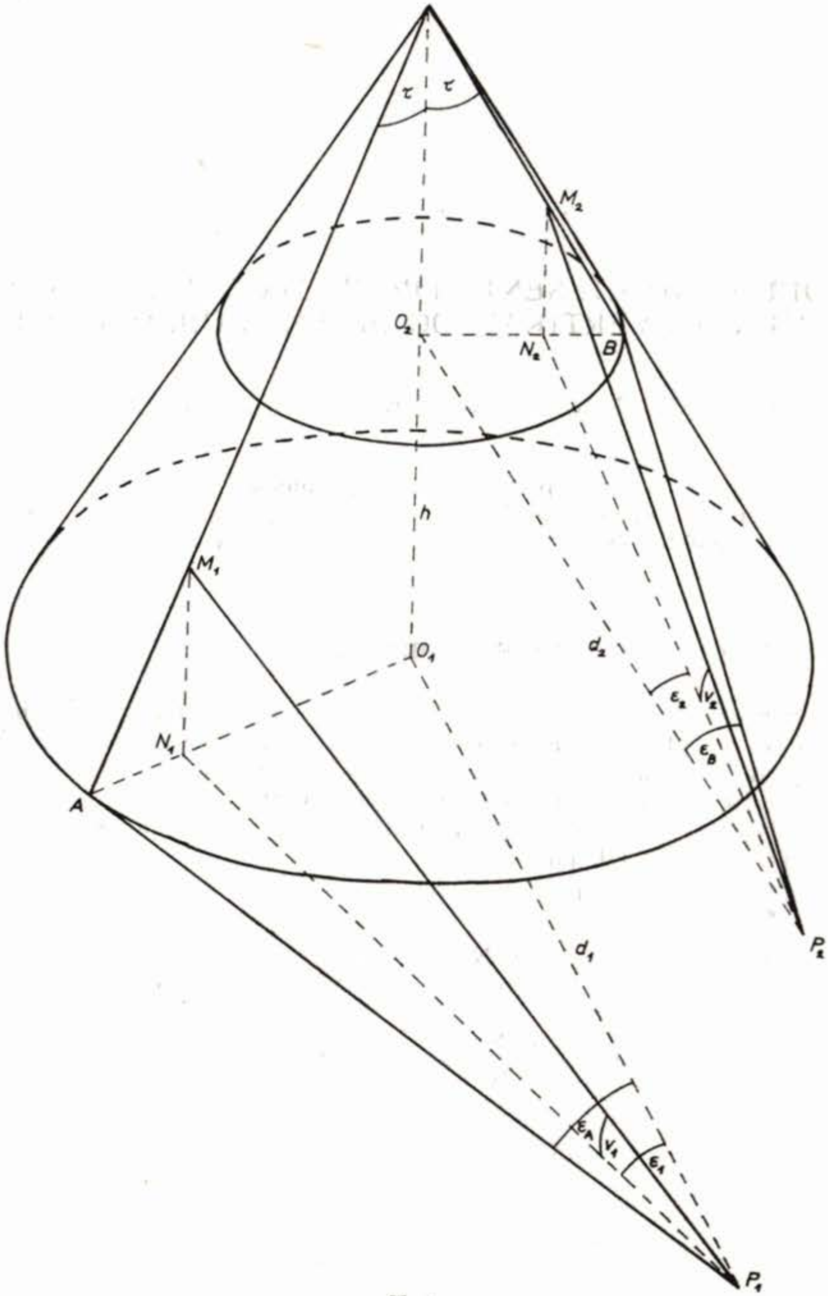
$$\operatorname{tg} \tau = \frac{AN_1}{M_1N_1} = \frac{\sin(\varepsilon_A - \varepsilon_1)}{\operatorname{tg} v_1} \tag{1}$$

$$\operatorname{tg} \tau = \frac{BN_2}{M_2N_2} = \frac{\sin(\varepsilon_B - \varepsilon_2)}{\operatorname{tg} v_2}, \tag{2}$$

a također i

$$d_2 \sin \varepsilon_B + h \operatorname{tg} \tau = d_1 \sin \varepsilon_A. \tag{3}$$

* Adresa autora: mr Damjan Jovičić, dipl. mat., Miljenko Lapaine, dipl. inž., Svetozar Petrović, dipl. inž., Geodetski fakultet, Zagreb, Kačićeva 26.



Sl. 1

Relacije (1), (2) i (3) možemo shvatiti kao sistem od tri jednadžbe s tri nepoznanice ε_A, ε_B i τ. Jedna od mogućnosti rješavanja je slijedeća:

Koristeći identitete

$$\sin \varepsilon_B = \sin(\varepsilon_B - \varepsilon_2)\cos\varepsilon_2 + \cos(\varepsilon_B - \varepsilon_2)\sin\varepsilon_2$$
$$\sin \varepsilon_A = \sin\varepsilon_1 \cos(\varepsilon_A - \varepsilon_1) + \cos\varepsilon_1 \sin(\varepsilon_A - \varepsilon_1)$$

preinačimo (3) u

$$d_2 \sin(\varepsilon_B - \varepsilon_2)\cos\varepsilon_2 - d_1 \sin(\varepsilon_A - \varepsilon_1)\cos\varepsilon_1 + h\,\mathrm{tg}\,\tau =$$
$$= d_1 \cos(\varepsilon_A - \varepsilon_1)\sin\varepsilon_1 - d_2\cos(\varepsilon_B - \varepsilon_2)\sin\varepsilon_2. \tag{4}$$

Sada pomoću (1) i (2), (4) prelazi u

$$\mathrm{tg}\,\tau(d_2\,\mathrm{tg}\,v_2\cos\varepsilon_2 - d_1\,\mathrm{tg}\,v_1\cos\varepsilon_1 + h) =$$
$$= d_1\sin\varepsilon_1\sqrt{1-\mathrm{tg}^2 v_1\,\mathrm{tg}^2\tau} - d_2\sin\varepsilon_2\sqrt{1-\mathrm{tg}^2 v_2\,\mathrm{tg}^2\tau} \tag{5}$$

što je iracionalna jednadžba s jednom nepoznanicom $\mathrm{tg}\tau$. Ako je kvadriramo, preuredimo, pa opet kvadriramo možemo dobiti

$$a\,\mathrm{tg}^4\tau + b\,\mathrm{tg}^2\tau + c = 0, \tag{6}$$

gdje su

$$a = q^2 - 4d_1^2d_2^2\sin^2\varepsilon_1\sin^2\varepsilon_2\,\mathrm{tg}^2 v_1\,\mathrm{tg}^2 v_2$$
$$b = -2qr + 4d_1^2d_2^2\sin^2\varepsilon_1\sin^2\varepsilon_2(\mathrm{tg}^2 v_1 + \mathrm{tg}^2 v_2)$$
$$c = r^2 - 4d_1^2d_2^2\sin^2\varepsilon_1\sin^2\varepsilon_2$$
$$r = d_1^2\sin^2\varepsilon_1 + d_2^2\sin^2\varepsilon_2$$
$$q = p^2 + d_1^2\sin^2\varepsilon_1\,\mathrm{tg}^2 v_1 + d_2^2\sin^2\varepsilon_2\,\mathrm{tg}^2 v_2$$
$$p = d_2\,\mathrm{tg}\,v_2\cos\varepsilon_2 - d_1\,\mathrm{tg}\,v_1\cos\varepsilon_1 + h$$

Jednadžba (6) je bikvadratna jednadžba koja općenito ima četiri rješenja od kojih treba odabrati ono koje zadovoljava (5). Time je problem riješen.

Numerički primjer 1.

Zadano (preuzeto iz [4], uz pretpostavku da su d_1, d_2 i h u metrima, iako je neobično da je visinska razlika h određena na stotinku milimetra):

$\varepsilon_1 = 16°\,48'\,17.''5$	$\varepsilon_2 = 11°\,52'\,00''$
$v_1 = 17°\,30'\,00''$	$v_2 = 26°\,34'\,00''$
$d_1 = 120$	$d_2 = 100$

$h = 13.29723$

Račun daje:

$p = 26.01204$	$a = 763023.5$
$q = 902.0138$	$b = -2222817$
$r = 1626.500$	$c = 609627.1$

Rješenja bikvadratne jednadžbe (6) su:

$$(\operatorname{tg}\tau)_{1,2} = \pm 0.5536315$$

$$(\operatorname{tg}\tau)_{3,4} = \pm 1.614516$$

Uvrštavanjem u (5) nalazimo da je traženo rješenje

$$\operatorname{tg}\tau = 0.5536315$$

odnosno

$$\tau = 28^\circ\, 58'\, 13''.$$

2. SPECIJALNI SLUČAJ

Ako je $d_1 = d_2$ i $h = 0$, odgovarajućim sređivanjem možemo dobiti

$$a = st$$

$$b = -s \sin^2(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) - t \sin^2(\varepsilon_2 + \varepsilon_1)$$

$$c = \sin^2(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \sin^2(\varepsilon_2 + \varepsilon_1)$$

gdje je

$$s = \operatorname{tg}^2 v_1 + \operatorname{tg}^2 v_2 - 2 \operatorname{tg} v_1 \operatorname{tg} v_2 \cos(\varepsilon_2 + \varepsilon_1)$$

$$t = \operatorname{tg}^2 v_1 + \operatorname{tg}^2 v_2 - 2 \operatorname{tg} v_1 \operatorname{tg} v_2 \cos(\varepsilon_2 - \varepsilon_1).$$

Rješenja jednadžbe (6) su sada

$$\operatorname{tg}\tau = \pm \frac{\sin(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{\sqrt{t}} \tag{7}$$

$$\operatorname{tg}\tau = \pm \frac{\sin(\varepsilon_2 + \varepsilon_1)}{\sqrt{s}}. \tag{8}$$

Provjerom vidimo da (5) zadovoljava samo

$$\operatorname{tg}\tau = \frac{\sin(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{\sqrt{t}} = \frac{\sin(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 v_1 + \operatorname{tg}^2 v_2 - 2 \operatorname{tg} v_1 \operatorname{tg} v_2 \cos(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}}$$

što je poznato već od prije (formula (1) iz [1]).

3. DRUGAČIJA MOGUĆNOST RJEŠAVANJA PROBLEMA

Iz (3) i (1) imamo

$$\sin\varepsilon_B = \frac{d_1}{d_2}\sin\varepsilon_A - \frac{h\sin(\varepsilon_A - \varepsilon_1)}{d_2\,\mathrm{tg}\,v_1} = a\sin\varepsilon_A + b\cos\varepsilon_A \tag{9}$$

gdje je

$$a = \frac{d_1}{d_2} - \frac{h\cos\varepsilon_1}{d_2\,\mathrm{tg}\,v_1}, \quad b = \frac{h\sin\varepsilon_1}{d_2\,\mathrm{tg}\,v_1}.$$

Iz (9), (2) i (1) imamo

$$\mathrm{tg}\,v_2\sin\varepsilon_A\cos\varepsilon_1 - \mathrm{tg}\,v_2\cos\varepsilon_A\sin\varepsilon_1 =$$
$$= \mathrm{tg}\,v_1\sin\varepsilon_B\cos\varepsilon_2 - \mathrm{tg}\,v_1\cos\varepsilon_B\sin\varepsilon_2$$
$$\mathrm{tg}\,v_1\cos\varepsilon_B\sin\varepsilon_2 = \mathrm{tg}\,v_1\cos\varepsilon_2(a\sin\varepsilon_A + b\cos\varepsilon_A) +$$
$$+ \mathrm{tg}\,v_2\cos\varepsilon_A\sin\varepsilon_1 - \mathrm{tg}\,v_2\sin\varepsilon_A\cos\varepsilon_1$$
$$\cos\varepsilon_B = c\sin\varepsilon_A + d\cos\varepsilon_A \tag{10}$$

gdje je

$$c = \frac{a\,\mathrm{tg}\,v_1\cos\varepsilon_2 - \mathrm{tg}\,v_2\cos\varepsilon_1}{\mathrm{tg}\,v_1\sin\varepsilon_2}, \qquad d = \frac{b\,\mathrm{tg}\,v_1\cos\varepsilon_2 + \mathrm{tg}\,v_2\sin\varepsilon_1}{\mathrm{tg}\,v_1\sin\varepsilon_2}.$$

Kvadriramo (9) i (10) i zbrojimo:

$$(a^2 + c^2)\sin^2\varepsilon_A + 2(ab + cd)\sin\varepsilon_A\cos\varepsilon_A + (b^2 + d^2)\cos^2\varepsilon_A = 1. \tag{11}$$

Izrazimo li još $\sin\varepsilon_A$ i $\cos\varepsilon_A$ pomoću $\mathrm{tg}\varepsilon_A$ dobijemo nakon malog sređivanja

$$(a^2 + c^2 - 1)\,\mathrm{tg}^2\varepsilon_A + 2(ab + cd)\,\mathrm{tg}\,\varepsilon_A + b^2 + d^2 - 1 = 0. \tag{12}$$

Rješenje ove kvadratne jednadžbe omogućuje nalaženje kuta ε_A pomoću kojeg iz (1) lako određujemo traženi τ. Od dva dobivena rješenja, provjerom odabiremo pravo, tj. ono koje zadovoljava relacije (1)—(3).

Numerički primjer 2.

Radi usporedbe, neka su u ovom primjeru zadane iste vrijednosti kao u numeričkom primjeru 1.

Račun daje:

$a = 0.7962759$
$b = 0.1219289$
$c = -3.593380$
$d = 2.809981$

Rješenja kvadratne jednadžbe (12) su:

$(\mathrm{tg}\,\varepsilon_A)_1 = 0.5064049$
$(\mathrm{tg}\,\varepsilon_A)_2 = 1.087711$

i odatle

$(\varepsilon_A)_1 = 0.4687584$
$(\varepsilon_A)_2 = 0.8273867.$

Od dva kuta ε_A odabiremo $(\varepsilon_A)_1$, jer je za $(\varepsilon_A)_2$ odgovarajući ε_B koji zadovoljava (9) i (10) tupi kut, što je (vidi sliku 1) nemoguće. Zatim iz (1) lako dobijemo

$$\mathrm{tg}\,\tau = 0.5536315$$

odnosno

$$\tau = 28^\circ\, 58'\, 13''.$$

Uočavamo da smo dobili sasvim isto rješenje kao u primjeru 1.

4. SPECIJALNI SLUČAJ

Ako je $d_1 = d_2$ i $h = 0$ imamo

$$a = 1, \qquad b = 0$$

$$c = \frac{\mathrm{tg}\,v_1 \cos\varepsilon_2 - \mathrm{tg}\,v_2 \cos\varepsilon_1}{\mathrm{tg}\,v_1 \sin\varepsilon_2}, \qquad d = \frac{\mathrm{tg}\,v_2 \sin\varepsilon_1}{\mathrm{tg}\,v_1 \sin\varepsilon_2}.$$

Jednadžba (12) glasi sada

$$c^2\,\mathrm{tg}^2\,\varepsilon_A + 2cd\,\mathrm{tg}\,\varepsilon_A + d^2 - 1 = 0.$$

Rješenja su

$$\mathrm{tg}\,\varepsilon_A = \frac{-d \pm 1}{c}.$$

Izrazimo $\sin\varepsilon_A$ i $\cos\varepsilon_A$ pomoću $\mathrm{tg}\,\varepsilon_A$ i uvrstimo u (1) pa dobijemo

$$\mathrm{tg}\,\tau = \frac{\sin(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{\sqrt{t}}, \qquad \mathrm{tg}\,\tau = \frac{\sin(\varepsilon_2 + \varepsilon_1)}{\sqrt{s}},$$

gdje t i s imaju isto značenje kao u poglavlju 2.
Provjerom vidimo da zadovoljava samo

$$\mathrm{tg}\,\tau = \frac{\sin(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{\sqrt{\mathrm{tg}^2\,v_1 + \mathrm{tg}^2\,v_2 - 2\,\mathrm{tg}\,v_1\,\mathrm{tg}\,v_2 \cos(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}}$$

što je poznato već od prije (formula (1) iz [1]).

5. ODREĐIVANJE SREDNJE POGREŠKE KUTA τ PRI VRHU STOŠCA

I. Krivičić dao je u radu [4] približnu formulu za srednju pogrešku kuta τ. Pokazat ćemo da se može dobiti egzaktni izraz za m_τ. Jedna od mogućnosti je slijedeća:
Iz (1) i (2) možemo napisati

$$\tau = f(\varepsilon_A, \varepsilon_1, v_1) \tag{13}$$

$$\tau = g(\varepsilon_B, \varepsilon_2, v_2), \tag{14}$$

a (3) napišimo u obliku

$$F(\varepsilon_A, \varepsilon_B, d_1, d_2, h, \tau) = 0. \tag{15}$$

Iz (13), (14) i (15) diferenciranjem dobijemo

$$d\tau = f_{\varepsilon_A}\, d\varepsilon_A + f_{\varepsilon_1}\, d\varepsilon_1 + f_{v_1}\, dv_1 \tag{16}$$

$$d\tau = g_{\varepsilon_B}\, d\varepsilon_B + g_{\varepsilon_2}\, d\varepsilon_2 + g_{v_2}\, dv_2 \tag{17}$$

$$F_{\varepsilon_A}\, d\varepsilon_A + F_{\varepsilon_B}\, d\varepsilon_B + Fd_1\, dd_1 + Fd_2\, dd_2 + F_h\, dh + F_\tau\, d\tau = 0. \tag{18}$$

Ovdje smo kraće označili:

$$f_{\varepsilon_A} = \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_A}, \qquad f_{\varepsilon_1} = \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_1} \text{ itd.}$$

Iz (16) i (17) imamo

$$d\varepsilon_A = (d\tau - f_{\varepsilon_1}\, d\varepsilon_1 - f_{v_1}\, dv_1)/f_{\varepsilon_A} \tag{19}$$

$$d\varepsilon_B = (d\tau - g_{\varepsilon_2}\, d\varepsilon_2 - g_{v_2}\, dv_2)/g_{\varepsilon_B}. \tag{20}$$

Uvrstimo li (19) i (20) u (18) i sredimo na odgovarajući način, možemo dobiti

$$d\tau = \left(\frac{F_{\varepsilon_A} f_{\varepsilon_1}}{f_{\varepsilon_A}}\, d\varepsilon_1 + \frac{F_{\varepsilon_B} g_{\varepsilon_2}}{g_{\varepsilon_B}}\, d\varepsilon_2 + \frac{F_{\varepsilon_A} f_{v_1}}{f_{\varepsilon_A}}\, dv_1 + \frac{F_{\varepsilon_B} g_{v_2}}{g_{\varepsilon_B}}\, dv_2 - F_{d_1} dd_1 - \right.$$
$$\left. - F_{d_2} dd_2 - F_h dh\right) \Big/ \left(\frac{F_{\varepsilon_A}}{f_{\varepsilon_A}} + \frac{F_{\varepsilon_B}}{g_{\varepsilon_B}} + F_\tau\right) \tag{21}$$

odnosno

$$m_\tau^2 = \left[\left(\frac{F_{\varepsilon_A} f_{\varepsilon_1}}{f_{\varepsilon_A}}\right)^2 m_{\varepsilon_1}^2 + \left(\frac{F_{\varepsilon_B} g_{\varepsilon_2}}{g_{\varepsilon_B}}\right)^2 m_{\varepsilon_2}^2 + \left(\frac{F_{\varepsilon_A} f_{v_1}}{f_{\varepsilon_A}}\right)^2 m_{v_1}^2 + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{F_{\varepsilon_B} g_{v_2}}{g_{\varepsilon_B}}\right)^2 m_{v_2}^2 + F_{d_1}^2 m_{d_1}^2 + F_{d_2}^2 m_{d_2}^2 + F_h^2 m_h^2\right] \Big/ \left(\frac{F_{\varepsilon_A}}{f_{\varepsilon_A}} + \frac{F_{\varepsilon_B}}{g_{\varepsilon_B}} + F_\tau\right)^2, \tag{22}$$

gdje je

$$f_{\varepsilon_A} = \frac{\mathrm{tg}\, v_1 \cos(\varepsilon_A - \varepsilon_1)}{\mathrm{tg}^2 v_1 + \sin^2(\varepsilon_A - \varepsilon_1)}, \quad f_{\varepsilon_1} = -f_{\varepsilon_A}, \quad f_{v_1} = -f_{\varepsilon_A} \mathrm{tg}(\varepsilon_A - \varepsilon_1)/\sin v_1 \cos v_1,$$

$$g_{\varepsilon_B} = \frac{\mathrm{tg}\, v_2 \cos(\varepsilon_B - \varepsilon_2)}{\mathrm{tg}^2 v_2 + \sin^2(\varepsilon_B - \varepsilon_2)}, \quad g_{\varepsilon_2} = -g_{\varepsilon_B}, \quad g_{v_2} = -g_{\varepsilon_B} \mathrm{tg}(\varepsilon_B - \varepsilon_2)/\sin v_2 \cos v_2,$$

$$F_{\varepsilon_A} = -d_1 \cos \varepsilon_A, \qquad F_{\varepsilon_B} = d_2 \cos \varepsilon_B, \qquad F_h = \mathrm{tg}\, \tau$$

$$F_{d_1} = -\sin \varepsilon_A, \qquad F_{d_2} = \sin \varepsilon_B, \qquad F_\tau = h/\cos^2 \tau.$$

Numerički primjer 3.

Neka su zadane iste mjerene vrijednosti kao u numeričkom primjeru 1, i neka su

$$m_{\varepsilon_1} = m_{\varepsilon_2} = \pm 4''$$

$$m_{v_1} = m_{v_2} = \pm 8''$$

$$m_{d_1} = m_{d_2} = \pm 8 \text{ mm}, \qquad m_h = \pm 10 \text{ mm}$$

njihove srednje pogreške. Tada pomoću izraza (22) možemo izračunati da je

$$m_\tau = \pm 29''.$$

6. NEKE KARAKTERISTIKE METODE POSTEPENOG PRIBLIŽAVANJA

Da bi se mogla usporediti upotrebljivost metode postepenog približavanja I. Krivičića i naše direktne metode, provedeno je testiranje na nizu primjera. Pokazalo se:

1) metoda postepenog približavanja [4] često daje rješenje nakon nekoliko (5—6) iteracija;
2) u nekim primjerima metoda postepenog približavanja zahtijevala je vrlo velik broj iteracija (tridesetak i više) da bi se dobilo konačno rješenje;
3) postoje primjeri kod kojih metoda postepenog približavanja uopće ne može dati rješenje, jer se pojavljuje vađenje drugog korijena iz negativnog broja (npr. modificiramo li malo numeričke vrijednosti iz primjera 1, pa uzmemo:

$$\varepsilon_1 = 16° 48' 17.''5 \qquad \varepsilon_2 = 11° 52' 00''$$
$$v_1 = 20° 00' 00'' \qquad v_2 = 18° 30' 00''$$
$$d_1 = 120 \text{ m} \qquad d_2 = 100 \text{ m}$$
$$h = 13.29723 \text{ m}$$

tada je egzaktno rješenje za kut $\tau = 63° 28' 51''$, koji uopće nije moguće dobiti metodom postepenog približavanja iz rada [4]);

4) potpuno istovjetno ponašanje opisano u 1), 2) i 3) pokazala je i metoda postepenogo približavanja iz [2] i [3] (naravno uz odgovarajuće primjere);

5) približna formula za ocjenu točnosti kuta τ izvedena u radu [4] je previše gruba, jer sa numeričkim podacima navedenim pod 3) i srednjim pogreškama mjerenih veličina kao u numeričkom primjeru 3) iz ovog rada, daje srednju pogrešku $m_\tau = \pm 80''$, dok je prava srednja pogreška $m_\tau = \pm 36''$ (izračunata prema egzaktnoj formuli (22));
6) na istim primjerima na kojima smo testirali metodu postepenog približavanja, testirali smo i obje varijante naše direktne metode (opisane u ovom radu) i nismo uočili nikakve poteškoće.

Iz svega rečenog u ovom poglavlju zaključujemo da bi metodu postepenog približavanja iz radova [2], [3] i [4] trebalo poboljšati da se izbjegnu navedeni nedostaci da bi joj se mogla dati prednost pred direktnim načinom.

LITERATURA:

[1] Jovičić, D., Lapaine, M., Petrović, S.: Prilog određivanju koordinata dirališta vizurnog pravca i nagiba izvodnice vertikalnog objekta oblika stošca, Geodetski list, 1983, 4—6, 97—100.

[2] Krivičić, I.: Neke geodetske metode mjerenja pri osmatranju deformacija i pomaka vertikalnih objekata, Magistarski rad, Geodetski fakultet, 1981.

[3] Krivičić, I.: Određivanje koordinata dirališta vizurnog pravca i nagiba izvodnice vertikalnog objekta oblika stošca, Geodetski list 1982, 7—9, 179—193.

[4] Krivičić, I.: Opće rješenje određivanja elemenata položaja i oblika vertikalnog stošca primjenom metode postepenog približavanja, Geodetski list 1985, 7—9, 205—210.

SAŽETAK

Problem određivanja kuta pri vrhu vertikalnog objekta oblika stošca, koji je postavio I. Krivičić, u ovom radu riješili smo egzaktno i ujedno izveli izraz za ocjenu točnosti tako određenog kuta. Uspoređujući našu direktnu metodu sa metodom postepenog približavanja koju je predložio I. Krivičić, ustanovili smo da je ova druga u nekim slučajevima neupotrebljiva.

ABSTRACT

The paper offers an exact solution of the problem posed by I. Krivičić — to determine the angle at the top of a vertical conelike object. The corresponding accuracy estimation (r. m. s. error) of the determined angle is derived as well. Comparing the described direct method with the iterative one which was proposed by I. Krivičić, it came out that the last mentioned is in certain cases unusable.

Primljeno: 1986—