UDK 528.411:528.1
Originalni znanstevni rad

POLOŽAJNE GREŠKE TAČAKA U GRADSKIM MREŽAMA

Krunislav MIHAILOVIĆ — Beograd*

Gradske mreže izravnavaju se u lokalnom koordinatnom sistemu (x, y), a zatim se vrši transformacija koordinata tačaka u državni koordinatni sistem (X', Y'). Transformaciju koordinata omogućuju zajedničke tačke čije su koordinate poznate u oba koordinatna sistema (x_i, y_i) i (X'_i, Y'_i). U daljoj eksploataciji koriste se isključivo transformisane koordinate tačaka (X'_i, Y'_i). Naravno i srednje greške $m_{x'_i}$ i $m_{y'_i}$, treba da se odnose na transformisane koordinate X'_i i Y'_i.

Kao što je poznato srednje greške koordinata određuju se po formuli

$$m_{x_i} = m_o \sqrt{(Q_x)_{ii}}, \tag{1}$$

ili

$$m_{x'_i} = m_o \sqrt{(Q_{x'})_{ii}}. \tag{2}$$

Koeficijenti težina uzimaju se sa glavne dijagonale matrice:

$$Q_x = N^{-1} = (A^* Q^{-1} A)^{-1}, \tag{3}$$

ili

$$Q_{x'} = B_2 \, Q_x \, B^*_2, \tag{4}$$

gdje je

$$Q_x = \begin{bmatrix} N^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A^* Q^{-1} A)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

$$B_2 = E - C(C^* C)^{-1} C^*. \tag{6}$$

Srednje greške (1) pružaju informaciju o tačnosti tačaka u odnosu na koordinatni početak, a srednje greške (2) u odnosu na najvjerojatniji položaj tačaka.

---

* Adresa autora: Prof. dr Krunislav Mihailović, Institut za geodeziju, Građevinski fakultet, Beograd, Bulevar revolucije 73.

U stručnoj literaturi, a to se zatim prenosi i u praksu, ne vrši se pravilna ocena tačnosti transformiranih koordinata (X_i', Y_i'). Zapravo ne mogu se na isti način određivati srednje greške koordinata zajedničkih tačaka i onih koje nisu zajedničke. Kako je ukazano u radu [1], pri oceni tačnosti transformisanih koordinata X_i' i Y_i' potrebno je razlikovati dve grupe tačaka, zajedničke i one koje nisu zajedničke.

Vektor transformisanih koeficijenata određuje se na osnovu koordinata zajedničkih tačaka

$$t_1 = (C_1^* C_1)^{-1} C_2^* (x_1' - x_1), \tag{7}$$

gde su x_1 i x_1' vektori koordinata zajedničkih tačaka u sistemu (x, y) i (x′, y′), a matrica C_1 i vektor t_1 predstavljaju

— u trigonometrijskoj mreži

$$C_1 = \begin{bmatrix} -y_1 & 1 & 0 \\ x_1 & 0 & 1 \\ -y_2 & 1 & 0 \\ x_2 & 0 & 1 \\ - & - & - \\ y_n & 1 & 0 \\ -x_n & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad t_1 = \begin{bmatrix} d_\varnothing \\ C_x \\ C_y \end{bmatrix} \tag{8}$$

— u nivelmanskoj mreži

$$C_1 = [1\ 1\ \dots\ 1],\ t_1 = C_x = C_H. \tag{9}$$

Vektor transformisanih koordinata, biće

— za zajedničke tačke

$$X_1' = C_1 t_1 + x_1 \tag{10}$$

— za tačke koje nisu zajedničke

$$X_2' = C_2 t_1 + x_2. \tag{11}$$

Matrica C_2 sadrži koordinate samo nezajedničkih tačaka (tačaka čije su koordinate poznate samo u sistemu x i y).

Uvrstimo (7) u (10) i (11)

$$\begin{aligned} X_1' &= [E - C_1 (C_1^* C_1)^{-1} C_1 *]\, x_1 + C_1 (C_1^* C_1)^{-1} C_1^* x_1', \\ X_2' &= -C_2 (C_1^* C_1)^{-1} C_1 * x_1 + x_2 + C_2 (C_1^* C_1)^{-1} C_1^* x_1') \end{aligned} \tag{12}$$

Obrazujmo zajednički vektor

$$X' = \begin{bmatrix} X_1' \\ X_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E - C_1 (C_1^* C_1)^{-1} C_1^* & 0 & C_1 (C_1^* C_1)^{-1} C_1^* \\ -C_2 (C_1^* C_1) - 1 C_1^* & E & C_2 (C_1^* C_1)^{-1} C_1^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1' \end{bmatrix}$$

ili, kraće

$$X' = B_1\, X. \tag{13}$$

Korelaciona matrica, biće

$$Q_x = B_1\, Q_x\, B_1^*, \tag{14}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} E - C_1\,(C_1^*C_1)^{-1}\,C_1^* & 0 & C_1\,(C_1^*C_1)^{-1}C_1^* \\ -C_2\,(C_1^*C_1)^{-1}\,C_1^* & E & C_2\,(C_1^*C_1)^{-1}\,C_1^* \end{bmatrix} \tag{15}$$

$$Q_X = \begin{bmatrix} Q_{x_1x_1} & Q_{x_1x_2} & 0 \\ Q_{x_2x_1} & Q_{x_2x_2} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{x_1'x_1'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_x & 0 \\ 0 & Q_{x_1'x_1'} \end{bmatrix} \tag{16}$$

Vektori koordinata tačaka u sistemu (x, y) određuju se istovremeno za zajedničke tačke x_1 i one koje nisu zajedničke x_2, pa je

$$Q_x = N^{-1} = (A^*\,Q^{-1}\,A)^{-1} = \begin{bmatrix} Q_{x_1x_1} & Q_{x_1x_2} \\ Q_{x_1x_2} & Q_{x_2x_2} \end{bmatrix}. \tag{17}$$

Pošto pri transformaciji koordinata vektor x_1' ne utiče na relativne odnose tačaka uspostavljene pri izravnanju u lokalnom koordinatnom sistemu (x, y) može se smatrati konstantnim $x_1' = \text{const}$, pa će (14), glasiti

$$Q_{X'} = B\,Q_x\,B^* = B\,N^{-1}\,B^*, \tag{18}$$

gde je

$$B = \begin{bmatrix} E - C_1\,(C_1^*\,C_1)^{-1}\,C_1^* & 0 \\ -C_2\,(C_1^*\,C_1)^{-1}\,C_1^* & E \end{bmatrix}. \tag{19}$$

Kod nivelmanske mreže, označimo sa n broj zajedničkih tačaka, a sa N broj tačaka koje nisu zajedničke. Tada će (19), glasiti

$$B = \frac{1}{n} \begin{bmatrix} (n-1) & -1 & \ldots & -1 & & & \\ -1 & (n-1) & \ldots & -1 & & & \\ \hdashline -1 & -1 & & (n-1) & & & \\ -1 & -1 & & -1 & n & & \\ -1 & -1 & & -1 & & n & \\ -1 & -1 & & -1 & \ldots\ldots & \ldots\ldots & n \end{bmatrix} \tag{20}$$

jer je

$$C_1^* = [1\ 1\ \ldots\ 1]\ 1,\ n,$$

$$C_2^* = [1\ 1\ \ldots\ 1]\ 1,\ N.$$

U matricama B i B_1 treba brisati kolone koje se odnose na tačke pomoću kojih se definiše koordinatni sistem (date tačke) ili, pak matricu Q_x (17) proširiti sa nula vrstama i kolonama.

Koeficijenti težina koji se odnose na transformirane koordinate tačaka X_i' i Y_i', nalaze se u matrici (18) a ne u matrici (4). Ove formule ne daju iste rezultate, sem u slučaju kada su sve tačke u gradskim mrežama zajedničke tj. imaju koordinate u oba koordinatna sistema. Pokušaćemo da ovu tvrdnju objasnimo.

Matrica C može se predstaviti pomoću matrice C_1 i C_2

$$C = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}, \qquad C^* = [C_1^* \; C_2^*]$$

Kada se ovo uzme u obzir matrica B_2 (6) može se ovako prikazati u opštem obliku.

$$B_2 = \begin{bmatrix} E & \\ & E \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} (C_1^*C_1 + C_2^*C_2)^{-1} [C_1^* \; C_2^*],$$

ili, za nivelmansku mrežu.

$$B_2 = \frac{1}{n+N} \begin{bmatrix} (n+N-1) & -1 & \dots\dots\dots -1 \\ -1 & (n+N-1) & \dots\dots\dots -1 \\ \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & (n+N-1) \end{bmatrix}. \tag{21}$$

Nije teško primetiti da će matrica B biti ista kao matrica B_2, kada se usvoji da su sve tačke zajedničke. Samo u tom slučaju važi $B = B_2$, u svim drugim slučajevima to ne važi $B \neq B_2$. Prema tome, pomoću formule (4) i (18) dobiće se isti rezultati samo pod uslovom ako su sve tačke zajedničke u gradskim mrežama. U protivnom neće se dobiti isti rezultati. U ovakvim slučajevima samo se na osnovu (18) mogu odrediti koeficijenti težina koji se odnose na transformirane koordinate X_i' i Y_i'. Na osnovu njih mogu se odrediti odgovarajuće srednje greške $m_{x_i'}$ i $m_{y_i'}$ (2).

ZAKLJUČAK

1) Pri određivanju srednjih grešaka (2), transformisanih koordinata X_i' i Y_i', potrebno je praviti razliku između zajedničkih i nezajedničkih tačaka. Naime, potrebne koeficijente težina $Q_{X_i'}$, treba uzeti sa glavne dijagonale matrice (18), a ne sa matrice (4).

Pomoću ovih formula dobiće se isti rezultati samo ako su sve tačke u gradskim mrežama zajedničke tj. imaju koordinate u oba koordinatna sistema.

2) Pošto je usvojeno da je vektor $x_i' = \text{const}$, sledi da će se dobiti iste vrednosti srednjih grešaka za ocenjivanje funkcije (dužine, uglove, visinske razlike itd), kada se koriste matrice (3), (4) ili (18).

LITERATURA:

[1] Mihailović, K.: Opšti model transformacije koordinata tačaka, Geodetska služba br. 36, Beograd 1983.

REZIME

U radu je dat kritički osvrt na ocenu tačnosti transformisanih koordinata u gradskim mrežama. Izvedene su formule na osnovu kojih se može izvršiti pravilna ocena tačnosti transformisanih koordinata gradskih geodetskih mreža.

ZUSAMMENFASSUNG

In den Aufsatz ist die kritische Betrachtung der Genauigkeitsbeurteilung von transformierten Koordinaten in den Stadtnetzen dargelegt. Die Formel für die korekte Genauigkeitsbeurteilung von transformierten Koordinaten der Stadtnetzen sind abgeleitet.

Primljeno: 1986—02—18