UDK 528.482:519.2
Originalni znanstveni rad

MATEMATIČKA OBRADA MERENIH VELIČINA PRI ODREĐIVANJU DEFORMACIJA

Krunislav MIHAILOVIĆ — Beograd*

Za identifikovanje stabilnih tačaka, uglavnom se koristi metoda uklapanja mreža tekuće serije u mrežu nulte serije.

Matematički model, glasi:

$$v^T Q^{-1} v = \min, \tag{1}$$

$$x^T x = \min, \tag{2}$$

odnosno

$$d'^T d' = \min, \tag{3}$$

gde je d' vektor prividnih pomeranja

$d' = x' - x =$ (tekuća-nulta) serija.

Uslov (1) i (2) mogu biti istovremeno ispunjeni pri izravnanju mreža, ili se pak, prilikom izravnanja mreža prvo koristi samo uslov minimuma (1) a zatim se pri transformaciji koordinata tačaka zadovoljava uslov minimuma (2), odnosno (3). Na ovaj način, u nekim slučajevima, uopšte nije moguće otkriti koje su stabilne tačke proglašavaju stabilnim i obratno. Cilj ovoga rada upravo jest u tome da se kritički razmotre metode koje se zasnivaju na uklapanju mreže tekuće serije u mrežu nulte serije. U tom cilju s obzirom na karakter pomeranja sve tačke svrstaćemo u tri grupe.

U prvu grupu tačke koje su se pomerile za različite veličine d_i,

$$d'_i = x'_i - x_i = C + d_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n_1 \tag{5}$$

$$M[d'_i] = C + d_i \text{ jer je } M[\varepsilon_i] = 0$$

U drugu grupu tačke koje su se pomerile za istu veličinu d,

$$d'_j = x'_j - x_j = C + d + \varepsilon_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n_2 \tag{6}$$

$$M[d'_j] = C + d \text{ jer je } M[\varepsilon_j] = 0$$

---

* Adresa autora: Prof. dr Krunislav Mihailović, Institut za geodeziju Građevinskog fakulteta, Beograd, Bulevar revolucije 73.

U treću grupu tačke koje su stabilne

$$d'_r = x'_r - x_r = C + \varepsilon_r, \quad r = 1, 2, \ldots, n_3 \tag{7}$$

$$M\,[d'_r] = C \text{ jer je } M\,[\varepsilon_r] = 0$$

Sa d' označena su prividna pomeranja tačaka, a sa ε greške rezultata merenih veličina.

Kada se uslov minimuma (3) primeni na (5), (6) i (7), dobiće se srednja najverovatnija vrednost

$$\bar{d}' = \frac{1}{n_1 + n_2 + n_3}\left(\sum_{i=1}^{n_1} d'_i + \sum_{j=1}^{n_2} d'_j + \sum_{r=1}^{n_3} d'_r\right) =$$

$$= C + \frac{1}{n_1 + n_2 + n_3}\left(\sum_{i=1}^{n_1} d_i + n_2 d\right) + \bar{\varepsilon}, \tag{8}$$

gde je

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{n_1 + n_2 + n_3}\left(\sum_{i=1}^{n_1} \varepsilon_i + \sum_{j=1}^{n_2} \varepsilon_j + \sum_{r=1}^{n_3} \varepsilon_r.\right.$$

Relativna pomeranja tačaka određuju se u odnosu na srednju vrednost $\bar{d}'$,

$$\Delta d'_i = d'_i - \bar{d}' = d_i - \frac{1}{n_1 + n_2 + n_3}\left(\sum_{i=1}^{n_1} d_i + n_2 d\right) + \Sigma\varepsilon_i, \tag{9}$$

$$\Delta d'_j = d'_j - \bar{d}' = d - \frac{1}{n_1 + n_2 + n_3}\left(\sum_{j=1}^{n_1} d_i + n_2 d\right) + \Delta\varepsilon_j, \tag{10}$$

$$\Delta d'_r = d'_r - \bar{d}' = - \frac{1}{n_1 + n_2 + n_3}\left(\sum_{i=1}^{n_1} d_i + n_2 d\right) + \Delta\varepsilon_r, \tag{11}$$

gde su $\Delta\varepsilon_i = \varepsilon_i - \bar{\varepsilon}$, $\Delta\varepsilon_j = \varepsilon_j - \bar{\varepsilon}$ i $\Delta\varepsilon_r = \varepsilon_r - \bar{\varepsilon}$.

Ako je

$$d_i = \frac{1}{n_1 + n_2 + n_3}\left(\sum_{i=1}^{n_1} d_i + n_2 d\right) \tag{12}$$

tada iz (9), sledi

$$\Delta d'_i = \Delta\varepsilon_i, \quad M\,[\Delta d'_i] = 0 \tag{13}$$

pa se izvodi pogrešan zaključak da je ovo stabilna tačka, jer će se privdino pomeranje razlikovati od nule u granicama tačnosti merenja.

Ako je

$$d = \frac{1}{n_1 + n_2 + n_3}\left(\sum_{i=1}^{n_1} d_i + n_2 d\right)$$

tada iz (10), sledi

$$\Delta d'_j = \Delta\varepsilon_j, \quad M\,[\Delta\varepsilon_j] = 0, \quad (j = 1, 2, \ldots, n_2) \tag{14}$$

pa se izvodi pogrešan zaključak da su ovo stabilne tačke jer će se prividna pomeranja razlikovati od nule u granicama tačnosti merenja.

Ako je

$$d_i = d = \frac{1}{n_1 + n_2 + n_3}\left(\sum_{i=1}^{n_1} d_i + n_2 d\right)$$

tada iz (9) i (10) sledi (13) i (14), pa će se izvesti pogrešan zaključak da su ovo stabilne tačke.

S druge strane iz (11), sledi

$$M\,[\Delta d'_r] = -\frac{1}{n_1 + n_2 + n_3}\left(\sum_{i=1}^{n_1} d_i + n_2 d\right) \neq 0$$

pa će se izvesti pogrešan zaključak da su ovo nestabilne tačke.

Ako se $M/\Delta d_r'/$ razlikuje od nule više nego što je tačnost rezultata merenih veličina neopravdano će se stabilne tačke ($r = 1, 2 \ldots n_3$) proglasiti kao nestabilne tačke.

Ovakav se slučaj ne može dogoditi samo pod uslovom ako je

$$M\,[\Delta d'_r] = -\frac{1}{n_1 + n_2 + n_3}\left(\sum_{i=1}^{n_1} d_i + n_2 d\right) = 0$$

To praktično znači, ako se tačke približno u jednakom broju pomeraju u suprotnim smerovima, tako da se u proseku dobija nula. Ako nije zadovoljen uslov da je matematička nada nastalih deformacija jednaka nuli $M/\Delta d_i'/ = 0$, zadovoljavajući rezultati mogu se dobiti samo pod uslovom ako ima dovoljan broj stabilnih tačaka.

Broj stabilnih tačaka treba da bude [1].

$$r > \frac{2\,[d]}{d_{min}} - n \tag{15}$$

gde je n broj nestabilnih tačaka.

Na osnovu izloženog, dovoljno se egzaktno vidi da selektivni postupak koji se koristi pri uklapanju mreža može dati pogrešnu informaciju o stabilnim tačkama.

Kod postupka uklapanja u svim mogućim kombinacijama, takođe su moguće dileme koje onemogućuju da se sigurno identifikuju stabilne tačke. Pokušaćemo da objasnimo razloge.

Razmotrimo kombinaciju na osnovu tačaka koje su se pomerile za istu veličinu (kombinaciju uklapanja na osnovu tačaka druge grupe).

Tada je $[d] = 0$, $n_1 = n_3 = 0$, pa iz (10) neposredno sledi

$$\Delta d_j' = d - \frac{1}{n_2} n_2 d + \Delta \varepsilon_j = \Delta \varepsilon_j$$

$$M[\Delta d_j'] = M[\Delta \varepsilon_j] = 0.$$

U ovoj kombinaciji uklapanja za sve tačke koje su se pomerile za istu veličinu d, relativna pomeranja $\Delta d_j'$ grupisaće se oko nule u granicama tačnosti rezultata merenih veličina.

Sada razmotrimo kombinaciju uklapanja na osnovu stabilnih tačaka (kombinacija uklapanja na osnovu tačaka treće grupe).

Tada je $[d] = 0$, $d = 0$, $n_1 = n_2 = 0$, pa iz (11) neposredno sledi

$$\Delta d_r' = \Delta \varepsilon_r, \quad M[\Delta \varepsilon_r] = 0.$$

I ovde će se (kao za kombinaciju sa drugom grupom tačaka) relativna pomeranja $\Delta d_r'$ grupisati oko nule u granicama tačnosti rezultata merenih veličina.

Prema tome, u ovom slučaju nastaje dilema, koju grupu tačaka treba proglasiti stabilnim (tačke druge ili treće grupe), jer će se za obe grupe tačaka relativna pomeranja grupisati oko nule u granicama tačnosti rezultata merenih veličina.

Izvedeni zaključci imaju opšti značaj i važe za uklapanja mreža tekuće serije u mrežu nulte serije u visinskom (nivelmanske mreže) i horizontalnom (trigonometrijske i poligonometrijske mreže) pogledu.

Na osnovu izložnog jasno sledi, da nikada ne mogu, biti sigurni zaključci o stabilnim tačkama, kada se primenjuje metoda uklapanja mreže tekuće serije u mrežu nulte serije. Ovaj zaključak naročito se odnosi kada se primenjuje selektivni postupak za identifikovanje stabilnih tačaka. Zaključci će uvek bit pogrešn,i ako se apriori ne obezbedi dovoljan broj stabilnih tačaka ili ako pomeranja tačaka nisu takvog karaktera (pomeranja u suprotnim smerovima) da se u proseku dobije nula tj. kao da se u proseku tačke uopšte nisu pomerile ($M[\Delta d'] = 0$).

NOVA METODA ZA ODREĐIVANJE STABILNIH TAČAKA

Proučavajući nedostatke metoda uklapanja mreže tekuće serije u mrežu nulte serije, došlo se do novog veoma jednostavnog postupka, koji sa velikim usphom otkriva stabilne tačke. Pri tome, treba razlikovati dva slučaja:

— kada je samo jedna tačka stabilna (tačka koja se najmanje pomerila ili se u idealnom slučaju nije pomerila),

— kada ima više stabilnih tačaka (tačke koje se nisu pomerile ili su se pomerile u granicama tačnosti merenja).

A. *Vertikalna pomeranja (sleganja)*

Ako se teren sleže, onda će se najveće prividno sleganje pojaviti na stabilnoj tačci (Sl. 1).

$$d'_{i\,max} = d'_s \quad (s — \text{stabilna tačka})$$

Pošto je nemoguće odrediti apsolutna sleganja, određuju se relativna sleganja u odnosu:

— na najstabilniju tačku,

— na fiktivnu najverovatnije stabilnu tačku (kada ima više stabilnih tačaka koje su se pomerile u granicama tačnosti merenja).

1. *Slučaj kada je jedna tačka stabilna*

Neka u mreži ima n tačaka, od kojih je samo jedna stabilna.

Iz razlika apsolutnih visina tačaka određuju se prividna sleganja tačaka d_i'

— za nestabilne tačke

$$d'_i = x'_i - x_i = C + d_i + \varepsilon_i \quad i = 1, 2, \ldots, (n-1) \tag{16}$$

— za stabilnu tačku

$$d'_{i\,max} = x'_s - x_s = C + d_s + \varepsilon_s \tag{17}$$

gde su x i x′ apsolutne visine u nultoj i tekućoj seriji,

Kada se od (16) oduzme (17) dobiće se relativna sleganja tačaka u granicama tačnosti merenja

$$\Delta d'_i = d'_i - d'_s = d_i - d_s + \varepsilon_i - \varepsilon_s = \Delta d_i + \Delta\varepsilon_i \tag{18}$$

ili

$$\Delta d'_i = (x'_i - x'_s) - (x_i - x_s),\ i = 1, 2, \ldots, (n-1) \tag{19}$$

odnosno, u matričnom obliku

$$\Delta d' = Bx' - Bx \tag{20}$$

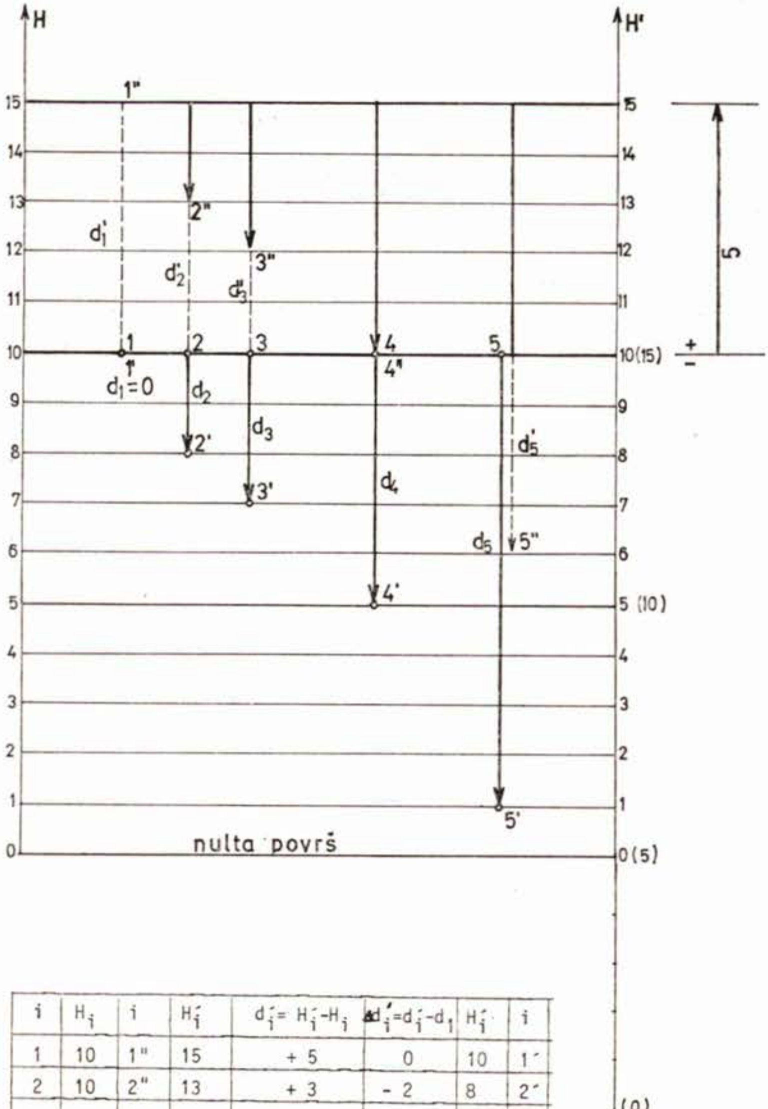
gde su:

$$x'^T = [x'_1\ x'_2 \ldots x'_{n-1}]$$

$$x^T = [x_1\ x_2 \ldots x_{n-1}]$$

Primer kada je stabilna samo jedna tačka
(Vertikalna pomeranja)

Položaj tačaka (sl. 1)
- u nultoj seriji 1,2,3,4,5
- u drugoj seriji 1', 2', 3', 4', 5'
- prividni položaj tačaka 1", 2", 3", 4", 5"



i	H_i	i	H_i'	$d_i' = H_i' - H_i$	$d_i' = d_i' - d_1$	H_i'	i
1	10	1"	15	+ 5	0	10	1'
2	10	2"	13	+ 3	- 2	8	2'
3	10	3"	12	+ 2	- 3	7	3'
4	10	4"	10	0	- 5	5	4'
5	10	5"	6	- 4	- 9	1	5'

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \ldots & -1 & \ldots 0 \\ 0 & 1 \ldots & -1 & \ldots 0 \\ - & - - - & - - & - - \\ 0 & 0 \ldots & -1 & \ldots 1 \end{bmatrix}$$

Iz (20), neposredno sledi

$$Q_{\Delta d}' = B\,Q_x B^T + B\,Q_x B^T = 2B\,Q_x B^T, \tag{21}$$

ako je ista geometrija mreže u obe serije

$$Q_{x'} = Q_x = N^{-1} = (A^T Q A)^{-1}. \tag{22}$$

U matrici B potrebno je izbrisati (izostaviti) kolonu koja se odnosi na tačku koja je usvojena kao data tačka. Ako je stabilna tačka usvojena kao data tačka, tada je $B = E$, pa iz (21), sledi

$$Q_{\Delta d}' = 2Q_x = 2N^{-1} = 2\,(A^T Q A)^{-1}. \tag{23}$$

Matrica N^{-1} se određuje iz klasičnog zriavnavanja po metodi posrednih merenja i to samo prilikom izravnanja prve (nulte) serije.

2. *Slučaj kada ima više stabilnih tačaka*

Neka u mreži ima:

— n stabilnih tačaka

— N nestabilnih tačaka

Prividna pomeranja, biće:

— za stabilne tačke

$$d_i' = C + d_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{24}$$

— za nestabilne tačke

$$D_j' = C + D_j + \varepsilon_j, \quad j = 1, 2, \ldots, N \tag{25}$$

Za stabilne tačke računa se neka fiktivna najverovatnija vrednost

$$\overline{d}' = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} d_i' = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (C + d_i + \varepsilon_i) = C + \overline{d} + \overline{\varepsilon},$$

a zatim se određuju relativna sleganja

$$\Delta\overline{d}_i' = d_i' - \overline{d}' = d_i - \overline{d} + \overline{\Delta\varepsilon_i}, \tag{26}$$

$$\Delta\overline{D'_j} = D'_j - \overline{d'} = D_j - \overline{d} + \overline{\Delta\varepsilon_j}, \tag{27}$$

ili

$$\Delta d'_i = x'_i - x_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x'_i - x_i) = (x'_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x'_i) - (x_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i),$$

$$\Delta D_j = X'_j - X_j - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x'_i - x_i) = (X'_j - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x'_i) - (X_j - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i),$$

odnosno u matričnom obliku

$$\overline{\Delta d'} = BX' - BX, \tag{28}$$

gde su:

$$X'^T = [x'_1 x'_2 \ldots x'_n\ X'_1\ X'_2 \ldots X'_N]$$

$$X^T = [x_1 x_2 \ldots x_n\ X_1\ X_2 \ldots X_N]$$

$$B = \frac{1}{n}\left[\begin{array}{cccc|cccc} (n-1) & -1 & \ldots & -1 & & & & \\ -1 & (n-1) & \ldots & -1 & & & & \\ \hline -1 & -1 & \ldots & (n-1) & & & & \\ \hline -1 & -1 & \ldots & -1 & n & & & \\ -1 & -1 & \ldots & -1 & & n & & \\ \hline -1 & -1 & \ldots & -1 & & & \ddots & n \end{array}\right]$$

Iz (28), neposredno sledi

$$Q_{\overline{\Delta d'}} = B\,Q_x B^T + B\,Q_x B^T = 2B\,Q_x B^T, \tag{29}$$

ako je ista geometrija mreže u obe serije.

TESTIRANJE STABILNIH TAČAKA

Na osnovu relativnih sleganja d_i' (19) ili $\overline{d_i'}$ (26), može se sa odgovarajućom verovatnoćom p. oceniti, da li su »stabilne tačke« zaista stabilne u granicama tačnosti merenja. Pri tome se koristi normalni ili Studentov raspored. Pošto obično raspolažemo sa srednjim greškama m (a ne sa standardima σ), koristi se studentov raspored

$$t_i = \frac{\Delta d'_i}{m_{\Delta di}} = \frac{\Delta d'_i}{m_0 \sqrt{(Q_{\Delta d'})_{ii}}} \tag{30}$$

gde je:

$$m_0 = \sqrt{\frac{v^TQ^{-1}v + v'^TQ^{-1}v'}{2(n-u)}} \tag{31}$$

ako su iste merene veličine i ista geometrija mreže u obe serije.

Ako je

$\Delta d_i' < t_T\, m_{\Delta d_i'}$, odnosno $t_i < t_T$ može se sa verovatnoćom p tvrditi da se i-ta tačka nije pomerila između dve serije (prihvata se nulta hipoteza).

Parameter t_T uzima se iz tablica za studentovu raspodelu, po argumentu usvojene verovatnoće p i broja suvišnih merenja r = n-u.

Sažeta interpretacije:

Nulta hipoteza $H_0 : M[\Delta d'] = 0$

Ako je $t < t_T$ (tačke su stabilne)

Ako je $t > t_T$ (tačke se možda neopravdano proglašavaju kao nestabilne — čini se greška prve vrste). Odbacuje se tlo.

Alternativna hipoteza $H_A : M[\Delta d'] \neq 0$

Ako je $t < t_T$ (možda se neopravdano prihvata da su tačke stabilne — čini se greška druge vrste).

Ako je $t > t_T$ (tačke nisu stabilne).

Na ovaj način posebno se testira stabilnost svake tačke.

Moguće je primeniti i Fišerov test

$$F = \frac{m_0'^2}{m_0^2}$$

gde se m_0 određuje na osnovu (31), a

$$m_0' = \frac{\varepsilon^TQ^{-1}\varepsilon}{n'} \quad \text{ili} \quad m_0' = \frac{\bar{\varepsilon}^{T}Q^{-1}\bar{\varepsilon}}{n'}$$

$$\varepsilon^T = [\Delta_1' \,\Delta d_2' \ldots \Delta d_{n-1}'], \quad (n' = n - 1)$$

$$\bar{\varepsilon}^T = [\Delta\bar{d}_1' \,\Delta\bar{d}_2' \ldots \Delta\bar{d}_n'], \quad (n' = n)$$

Ako je $m_0'^2 < m_0^2\, F_T$, odnosno $F < F_T$ usvaja se nulta hipoteza da su »stabilne tačke« zaista stabilne u granicama tačnosti rezultata merenih veličina. Parametar F_T uzima se iz tablice za Fišerovu raspodelu.

Ovo je globalni test koji pruža opštu informaciju da li su nastale neke promene u položaju tačaka između dve serije.

B. *Horizontalna pomeranja*

Pri pomeranju tačaka u horizontalnom pogledu primenjuje se ista metodologija kao i za vertikalna pomeranja (sleganja) uz neke specifičnosti koje su objašnjene u radu [1].

ZAKLJUČAK

U radu je dat kritički osvrt na metode koje se zasnivaju na uklapanju mreže tekuće serije na mrežu nulte serije. Zatim, se ukazuje u kojim se slučajevima ove metode mogu upotrebiti za identifikovanje stabilnih tačaka. Pored toga u radu je izložena nova metodologija identifikovanja stabilnih tačaka. Pomoću nje, na jednostavan način mogu se sa velikom sigurnošću identifikovati stabilne tačke, a samim tim odrediti relativna pomeranja tačaka. Ako se tlo kreće u pretpostavljenom smeru stabilne se tačke mogu sigurno identifikovati. A ako se teren pomera u različitim smerovima stabilne se tačke mogu otkriti, ako je zadovoljen uslov da je broj stabilnih tačaka veći od broja tačaka koje su se pomerile za istu veličinu.

LITERATURA

[1] Mihailović, K.: Nov pristup za određivanje stabilnih tačaka kod deformacionih merenja. Zbornik radova Instituta za geodeziju, br. 24, Beograd, 1985. god.

REZIME

U radu se ukazuje na nedostatke postojećih metoda koje se u praksi koriste za identifikovanjie stabilnih tačaka, a zasnivaju se na uklapanju mreže tekuće serije u mrežu nulte serije. Predlaže se jedna nova metoda, pomoću koje se sa velikom sigurnošću mogu identifikovati stabilne tačke i odrediti relativna pomeranja tačaka u odnosu na njih.

ZUSAMMENFASSUNG

In diesem Aufsatz weisst der Verfasser auf die Mangelhaftigkeiten der Methoden, die man heute für die Identifizierung der stabilen Punkte verwendet. Die Kritik beziet sich auf Verfahren, die sich auf die Netzeinschaltung der laufenden Serie in das Netz der Nullserie gründen. Eine neue Methode ist vorgeschlagen, welche die Identifizierung der stabilen Punkte und die Bestimmung der relativen Verschiebung der anderen Punkte mit grossen Wahrschanlichkeit ermöglicht.

Primljeno: 1985-10-28