UDK 528.14
Stručni rad

SREDNJE KVADRATNO ODSTUPANJE JEDINICE TEŽINE

Abdulah MUMINAGIĆ — Sarajevo*

U našoj stručnoj javnosti već dosta dugo se vodi po mom mišljenju nepotrebna polemika o dimenziji srednje kvadratne »greške« jedinice težine. Pri tome su, na našu sramotu, traženi i arbitri sa strane, a pravi se odgovor ipak nije dobio. Zapravo su i ti strani autoriteti bili neodređeni, pa su kod nas i dalje ostale stare nedoumice i pogrešna shvatanja.

Osim toga se razlikujemo i po poimanju značenja »greške« jedinice težine. Jedni tvrde da ona karakteriše »tačnost mjerenja« i da na nju ne utiče geometrija mreže, dok drugi misle da na nju utiče geometrija mreže.

Radi razjašnjenja ovih pitanja uzećemo prvo izravnanje mreže triangulacije po parametarskom (posrednom) načinu, jer je ono blisko svim geodetskim stručnjacima. Kao kriterijum za zaključke biće nam oprobana metoda za provjeru formula i izvoda — dimenzije veličina koje dobijamo izravnanjem i njegovom ocjenom. Radi jednostavnosti usvojićemo da su mjerenja iste tačnosti, a težine se na kraju mogu jednostavno uključiti.

Uzmimo, prvo, formulu za računanje odstupnja (greške) jedinice težine:

$$m_0 = \pm\sqrt{\frac{\Sigma v_i^2}{n - r}}, \tag{1}$$

u kojoj je:

n — broj mjerenja — bez dimenzija,

r — broj traženih veličina (parametara) — bez dimenzija,

v — popravke mjerenja, kako bi ona odgovarala *izravnatim* koordinatama tačaka — parametrima; računa se po formuli:

$$v_i = a_i\,\delta x_1 + b_i\,\delta y_1 + c_i\,\delta x_2 + \ldots + f_i \tag{2}$$

u njoj su a, b, c ... prvi izvodi funkcije direkcionog ugla po koordinatama:

$$a = \frac{\partial V}{\partial x_1}, \quad b = \frac{\partial V}{\partial y_1}, \quad c = \frac{\partial V}{\partial x_2} \ldots \tag{3}$$

* Adresa autora: Prof. dr Abdulah Muminagić, Grahovska 1, Sarajevo.

geometrijsko im je značenje — promjena direkcionog ugla ν kada se data koordinata promijeni za jedinicu dužine; prema tome su direktna posljedica geometrije mreže; njihove dimenzije su U/L, ako sa U obilježimo dimenziju uglovnih mjerenja, a sa L — dužinskih; δx i δy onda imaju dimenziju L; f je u formuli (2) razlika izmjerene (φ) i približne (η) vrijednosti direkcionog ugla, pa je njegova dimenzija U; kada u (2) uvedemo rečene dimenzije za dimenziju v dobijemo:

$$\dim(v) = \frac{U}{L} L + \frac{U}{L} L + \ldots + U = U.$$

kao što i treba biti.

Kada ovo uvrstimo u formulu (1) za dimenziju m_0 dobijemo:

$$\dim(m_0) = \sqrt{\frac{U^2}{1}} = U.$$

Prema tome, srednja kvadratna »greška« jedinice težine ima dimenziju i to općenito onu u kojoj su izražena mjerenja. Kad imamo »grešku« jedinice težine, srednje kvadratne greške parametara se računaju po formuli:

$$m_x = m_0 \sqrt{Q_x}, \tag{4}$$

u kojoj je $Q_x = \frac{1}{p_x}$ — obrnuta težina. Za posljednju r-tu nepoznatu je $Q_{x_r} = \frac{1}{[kk \cdot (r-1)]}$. Kako koeficijenti a, b, c, . . ., k u (2) na osnovi (3) imaju dimenziju $\frac{U}{L}$, onda će Q_x imati dimenziju $\left(\frac{1}{\frac{U}{L}}\right)^2 = \frac{L^2}{U}$.

Iz inverzne matrice normalnih jednačina je očigledno da je ista dimenzija i težinskih koeficjenata svih ostalih nepoznatih u datom sistemu, pa su njihove dimenzije:

$$\dim(m_x) = U \sqrt{\left(\frac{L}{U}\right)^2} = L, \tag{5}$$

što i treba da bude — greške koordinate imaju dimenziju dužine.

Šta je onda greška jedinice težine, a šta koeficijent težine? Možemo odmah reći da je srednja svadratna greška jedinice težine geometrijska sredina iz popravaka svih mjerenja nakon izravnanja mreže (ili nekog drugog sistema).

Da bismo to dokazali razmotrimo dimenzionalni dio formule (1) ΣV^2. Ova veličina je kvadrat rezultante djelovanja svih η popravaka. Naime, idući postepeno: $v_1^2 + v_2^2 = h_1^2$ je kvardrat hipotenuze pravouglog trougla u kojem su katete popravke v_1 i v_2. Kada tome dodamo kvadrat treće popravke biće: $h_1^2 + v_3^2 = h_2^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$. Dalje, dodavanjem kvadrata četvrte popravke imamo: $h_2^2 + v_4^2 = h_3^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2$. Itd — sve do — te popravke

Na kraju je

$$\Sigma v^2 = h_{n-1}^2 = \qquad (6)$$

ili kvadrat rezultante djelovanja svih popravaka.
Ako se uvedu težine, može se staviti da je

$$\Sigma p v^2 = \Sigma (\sqrt{p}\, v)^2,$$

pa dolazimo do istog rezultata. Samo se pojedine popravke množe sa korenom iz težine, koja može da ih uveća ili smanji u zavisnosti od toga da li su težine veće ili manje od jedan. (Znamo da se množenjem na koren iz težine mjerenja svode na jednaku tačnost).

Kada se ΣV^2 podijeli sa n—r, dobije se srednja vrijednost kvadrata rezultante. A kada se iz nje izvadi kvadratni koren dobije se srednja kvadratna »greška« (bolje — popravka) jedinice težine m_0. Time je dokazana iznijeta tvrdnja. Zašto se ta veličina naziva »greškom« jedinice težine pokazano je u svim udžbenicima računa izravnanja.

Ja bih imao samo primjedbu da to uopšte nije nikakva greška. Ona je mjera neslaganja korišćenih mjerenja sa izravnatim vrijednostima parametara. Kako ona, u vezi sa formulama (1) i (2), povezuje mjerenja sa parametrima može se reći da karakteriše pogrešnost oba ta sistema veličina.

Da zaključimo:

1. Greška jedinice težine ima dimenziju.
2. Ona ne karakteriše samo pogrešnost mjerenja, nego zavisi i od geometrije mreže (odnosno izravnavanog sistema).
3. Težine izravnatih parametara imaju dimenziju.

Sve ovo se odnosi i na izravnanje po metodi uslova, što je i razumljivo, jer je mazematička osnova ista. Uslova u mreži ima uglovnih i logaritamskih. Srednja kvadratna »greška« jedinice težine i ovdje se računa po formuli:

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{\Sigma p v^2}{n - U}}, \qquad (7)$$

u kojoj je U — broj uslova. Ostale oznake su iste kao u jednačini (1). Pojedinačne popravke se računaju po formuli:

$$v_i = s_{1i} k_1 + s_{2i} k_2 + \ldots + w_i, \qquad (8)$$

u kojoj su:

— S — koeficijenti jednaki izvodima uslovne funkcije po pojedinim mjerenjima $\frac{\delta F}{\delta l}$, i zavise od geometrije mreže i, s obzirom na vrstu **uslova,** razmjernost im je $\frac{U}{U} = 1$ — za uglovne uslove i $\frac{1}{U}$ — za logaritamske;

— W — nesuglasice matematičkih uslova, koje, u zavisnosti od uslova, izražavamo u uglovnoj ili u logaritamskoj mjeri;

— k — Lagranževi množitelji — korelate — koji povezuju mjerenja, a računaju se iz normalnih jednačina, općenito iz odnosa

$$\frac{[w \cdot (r-1)}{[ss \cdot (r-1)} .$$

Ako je uslovna jednačina uglovna onda im je razmjernost $\frac{U}{1} = U$;

ako je uslovna jednačina logaritamska razmjernost im je $\frac{\frac{1}{1}}{U^2} = U^2$.

Prema tome, V_1 će, na osnovi (8), imati uvijek uglovnu razmjernost, odnosno onu u kojoj su izvršena mjerenja. Onda iz (7) slijedi da razmjernost »greške« težine mora biti:

$$\dim (m_0) = \sqrt{\frac{U^2}{1}} = U$$

Sve ostalo što je rečeno naprijed za posredno izravnanje potpuno je primjenljivo i ovdje. Samo se koeficijenti težina mjerenja i njihovih funkcija računaju malo drukčije.

Sve ovo se znalo i ranije. Ali, kao opšte poznata stvar, o tome se nije vodilo računa i nekako se zaboravilo. A onda su nastala pitanja, na koja se odgovor tražio na kraju rješenja problema. Zbog toga se vjerovatno griješilo u zaključcima.

Primljeno: 1986-03-19