UDK 528.414.063 1
Originalni znanstevni rad

RAČUNANJE POLIGONOG VLAKA U KOJEM NISU MJERENI SVI ELEMENTI

Nihad KAPETANOVIĆ — Sarajevo*

U poligonom vlaku (sl. 1) uz pretpostavku da su zadane koordinate tačaka $\underline{A}$, $\underline{B}$ $\underline{C}$ i $\underline{D}$ mjere se prelomni i vezni uglovi βa, β_1, β_2, ... B_g, β_h, ... β_l, β_m, ... $\bar{\beta}_p$, $\bar{\beta}_q$, ... $\bar{\beta}_{n-1}$, β_n, β_b, te strane s_1, s_2, ... s_h, ... s_m, ... s_q, ... s_n, s_b, a računaju se koordinate tačaka 1, 2, ... $\underline{G}$, $\underline{H}$, ... $\underline{L}$, $\underline{M}$, ... $\underline{P}$, $\underline{Q}$, ... $\underline{N}$—1, $\underline{N}$.
Ako su izmjereni svi navedeni uglovi i strane postoje tri prekobrojna mjerenja. Ta prekobrojna mjerenja mogu, naprimjer, biti uglovi β_n i β_b i strana s_b, jer se i bez njih mogu sračunati koordinate navedenih traženih tačaka u slijepom vlaku A—N. Razumljivo je da se koordinate istih tačaka mogu sračunati i ako nisu mjerena dva ili samo jedan elemenat. U posljednjem slučaju postoji jedno, odnosno dva prekobrojna mjerenja pa može doći i do izravnanja.

Ukupno može nastupiti devet različitih slučajeva i to:

a) ako u vlaku nije mjeren jedan elemenat:
   slučaj 1: nije mjeren jedan ugao,
   slučaj 2: nije mjerena jedna strana,

b) ako u vlaku nisu mjerena dva elementa:
   slučaj 3: nisu mjereni jedan ugao i jedna strana,
   slučaj 4: nisu mjerene dvije strane,
   slučaj 5: nisu mjerena dva ugla,

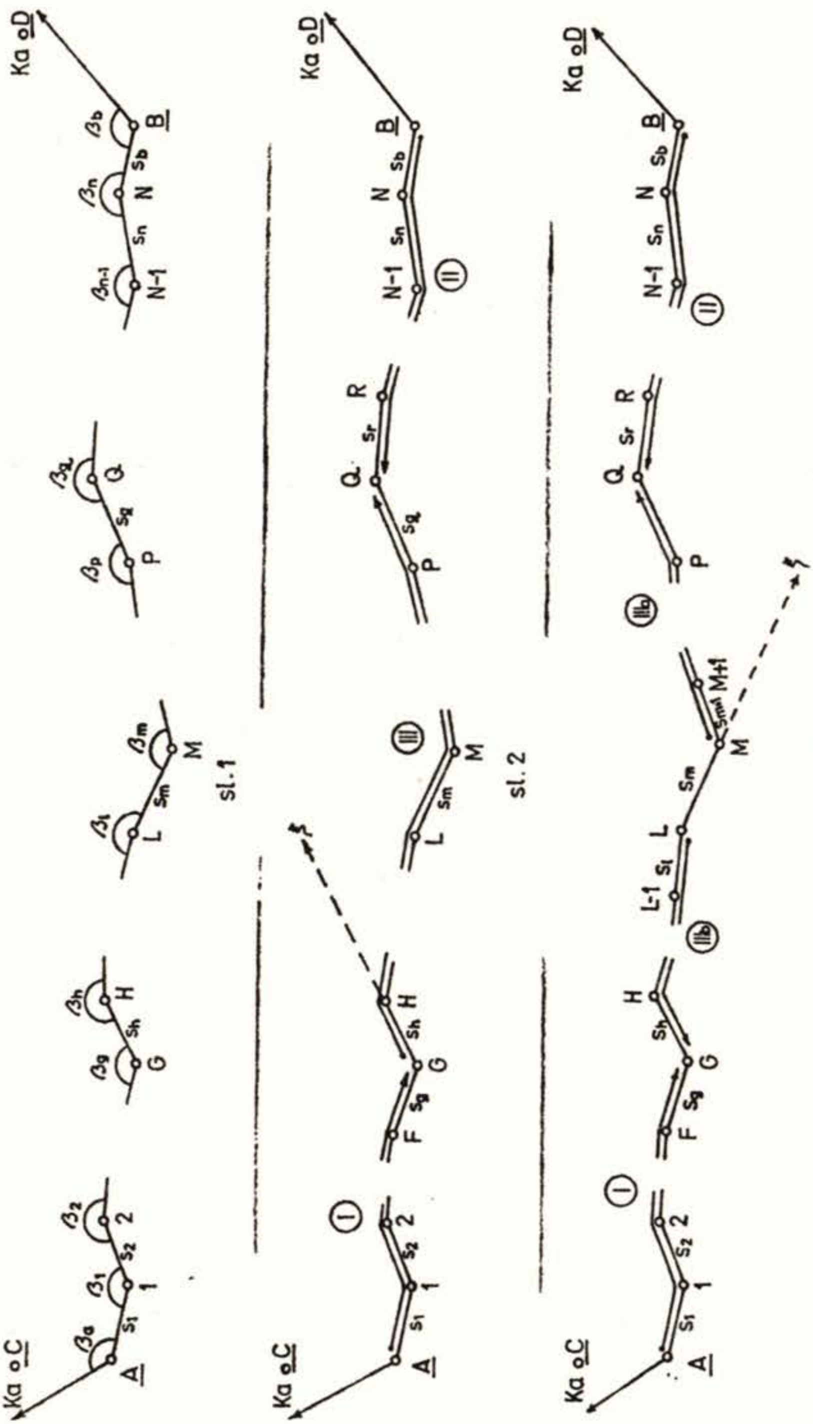
c) ako u vlaku nisu mjerena tri elementa:
   slučaj 6: nije mjeren jedan ugao i dvije strane,
   slučaj 7: nisu mjerena dva ugla i jedna strana,
   slučaj 8: nisu mjerena tri ugla,
   slučaj 9: nisu mjerene tri strane.

U ovom radu prikazano je kako se mogu sračunati koordinate traženih tačaka za prvih osam slučajeva.

SLUČAJ 1: NIJE MJEREN JEDAN UGAO

Neka nije mjeren ugao β_g na tački $\underline{G}$ (sl. 1). Uglovna greška poligonog vlaka, kao što je poznato, računa se po formuli

* Adresa autora: Prof. dr Nihad Kapetanović, Građevinski fakultet Sarajevo, Hasana Brkića 24.



sl. 1

$$f_\beta = \nu_z - \{\nu_p + [\beta] - (n + 2) \cdot 180^\circ\}, \qquad (1)$$

gdje je ν_p smjernjak (direkcioni ugao) strane CA u tački $\underline{C}$, ν_z smjernjak strane BD u tački $\underline{B}$, $[\beta]$ suma svih prelomnih i veznih uglova, a $n + 2$ ukupan broj prelomnih i veznih uglova.* Ako sa (β) označimo sumu mjerenih uglova, onda je

$$[\beta] = (\beta) + \beta_g,$$

pa jedn. (1) glasi:

$$f_\beta = \nu_z - \{\nu_p + (\beta) + \beta_g - (n + 2) \cdot 180^\circ\},$$

odakle je

$$\beta_g + f_\beta = \beta_g' = \nu_z - \{\nu_p + (\beta) - (n + 2) \cdot 180^\circ\}^{**}. \qquad (2)$$

Pomoću mjerenih uglova β i sračunatog ugla β_g' moguće je sračunati smjernjake ν pojedinih strana, a na osnovu ovih i mjerenih dužina koordinatne razlike Δy i Δx po y- i x-osi, te greške po y- i x-osi

$$f_y = y_b - y_a - [\Delta y] = y_b - y_a - [s \sin \nu],$$

$$f_x = x_b - x_a - [\Delta x] = x_b - x_a - [s \cos \nu], \qquad (3)$$

a zatim i koordinate traženih tačaka na poznati način.

U ovom slučaju nema izravnanja po uglovima, nego je čitava uglovna greška pripisana računatom uglu β_g', dok postoji izravnanje po koordinatnim razlikama.

Rješenje je moguće kada nije mjeren ma koji prelomni ili vezni ugao u polignom vlaku.

SLUČAJ 2: NIJE MJERENA JEDNA STRANA

Neka nije mjerena strana $LM = s_m$ (sl. 1). Pošto su izmjereni svi uglovi moguće je izravnanje po uglovima. Pomoću izravnatih uglova mogu se sračunati smjernjaci svih strana, a pomoću ovih i mjerenih strana mogu se sračunati koordinatne razlike Δy i Δx koje se odnose na mjerene strane. Ako sa $(\Delta y) = (s \sin \nu)$ i $(\Delta x) = (s \cos \nu)$ označimo sumu pomenutih koordinatnih razlika, a sa Δy_m i Δx_m koordinatne razlike koje se odnose na stranu $LM = s$ koja nije mjerena, biće s obzirom na jedn. (3)

$$f_y = y_b - y_a - \{(\Delta y) + \Delta y_m\},$$

$$f_x = x_b - x_a - \{(\Delta x) + \Delta x_m\},$$

---

* Uobičajeno je da se u formuli (1) ispred člana $(n + 2) \cdot 180^\circ$ stavlja znak $\pm$. Međutim, sasvim je ispravno staviti i znak —. Naime, obično se smjernjak ν_i^{i+1} računa po formuli $\nu_i^{i+1} = \nu_{i-1}^{i} + \beta_i \pm 180^\circ$. Umjesto po toj, isti smjernjak se može računati i po formuli $\nu_i^{i+1} = \nu_{i-1}^{i} + \beta_i - 180^\circ$ s tim da ukoliko se za smjernjak ν_i^{i+1} dobije negativna vrijednost treba joj dodati 360°.

** U skladu sa prethodnom napomenom, ukoliko se za ugao β_g dobije negativna vrijednost treba joj dodati $k \cdot 360^\circ$, pri čemu je **k** cio pozitivan broj.

odakle je

$$\Delta y_m + f_y = \Delta y'_m = y_b - y_a - (\Delta y), \qquad (4)$$
$$\Delta x_m + f_x = \Delta x'_m = x_b - x_a - (\Delta x).$$

Pomoću koordinatnih razlika $\Delta y'_m$ i $\Delta x'_m$ i smjernjaka ν_l^m sračunatog pomoću mjerenih uglova može se sračunati strana s'_m na dva načina

$$s'_{m_1} = \frac{\Delta y'_m}{\sin \nu_l^m}; \; s'_{m_2} = \frac{\Delta x'_m}{\cos \nu_l^m}. \qquad (5)$$

Te dvije vrijednosti moraju se približno slagati, a za definitivnu vrijednost usvojićemo aritmetičku sredinu, tj. vrijednost

$$s'_m = \frac{s'_{m_1} + s'_{m_2}}{2}. \qquad (6)$$

Na osnovu ovako dobijene strane s'_m i smjernjaka ν_l^m mogu se sračunati nove koordinatne razlike

$$\Delta y''_m = s'_m \sin \nu_l^m; \quad \Delta x''_m = s'_m \cos \nu_l^m. \qquad (4a)$$

Sada je moguće sračunati greške po y- i x-osi po formulama

$$f_y = y_b - y_a - \{(\Delta y) + \Delta y''_m\}; \; f_x = x_b - x_a - \{(\Delta x) + \Delta x''_m\}, \qquad (3a)$$

a zatim i koordinate traženih tačaka na poznati način.

Zahvaljujući činjenici što smo za vrijednost strane s'_m koristili aritmetičku sredinu vrijednosti sračunatih pomoću koordinatnih razlika $\Delta y'_m$ i $\Delta x'_m$ moguće je izravnanje po obje koordinatne razlike iako postoji samo jedno neiskorišteno prekobrojno mjerenje.

Rješenje je moguće kada nije mjerena ma koja strana u vlaku.

SLUČAJ 3: NISU MJERENI JEDAN UGAO I JEDNA STRANA

Neka nisu mjereni ugao β_g na tački G i strana LM = s_m (sl. 1). Ovo je kombinacija slučaja 1 i slučaja 2. Najprije se po formuli (2) sračuna ugao β'_g, te odgovarajući smjernjaci i koordinatne razlike Δy i Δx koje se odnose na mjerene strane, zatim se odrede koordinatne razlike $\Delta y'_m$ i $\Delta x'_m$ po formuli (4), vrijednost strane s'_m koristeći formule (5) i (6), potom koordinatne razlike $\Delta y''_m$ i $\Delta x''_m$ koristeći formule (4a), te greške f_y i f_x po y- i x-osi po formulama (3a) i najzad koordinate traženih tačaka na poznati način.

U ovom slučaju nema izravnanja po uglovima, a zahvaljujući činjenici što za stranu s'_m koristimo aritmetičku sredinu vrijednosti sračunatih pomoću koordinatnih razlika $\Delta y'$ i $\Delta x'$ moguće je izravnanje po obje koordinatne razlike iako postoji samo jedno prekobrojno mjerenje.

Rješenje je moguće kada nije mjeren ma koji ugao i ma koja strana u vlaku.

SLUČAJ 4: NISU MJERENE DVIJE STRANE

Neka nisu mjerene strane LM = s_m i PQ = s_q (sl. 1). Pošto su mjereni svi uglovi moguće je izravnanje po uglovima. Pomoću izravnatih uglova moguće je sračunati smjernjake svih strana, a pomoću ovih i mjerenih strana odgovarajuće koordinatne razlike Δy i Δx koje se odnose na mjerene strane. Ako sa $/\Delta y/$ i $/\Delta x/$ označimo sumu pomenutih koordinatnih razlika, a sa Δy_m i Δy_q odnosno Δx_m i Δx_q koordinatne razlike koje se odnose na strane s_m i s_q biće, s obzirom na jedn. (3)

$$f_y = y_b - y_a - \{/\Delta y/ + \Delta y_m + \Delta y_q\},$$
$$f_x = x_b - x_a - \{/\Delta x/ + \Delta x_m + \Delta x_q\},$$

odakle je

$$\Delta y_m + \Delta y_q + f_y = \Delta y'_m + \Delta y'_q = y_b - y_a - /\Delta y/,$$
$$\Delta x_m + \Delta x_q + f_x = \Delta x'_m + \Delta x'_q = x_b - x_a - /\Delta x/. \tag{7}$$

S druge strane važe relacije

$$\operatorname{tg} \nu_l^m = \frac{\Delta y'_m}{\Delta x'_m}; \quad \operatorname{tg} \nu_p^q = \frac{\Delta y'_q}{\Delta x'_q}. \tag{8}$$

Zbog kratkoće u pisanju uvedimo oznake

$$y_b - y_a - /\Delta y/ = k_1; \; x_b - x_a - /\Delta x/ = k_2;$$
$$\operatorname{tg} \nu_l^m = k_3; \operatorname{tg} \nu_p^q = k_4. \tag{9}$$

Uz ove oznake glasiće jed. (7) i (8)

$$\Delta y'_m + \Delta y_q = k_1; \; \Delta x'_m + \Delta x'_q = k_2; \tag{10}$$

$$\Delta y'_m = k_3 \, \Delta x'_m; \; \Delta y'_q = k_4 \, \Delta x'_q. \tag{11}$$

U prvu od jedn. (10) uvrstimo jedn. (11) pa imamo

$$k_3 \, \Delta x'_m + k_4 \, \Delta x'_q = k_1,$$

ako u posljednju jedn. uvrstimo vrijednost za $\Delta x'_q$ iz jedn. (10), tj.

$$\Delta x'_q = k_2 - \Delta x'_m \tag{12}$$

imaćemo

$$k_3 \, \Delta x'_m + k_4 (k_2 - \Delta x'_m) = k_1,$$

odakle je

$$\Delta x'_m = \frac{k_1 - k_2 k_4}{k_3 - k_4}. \tag{13}$$

Nakon izračunavanja $\Delta x'_m$ moguće je sračunati $\Delta x'_q$ po formuli (12), a zatim $\Delta y'_m$ i $\Delta y'_q$ po formulama (11), te sračunati koordinate traženih tačaka na poznati način.

U ovom slučaju nema izravnanja po koordinatnim razlikama.

Rješenje je moguće kada nisu mjerene ma koje dvije strane u poligonom vlaku.

Da ne bi došlo do grešaka usljed zaokruživanja brojeva pri računanju, treba vrijednosti k_1 i k_2 sračunati na veći broj decimala od onoga na koji se zaokružuju koordinatne razlike $\Delta y'_m$, $\Delta x'_m$, $\Delta y'_q$ i $\Delta x'_q$. Isto tako vrijednosti k_3 i k_4 treba sračunati na veći broj decimala.

SLUČAJ 5: NISU MJERENA DVA UGLA

Neka nisu mjereni uglovi β_g i β_q na tačkama $\underline{G}$ i $\underline{Q}$ (sl. 1). Dio vlaka od tačke $\underline{A}$ do tačke $\underline{G}$ označimo sa I, dio vlaka od tačke $\overline{B}$ do tačke $\underline{Q}$ sa II, a dio vlaka od tačke $\overline{G}$ do tačke $\underline{Q}$ označimo sa III (sl. 2). U slijepom vlaku I pomoću mjernih uglova $\beta_a, \beta_1, \beta_2, \dots \beta_f$ i mjerenih strana $s_1, s_2 \dots s_g$ mogu se sračunati odgovarajuće koordinatne razlike, njihove sume $[\Delta y]_I$ i $[\Delta x]_I$, te koordinate tačaka $\underline{G}$

$$y_q = y_a + [\Delta y]_I; \qquad x_q = x_a + [\Delta x]_I. \tag{14}$$

Slično se u vlaku II pomoću mjerenih uglova $(360^\circ - \beta_b)$, $(360^\circ - \beta_n)$, $(360^\circ - \beta_{n-1})$, . . . $(360^\circ - \beta_r)$ i mjerenih strana $s_b, s_n, \dots s_r$ mogu sračunati odgovarajuće koordinate razlike, njihove sume $[\Delta y]_{II}$ i $[\Delta x]_{II}$ te koordinate tačke $\underline{Q}$

$$y_q = y_b + [\Delta y]_{II}; \; x_q = x_b + [\Delta x]_{II}. \tag{14a}$$

Kroz stranu $\overline{GH} = s_h$ postavimo ξ-os pomoćnog pravouglog koordinatnog sistema ξ, η, tako da je njegovo ishodište u tački G(O,O), a pozitivni smjer ξ-osi usmjeren prema tački $\underline{H}$ (sl. 2). Na taj način je u pomoćnom sistemu smjernjak strane GH u tački $\underline{G}\,\mu_g^h = 0^\circ$. Pomoću mjerenih uglova $\beta_h, \dots \beta_l, \beta_m, \dots \beta_p$ i mjerenih strana $s_h, \dots s_m, \dots s_q$ mogu se, u slijepom vlaku III, sračunati odgovarajuće koordinatne razlike, njihove sume $[\Delta\eta]_{III}$ i $[\Delta\xi]_{III}$. te koordinate tačaka $\underline{Q}$ u koordinatnom sistemu ξ, η

$$\eta_q = [\Delta\eta]_{III}; \; \xi_q = [\Delta\eta]_{III}. \tag{15}$$

Ugao zaokreta između pomoćnog koordinatnog sistema ξ, η i sistema x, y može se naći po formuli

$$\varepsilon = \mu_g^q - \nu_g^q = \operatorname{arc\,tg} \frac{\eta_q}{\xi_q} - \operatorname{arc\,tg} \frac{y_q - y_g}{x_q - x_g}. \tag{16}$$

Sada je moguće pojedine koordinatne razlike $\Delta\eta$ i $\Delta\xi$ u vlaku III iz sistema ξ, η transformisati u sistem x, y po poznatim formulama

$$\Delta y = \Delta\eta \cos\varepsilon - \Delta\xi \sin\varepsilon; \quad \Delta x = \Delta\eta \sin\varepsilon + \Delta\xi \cos\varepsilon \tag{17}$$

te sračunati sume $[\Delta y]_{III}$ i $[\Delta x]_{III}$.

Postojeće jedno prekobrojno mjerenje iskoristićemo tako što ćemo postaviti uslov da dužina između krajnjih tačaka $\underline{A}$ i $\underline{B}$ poligonog vlaka sračunata pomoću koordinatnih razlika bude jednaka dužini sračunatoj iz koordinata, tj. postavićemo uslov

$$r\,d' = d \tag{18}$$

pri čemu su

$$d = \sqrt{(y_b - y_a)^2 + (x_b - x_a)^2}, \tag{19}$$

$$d' = \sqrt{([\Delta y]_I + [\Delta y]_{III} - [\Delta y]_{II})^2 + ([\Delta x]_I + [\Delta x]_{III} - [\Delta x]_{II})^2}.$$

Koeficijent razmjere kojim treba pomnožiti sve dužine ili, što je isto, sve sračunate koordinatne razlike sračunaćemo iz jedn. (18) tj. $r = d/d'$. Razumljivo je da taj koeficijent mora imati vrijednost blisku jedinici.

Nakon iznalaženja koeficijenta razmjere mogu se sračunati sve definitivne koordinatne razlike

$$\Delta y' = r\,\Delta y \quad \text{i} \quad \Delta x' = r\,\Delta x$$

kao i odgovarajuće sume.

Za kontrolu moraju biti zadovoljene relacije

$$\begin{aligned} [\Delta y']_I + [\Delta y']_{III} - [\Delta y']_{II} &= y_b - y_a, \\ [\Delta x']_I + [\Delta x']_{III} - [\Delta x']_{II} &= x_b - x_a, \end{aligned} \tag{20}$$

poslije čega se računaju koordinate traženih tačaka na poznati način. Prilikom računanja koordinata treba voditi računa da su koordinatne razlike u vlaku II sračunate sa suprotnim znakom, pošto je vlak II sračunat u obrnutom smjeru od vlakova I i III.

U ovom slučaju nema izravnanja po uglovima, dok postoji izravnanje po dužini (jedan uslov).

Rješenje je moguće kada nisu mjerena bilo koja dva ugla u poligonom vlaku, pa naravno i u slučaju kada nisu mjereni uglovi β_a i β_b na datim tačkama $\underline{A}$ i $\underline{B}$. Tada iščezavaju vlakovi I i II, pošto je $P \equiv A$ i $Q \equiv B$, pa umjesto opštih formula (19) i (20) važe formule

$$d' = \sqrt{[\Delta y]^2_{III} + [\Delta x]^2_{III}} \tag{19a}$$

$$[\Delta y']_{III} = y_b - y_a; \; [\Delta x']_{III} = x_b - x_a \tag{20a}$$

Rješenje za ovaj specijalni slučaj dao je A. Zlatković u [2] na drugačiji način.

Drugi specijalni slučaj nastaje kada nisu mjereni uglovi na dvije susjedne tačke, npr. P i Q (sl. 2). Tada se vlak III reducira na stranu PQ, pošto se koordinate tačke P računaju u vlaku I, a koordinate susjedne tačke Q u vlaku II. U tom slučaju je $\Delta\eta_q = 0$, $\Delta\xi_q = s_q$, koordinatne razlike Δy_q i Δx_q se računaju po formulama (17) dok u formulama (19) i (20) treba zamijeniti $[\Delta y]_{III} = \Delta y_q$, $[\Delta x]_{III} = \Delta x_q$ i $[\Delta y']_{III} = \Delta y'_q$, $[\Delta x']_{III} = \Delta x'_q$.

SLUČAJ 6: NIJE MJEREN JEDAN UGAO I DVIJE STRANE

Neka nije mjeren ugao β_g u tački G i strane LM = s_m i PQ = s_q (sl. 1). Ovo je kombinacija slučaja 1 i slučaja 4. Najprije se po formuli (2) sračuna vrijednost ugla β'_g. Pomoću izmjerenih uglova β i računskog ugla β'_g sračunamo smjernjake svih strana, a pomoću ovih i mjerenih strana sračunamo koordinatne razlike Δy i Δx, te odgovarajuće sume $/\Delta y/$ i $/\Delta x/$. Daljnji postupak teče kao u slučaju 4, što znači da se po jedn. (9) sračunaju vrijednosti veličina k_1, k_2, k_3 i k_4, potom po jedn. (13) i (12) veličine $\Delta x'_m$ i $\Delta x'_q$ te veličine $\Delta y'_m$ i $\Delta y'_q$ po jedn. (11) i najzad koordinate traženih tačaka na poznati način.

U ovom slučaju ne postoji izravnanje ni po uglovima ni po dužinama.

Rješenje je moguće kada nije mjeren ma koji ugao i ma koje dvije strane u vlaku.

SLUČAJ 7: NISU MJERENA DVA UGLA I JEDNA STRANA

Nađeno je rješenje za slučaj kada se strana koja nije mjerena nalazi u dijelu vlaka koji spaja tačke na kojima nisu mjereni uglovi.

Neka nisu mjereni uglovi β_g i β_q na tačkama G i Q i strane LM = s_m (sl. 3). Na isti način kao i u slučaju 5 sračunamo koordinate G i Q u slijepim vlakovima I i II. Na osnovu koordinata tih tačaka moguće je sračunati dužinu GQ po poznatoj formuli.

$$\overline{GQ} = \sqrt{(y_q - y_g)^2 + (x_q - x_g)^2}. \tag{21}$$

Pomoćni koordinatni sistem ξ, η postavimo tako da mu je ishodište u tački L (0,0) a pozitivni smjer osi ξ usmjerenn prema tački M (sl. 3). Na taj način je u tom pomoćnom koordinatnom sistemu smjernjak strane LM u tački L $\mu_l^m = 0°$. Očigledno je

$$\Delta\eta_m = \eta_m = 0 \quad \text{i} \quad \Delta\xi_m = \xi_m = s_m. \tag{22}$$

U vlaku IIIa, koji se pruža od tačke M do tačke Q (sl. 3), pomoću mjerenih uglova β_m, β_{m+1}, ... β_p mogu se sračunati smjernjaci μ_m^{m+1}, ... μ_q^q a pomoću ovih i mjerenih strana s_{m+1}, ... s_q mogu se sračunati odgovarajuće koordinatne razlike $\Delta\eta$ i $\Delta\xi$, kao i njihove sume $[\Delta\eta]_{IIIa}$ i $[\Delta\xi]_{IIIa}$. Slično se u vlaku IIIb, koji se pruža od tačke L do tačke G (sl. 3), pomoću mjerenih uglova $(360° - \beta_l)$, $(360° - \beta_{l-1})$, ... $(360° - \beta_h)$ mogu sračunati smjernjaci μ_l^{l-1},...μ_h^g, a pomoću ovih i mjerenih strana s_l, ... s_h mogu se sračunati odgovarajuće koordinatne razlike $\Delta\eta$ i $\Delta\xi$, kao i njihove sume $[\Delta\eta]_{IIIb}$ i $[\Delta\xi]_{IIIb}$.

Dužina $\overline{GQ}$ u sistemu ξ, η je prema izloženom

$$\overline{GQ} = \sqrt{(\eta_m + [\Delta\eta]_{IIIa} - [\Delta\eta]_{IIIb})^2 + (\xi_m + [\Delta\xi]_{IIIa} - [\Delta\xi]_{IIIb})^2},$$

odnosno, ako uvažimo jedn. (22) i uvedemo oznake

$$[\Delta\eta]_{IIIa} - [\Delta\eta]_{IIIb} = (\Delta\eta); [\Delta\xi]_{IIIa} - [\Delta\xi]_{IIIb} = (\Delta\xi), \tag{23}$$

$$\overline{GQ} = \sqrt{(\Delta\eta)^2 + \{s_m + (\Delta\xi)\}^2}. \tag{24}$$

Pošto je vrijednost dužine nezavisna od izbora koordinatnog sistema, možemo izjednačiti kvadrate desnih strana izraza (24) i (21) pa imamo

$$(\Delta\eta)^2 + (\Delta\xi)^2 + 2(\Delta\xi)s_m + s_m^2 = (y_q - y_g)^2 + (x_q - x_g)^2,$$

odnosno

$$s_m^2 + 2(\Delta\xi)s_m - k_5 = 0, \tag{25}$$

pri čemu je, radi kratkoće u pisanju, uvedena oznaka

$$k_5 = (y_q - y_g)^2 + (x_q - x_g)^2 - (\Delta\eta)^2 - (\Delta\xi)^2. \tag{26}$$

Rješenja jedn. (25) su

$$s_m = -(\Delta\xi) \pm \sqrt{(\Delta\xi)^2 + k_5}. \tag{27}$$

Pošto je $k_5 > 0$ (veća je cijela dužina nego njen dio), to je

$$|\sqrt{(\Delta\xi)^2 + k_5}| > |(\Delta\xi)|.$$

S obzirom da je s_m dužina (pa mora biti pozitivna) ispred korijena u jedn. (27) može biti samo znak + /ako je $-(\Delta\xi) < 0$ drugi član mora biti > 0 da bi bilo $s_m > 0$; ako je $-(\Delta\xi) > 0$ opet drugi član mora biti > 0 da bi bilo $s_m > 0$/. Prema tome dužina s_m, a samim tim, s obzirom na jedn. (22), i $\Delta\xi_m$ odrediće se iz izraza

$$s_m = -(\Delta\xi) + \sqrt{(\Delta\xi)^2 + k_5}. \tag{27a}$$

Koordinate tačke Q u koordinatnom sistemu ξ, η su

$$\eta_q = \eta_l + \Delta\eta_m + [\Delta\eta]_{IIIa}; \ \xi_q = \xi_l + \Delta\xi_m + [\Delta\xi]_{IIIa}$$

i s obzirom da je $\mu_l = \xi_l = \Delta\eta_m = 0$

$$\eta_q = [\Delta\eta]_{IIIa}; \ \xi_q = \Delta\xi_m + [\Delta\xi]_{IIIa}. \tag{28}$$

Koordinate tačke **G** u istom koordinatnom sistemu su

$$\eta_g = [\Delta \eta]_{IIIb}; \ \xi_g = [\Delta \xi]_{IIIb}. \tag{29}$$

Ugao zaokreta između pomoćnog ξ, η i osnovnog koordinatnog sistema x, y je

$$\varepsilon = \mu_g^q - \nu_g^q = \operatorname{arc\,tg} \frac{\eta_q - \eta_g}{\xi_q - \xi_g} - \operatorname{arc\,tg} \frac{y_q - y_g}{x_q - x_g},$$

odnosno uvažavajući jedn. (28), (29) i (23)

$$\varepsilon = \operatorname{arc\,tg} \frac{(\Delta \eta)}{\Delta \xi_m + (\Delta \xi)} - \operatorname{arc\,tg} \frac{y_q - y_g}{x_q - x_g}. \tag{30}$$

Sada je moguće pojedine koordinatne razlike $\Delta\eta$ i $\Delta\xi$ u vlakovima IIIa i IIIb, kao i koordinatnu razliku $\Delta\xi_m$, transformirati u koordinatni sistem x, y po formulama (17).

Iz sl. 3 se vidi da je

$$y_b - y_a = [\Delta y]_I + [\Delta y]_{IIIa} - [\Delta y]_{IIIb} - [\Delta y]_{II},$$

$$x_b - x_a = [\Delta x]_I + [\Delta x_m] + [\Delta x]_{IIIa} - [\Delta x]_{IIIb} - [\Delta y]_{III}, \tag{31}$$

pa je moguće sračunati koordinate svih traženih tačaka na poznati način. Prilikom računanja koordinata treba voditi računa da su koordinatne razlike u vlakovima II i IIIb sračunate sa suprotnim znakom, pošto su ta dva vlaka sračunata u obrnutom smjeru od vlakova I i IIIa i koordinatne razlike Δx_m.

U ovom slučaju nema izravnanja ni po uglovima ni po koordinatnim razlikama.

SLUČAJ 8: NISU MJERENA TRI UGLA

Neka nisu mjereni uglovi β_g, β_l i β_q na tačkama $\underline{G}$, $\underline{L}$ i $\underline{Q}$ (sl. 4). U slijepim vlakovima I i II sračunamo koordinate tačaka $\underline{G}$ i $\underline{Q}$ kao u slučaju 5, a zatim smjernjak i dužinu strane GQ po formulama

$$\nu_g^q = \operatorname{arc\,tg} \frac{y_q - y_g}{x_q - x_g},$$

$$\overline{GQ} = \frac{y_q - y_g}{\sin \nu_g^q} = \frac{x_q - x_g}{\cos \nu_g^q} = \sqrt{(y_q - y_g)^2 + (x_q - x_g)^2}. \tag{32}$$

Kroz stranu $\overline{GH}$ postavimo ξ-os pomoćnog koordinatnog sistema ξ, η tako da je njegovo ishodište u tački G(0,0), a pozitivni smjer ξ-osi usmjeren prema tački $\underline{H}$ (sl. 4). Pomoću mjerenih uglova i strana u slijepom vlaku IIIc sračunamo odgovarajuće koordinatne razlike, te koordinate tačke $\underline{L}$ u pomoćnom koordinatnom sistemu ξ, η

$$\eta_L = [\Delta\eta]_{IIIc}; \; \xi_L = [\Delta\xi]_{IIIc}.$$

Zatim sračunamo smjernjak i dužinu strane $\overline{GL}$ u sistemu ξ, η

$$\mu_g^l = \text{arc tg} \frac{[\Delta\eta]_{IIIc}}{[\Delta\xi]_{IIIc}}$$

$$\overline{GL} = \frac{[\Delta\eta]_{IIIc}}{\sin\mu_g^l} = \frac{[\Delta\xi]_{IIIc}}{\cos\mu_g^l} = \sqrt{[\Delta\eta]_{IIIc}^2 + [\Delta\xi]_{IIIc}^2}. \tag{33}$$

Kroz stranu $\overline{QP}$ postavimo ξ'-os pomoćnog koordinatnog sistema ξ', η' tako da je njegovo ishodište u tački Q(0,0), a pozitivni smjer ξ'-osi usmjeren prema tački P (sl. 4). **Pomoću mjerenih uglova i strana u slijepom vlaku IIId sračunamo odgovarajuće koordinatne razlike, te koordinate tačke L u pomoćnom koordinatnom** sistemu ξ', η'

$$\eta'_L = [\Delta\eta']_{IIId}; \; \xi'_L = [\Delta\xi']_{IIId}.$$

Zatim sračunamo smjernjak i dužinu strane $\overline{QL}$ u sistemu ξ', η'

$$\mu'^l_g = \text{arc tg} \frac{[\Delta\eta']_{IIId}}{[\Delta\xi']_{IIId}}, \tag{34}$$

$$\overline{QL} = \frac{[\Delta\eta']_{IIId}}{\sin\mu'^l_q} = \frac{[\Delta\xi']_{IIId}}{\cos\mu'^l_q} = \sqrt{[\Delta\eta']_{IIId}^2 + [\Delta\xi']_{IIId}^2}.$$

U trokutu GLQ (sl. 5a i b) poznate su sve tri dužine $\overline{GQ}$ = c /jedn. (32)/, $\overline{GL}$ = = b /jedn. (33)/ i $\overline{QL}$ = a /jedn. (34)/, te je po kosinusnoj teoremi moguće sračunati uglove α i φ

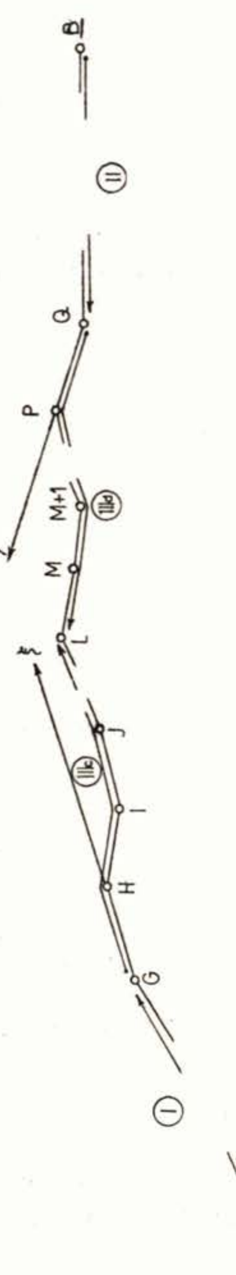
$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}; \quad \cos\varphi = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}. \tag{35}$$

Daljnji postupak zavisi od toga da li se tačka **L** nalazi s desne ili s lijeve strane pravca $\overline{GQ}$. To treba utvrditi sa karte ili skice, pošto postoje dva rješenja.

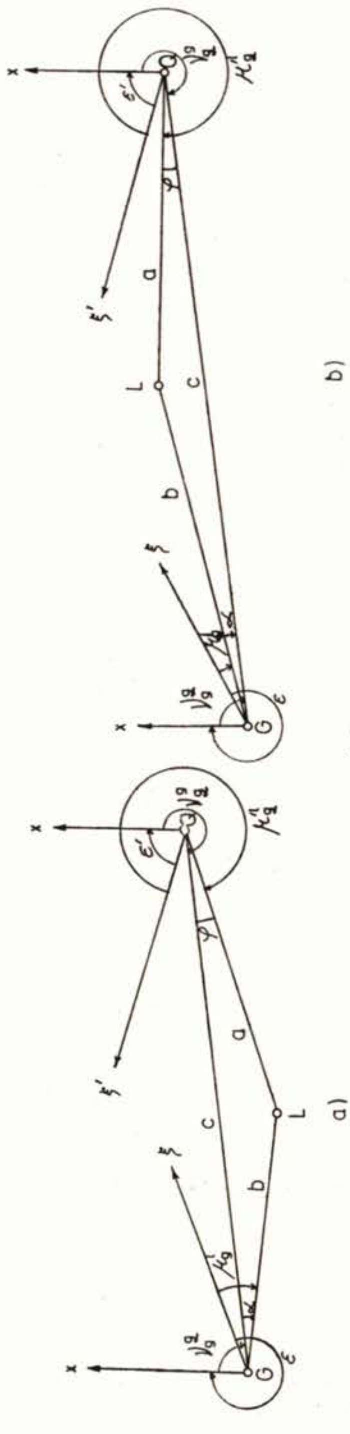
U slučaju da se tačka L nalazi s desne strane pravca GQ važe slijedeće formule (sl. 5a)

$$\varepsilon + \nu_g^q = \mu_g^l - \alpha; \; \nu_q^g - \varphi = \mu'^l_q - \varepsilon',$$

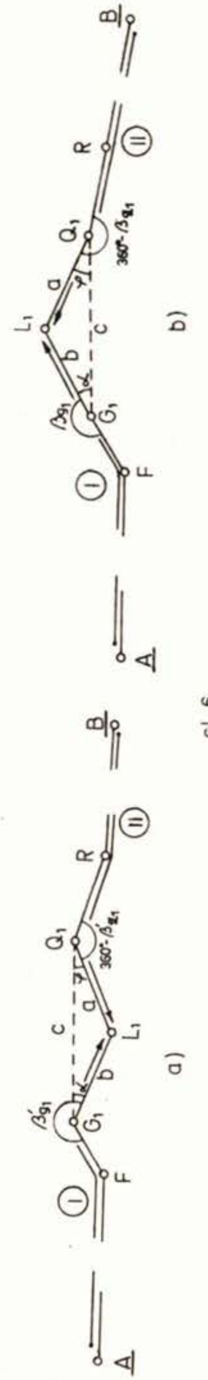
odakle se za ugao zaokreta ε između pomoćnog koordinatnog sistema ξ, η i sistema x, y, odnosno za ugao zaokreta ε' između pomoćnog koordinatnog sistema ξ', η' i sistema x, y dobija



sl. 4



sl. 5



sl. 6

$$\varepsilon = \mu_g^l - \nu_g^q - \alpha; \; \varepsilon' = \mu_q^{\prime l} - \nu_q^g + \varphi. \tag{36}$$

Ako se tačka L nalazi s lijeve strane pravca $\overline{GQ}$ važe formule (sl. 5b)

$$\varepsilon + \nu_g^q = \mu_g^l + \alpha; \; \nu_q^g + \varphi = \mu_g^{\prime l} - \varepsilon,$$

odakle su odgovarajući uglovi zaokreta

$$\varepsilon = \mu_g^l - \nu_g^q + \alpha; \; \varepsilon' = \mu_q^{\prime l} - \nu_q^g - \varphi. \tag{37}$$

Kada se po formulama (36) ili (37) sračunaju uglovi zaokreta ε i ε' treba koordinatne razlike u vlaku IIIc iz pomoćnog koordinatnog sistema ξ, η transformisati u sistem x, y /po formulama (17)/, te sračunati koordinate tačaka H, I, J, . . . L u sistemu x, y. Slično, treba koordinatne razlike u vlaku IIId iz pomoćnog koordinatnog sistema ξ', η' transformisati u sistem x, y, te sračunati koordinate tačaka P, . . . M+1, M, L. Koordinate tačke L dobiju se u vlakovima IIIc i IIId što služi kao kontrola računanja.

Ovaj slučaj rješiv je kada nisu mjerena ma koja tri ugla u poligonom vlaku. Razumljivo je da nema nikakvog izravnanja.

U specijalnom slučaju, kada uglovi nisu mjereni na tri uzastopne tačke G_1, L_1 i Q_1 (sl. 6a i b) iščezavaju vlakovi IIIc i IIId. Tada se koordinte tačke L_1 mogu sračunati u vlakovima I i II, pošto se potrebni prelomni uglovi β'_{g1} (u vlaku I) i $360° - \beta$ (u vlaku II) na tačkama G_1 i Q_1 nalaze po formulama

$$\beta'_{g_1} = \nu_{g_1}^{q_1} - \nu_{g_1}^{t} \pm \alpha; \; 360^\circ - \beta'{}'_{q_1} = \nu_{q_1}^{g_1} - \nu_{q_1}^{r} \mp \varphi, \tag{38}$$

pri čemu gornji znak ispred α i φ vrijedi za slučaj kada se tačka L_1 nalazi s desne (sl. 6a), a donji za slučaj kada se tačka L_1 nalazi s lijeve (sl. 6b) strane pravca G_1Q_1.

Slično, kada uglovi nisu mjereni na dvije susjedne tačke G i L, tj. nema tačaka H, I, J . . ., odnosno kada uglovi nisu mjereni na dvije susjedne tačke Q i L, tj. nema tačaka P, . . . M+1 (sl. 4) iščezava vlak IIIc odnosno IIId. Tada se koordinate tačke L računaju u vlakovima I i IIId, odnosno II i IIIc.

Naravno, treba nastojati da se u poligonom vlaku izmjere svi elementi, pošto se sa smanjenjem broja prekobrojnih mjerenja smanjuje tačnost sračunatih koordinata, a u slučaju da je izmjeren samo neophodan broj elemenata izostaje mogućnost kontrole mjerenja i računanja. Pošto se u praksi, a naročito kod mjerenja za potrebe inženjerske geodezije, nerijetko dešava da nije moguće izmjeriti sve elemente u poligonom vlaku smatralo se korisnim iznijeti ova rješenja.

LITERATURA:

[1] Mihailović, K.: Geodezija II, II. deo, Naučna knjiga, Beograd 1978.

[2] Zlatković, A.: Računanje poligonskog vlaka bez veznih uglova na datim tačkama, Geodetska služba 1977, 18, 34—38.

SAŽETAK

Pošto u poligonom vlaku postoje tri prekobrojna mjerenja, on se može sračunati i ako nisu izmjereni svi elementi. Izložena su rješenja za osam različitih slučajeva kada nisu izmjereni jedan, dva ili tri elementa. Izravnanje je moguće u pet slučajeva.

ABSTRACT

Since in the survey traverse exist three superflous measurements, the same can be calculated although all elements are not measured. Solutions are exposed for eight various cases when one, two or three elements are not measured. The adjustment is possible in five cases.

Primljeno: 1986—03—27