

## ZAVISNOST VELIČINE RASTEZANJA INVARSkih ŽICA I VRPCI OD VISINSKE RAZLIKE TOČAKA NJIHOVOG OBJESIŠTA, KAD SE LANČANICA APROKSIMIRA PARABOLOM

Miljenko SOLARIĆ — Zagreb\*

### 1. UVOD

Suvremenim elektroničkim daljinomjerima i to posebno s onima konstruiranim za specijalne namjene postiže se zavidno visoka točnost mjerenja duljina.

Međutim, i pored toga naglog razvoja elektroničkih metoda mjerenja duljina i ostvarenih vrlo visokih točnosti njihovih određivanja s elektroničkim daljinomjerima (npr. Mekometar ME 3000) mehanički način mjerenja duljina pomoću invarskih žica i vrpce nije do danas izgubio svoj značaj. To se vidi i po tom što Internacionalni ured za mjere i utege u Sevru (Francuska) prima na komparaciju u posljednje vrijeme povećan broj invarskih žica i vrpce.

Naime, u svim znanstvenim istraživanjima, a tako i u geodeziji, uobičajeno je da se tražene vrijednosti odrede na više nezavisnih načina, jer je tako osigurana veća točnost rezultata, odnosno može se dobiti uvid i u vanjsku točnost određivanih veličina. To nam upravo objašnjava zbog čega se stari način preciznog mjerenja duljina s invarskim žicama i vrpcama koristi paralelno s naj-suvremenijim elektroničkim daljinomjerima.

Budući da se još i danas u svijetu i u nas koriste invarske žice i vrpce za precizno određivanje duljina u ovom se radu želi proanalizirati i izraziti matematičkim izrazom funkcionalnu zavisnost vrlo malog rastezanja invarskih žica od visinske razlike njihovih objesišta.

### 2. IZVOD FORMULE ZA RAČUNANJE RASTEZANJA ŽICE SAVINUTE U OBLIKU PARABOLIČNE LANČANICE KAD SE U RAČUN UZME DA JE SILA ZATEZANJA U ŽICI PROMJENJIVA

U udžbenicima mehanike i geodezije obično se je do sada zanemarivalo produženje niti (žice) kad se ona obješena u dvije nepomične točke savine pod djelovanjem vlastite težine u obliku obične ili hiperbolične lančanice, vidi (Ba-

\* Adresa autora: Prof. dr Miljenko Solarić, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Kačićeva 26, 41000 Zagreb. Ovaj rad izrađen je u okviru teme Tl. 2, koji financira SIZ-III za znanstveni rad SRH.

znanac, 1963), (Mišić, 1968) ili se pak uzimalo u obzir produženje niti (žice) samo približno kao da je sila koja rasteže nit konstantna (Andrejev, 1969), (Čubranić, 1954) i (Muminagić, 1981). Također iz mehanike se zna da će se savitljiva, homogena, nerastezljiva i konstantnog poprečnog presjeka nit jako zategnuta, tj. ako je njena strijela (provjes)  $f$  relativno mala, približno savinuti u obliku parabolične lančanice. Da se ovo približenje može uzeti i kod redukcije mjerenih duljina invarskim žicama i vrpčama pokazano je u radu (Andrejev, 1951).<sup>\*</sup> Takovo približenje moći će se s još više razloga uzeti i pri izvodu formule za rastezanje invarskih žica u ovisnosti od visinske razlike točaka obješta, jer je rastezanje žica već inače vrlo malo, svega oko 7 mm.

Osim ovog približenja uzet će se još i drugo, a to je, da se pretpostavlja da je sila rastezanja u elastičnoj žici jednaka kao u neelastičnoj.

Iz znanosti o otpornosti materijala zna se da se rastezanje niti od djelovanja vlačne aksijalne sile može izračunati po formuli

$$\Delta s = \frac{S}{EF} \cdot s \quad (1)$$

gdje su:  $\Delta s$  — promjena duljine žice (niti)

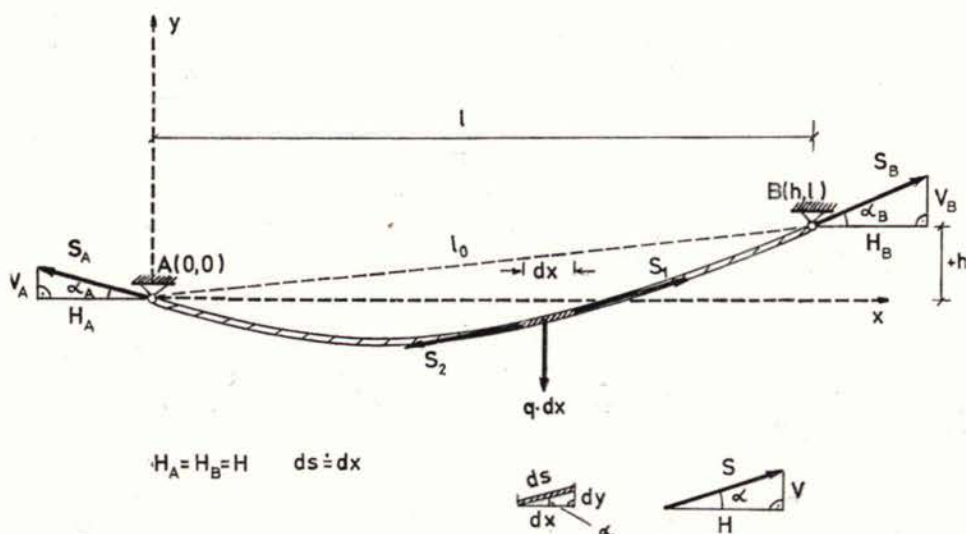
$s$  — početna duljina žice

$S$  — vlačna aksijalna sila s kojom se rasteže žica

$E$  — modul elastičnosti materijala od kojeg je načinjena žica

$F$  — površina poprečnog presjeka žice.

Ova relacija vrijedi u granicama u kojima je izduženje proporcionalno aksijalnoj sili u žici.



Sl. 1. Parabolična lančanica

<sup>\*</sup> U radu (Andrejev, 1951) na str. 13 utvrđeno je da je razlika između redukcije duljine na horizont za paraboličnu i hiperboličnu lančanicu za visinsku razliku  $h = 2$  m svega 0,006 mm, a za  $h = 1$  m i manje razlika praktički ne postoji.

Jednadžba (1) za rastezanje žice može se primjeniti i za približno računanje rastezanja žice savinute u obliku parabolične lančanice, ako se u nju uvrsti da je  $S = H$  tj. da je sila u čitavoj niti lančanice konstantna. Ovdje je, kao što se vidi iz sl. 1,  $H$  horizontalna komponenta sile rastezanja u žici savinutoj približno u obliku parabolične lančanice.

Međutim, u točnijem računanju istezanja obješene žice u dvije nepomične točke A i B, treba uzeti u obzir promjenjivu aksijalnu silu koja djeluje u žici, te će jednadžba za rastezanje žice formirane približno u obliku parabolične lančanice glasiti

$$\Delta s = \frac{1}{EF} \int S \cdot ds, \quad (2)$$

gdje je  $ds$  — izdvojeni elementarni dio žice savinute u obliku parabolične lančanice vidi sl. 1. (Izvod za paraboličnu lančanicu vidi u (Andrejev, 1969) ili (Mišić, 1968).

Aksijalna sila u žici može se, kao što se vidi iz sl. 1, izračunati na bilo kojem mjestu po formuli

$$S = \frac{H}{\cos(\alpha)}. \quad (3)$$

Također iz sl. 1 je vidljivo da je

$$\cos(\alpha) = \frac{dx}{ds} \quad (4)$$

kao i da je

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'^2} \cdot dx. \quad (5)$$

Nakon uvrštenja jednadžbe (5) u (4) i (2), a zatim postavljanjem jednadžbe (4) u (3) i (3) u (2) bit će

$$\Delta s = \frac{H}{EF} \int (1 + y'^2) dx. \quad (6)$$

Prema izvodu jednadžbe parabolične lančanice (vidi Andrejev, 1969, formula VII—3.19)

$$y' = -\frac{q}{H} \cdot \left( \frac{l}{2} - x \right) + \frac{h}{l}, \quad (7)$$

gdje su:  $q$  — težina žice na jedinicu duljine raspona  $l$

$H$  — horizontalna komponenta sile rastezanja koja djeluje u žici

$l$  — horizontalna udaljenost između točaka objesišta žice A i B

$h$  — visinska razlika između točaka objesišta žice A i B



Poslije uvrštenja jednadžbe (7) u (6) dobije se da je

$$\Delta s = \frac{H}{EF} \int_0^l \left\{ 1 + \left[ -\frac{q}{H} \cdot \left( \frac{l}{2} - x \right) + \frac{h}{l} \right]^2 \right\} \cdot dx, \quad (8)$$

a nakon integriranja, uvrštenja granica i sređivanja bit će

$$\Delta s = \frac{H}{EF} \cdot \left( l + \frac{q^2}{12 H^2} \cdot l^3 + \frac{h^2}{l} \right). \quad (9)$$

Dakle, za računanje rastezanja žice savinute približno u obliku parabole po formuli (9) moraju biti zadane ili na neki način prethodno određene s dovoljnom točnošću veličina:  $H$ ,  $E$ ,  $F$ ,  $q$ ,  $l$  i  $h$ .

### 3. NUMERIČKI PRIMJER

U ovom poglavlju želi se izračunati veličine rastezanja invarskih žica za razne visinske razlike njenih točaka objesišta i ustanoviti kako se rastezanje mijenja s visinskom razlikom  $h$ . Da bi se izračunalo po jednadžbi (9) koliko je rastezanje invarskih žica (duljine  $l_0 = 24$  m) za razne visinske razlike  $h$  preuzeti su slijedeći podaci za invarske žice od (Muminagić, 1981):

$$S_B = 98,100 \text{ N (masa utega je 10 kg)}$$

$$E = 153036 \text{ N/nm}^2$$

$$F = 2,14 \text{ nm}^2$$

$$q = 0,1699 \text{ N/m}$$

$$l_0 = 24,000 \text{ m}$$

Ovdje su za razliku od originalnih podataka u (Muminagić, 1981) sile pretvorene u newtone (N), jer je to sada službena jedinica za silu. (Do tih novih veličina sile dođe se tako da se stare vrijednosti za silu izražene u kp pomnože s 9,81.) Veličina  $l_0$  označava duljinu tetive lančanice invarske žice, kad su objesišta žice na istoj visini.

Međutim, za računanje veličine rastezanja žica po jednadžbi (9) potrebne su još vrijednosti za  $H$  i  $l$ , koje se mijenjaju za razne visinske razlike točaka objesišta  $h$ , te ih se mora prethodno odrediti.

Horizontalne udaljenosti točaka objesišta žice A i B izračunate su po formuli

$$l = \sqrt{l_0^2 - h^2} \quad (10)$$

Pri tome je zanemarena relativna korekcija za deformaciju lančanice

$$0,000\ 006 \cdot h^2 \quad (11)$$

kao vrlo mala (vidi Čubranić, 1954, str. 66), jer su te vrijednosti daleko ispod točnosti određivanja veličine  $l$  za potrebe računanja rastezanja invarskih žica. Izračunate vrijednosti  $l$  po formuli (10) upisane su u stupcu (2) tabele 1.

Tabela 1. — Veličine rastezanja invarskih žica (duljine 24 m) za razne visinske razlike, kad se ravnotežni položaj žica aproksimira parabolom. U točki B visi uteg mase 10 kg, tj. težine 98,100 N.

Visinska razlika $h$ (m) (1)	Horizontalna duljina $l$ (m) (2)	Sila u tjemenu $H$ (N) (3)	$\Delta s$ (mm) (4)	$\Delta s - \Delta s_0$ (mm) (5)
—5.0	23.4734	96.3348	7.2191	.0305
—4.5	23.5744	96.7096	7.2161	.0276
—4.0	23.6643	97.0385	7.2132	.0245
—3.5	23.7434	97.3222	7.2102	.0216
—3.0	23.8118	97.5611	7.2071	.0186
—2.5	23.8694	97.7558	7.2041	.0155
—2.0	23.9165	97.9067	7.2010	.0124
—1.5	23.9531	98.0142	7.1979	.0093
—1.0	23.9792	98.0785	7.1948	.0062
—0.5	23.9948	98.0788	7.1917	.0031
0.0	24.0000	98.1000	7.1886	.0000
.5	23.9948	98.0151	7.1854	—0.0031
1.0	23.9792	97.9089	7.1823	—0.0062
1.5	23.9531	97.7603	7.1792	—0.0093
2.0	23.9165	97.5692	7.1762	—0.0124
2.5	23.8694	97.3356	7.1731	—0.0155
3.0	23.8118	97.0593	7.1701	—0.0185
3.5	23.7434	96.7401	7.1670	—0.0215
4.0	23.6643	96.3778	7.1641	—0.0245
4.5	23.5744	95.9719	7.1611	—0.0274
5.0	23.4734	95.5222	7.1582	—0.0304

Do jednadžbe po kojoj je računata sila rastezanja u tjemenu lančanice  $H$ , iz poznatih veličina, došlo se je tako da se u jednadžbu (3) uvrstio izraz koji veže trigonometrijske funkcije istog kuta

$$\frac{1}{\cos(\alpha)} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(\alpha)}, \quad (12)$$

a zatim kako je  $\operatorname{tg}(\alpha) = y'$  bit će

$$S = H \cdot \sqrt{1 + y'^2}. \quad (13)$$

Ako se sada u ovu jednadžbu uvrsti formula (7) dobije se kvadratna jednadžba

$$\left[1 + \left(\frac{h}{l}\right)^2\right] \cdot H^2 + \left[-2q \cdot \left(\frac{l}{2} - x\right) \cdot \frac{h}{l}\right] \cdot H + \left[q^2 \cdot \left(\frac{l}{2} - x\right)^2 - S^2\right] = 0. \quad (14)$$

Rješenje ove jednadžbe je

$$H_{1,2} = \frac{\left[2q \left(\frac{l}{2} - x\right) \cdot \frac{h}{l}\right] \pm \sqrt{\left[-2q \left(\frac{l}{2} - x\right) \cdot \frac{h}{l}\right]^2 - 4 \cdot \left[1 + \left(\frac{h}{l}\right)^2\right] \cdot \left[q^2 \left(\frac{l}{2} - x\right)^2 - S^2\right]}{2 \cdot \left[1 + \left(\frac{h}{l}\right)^2\right]} \quad (15)$$

Po ovoj formuli izračunate su vrijednosti horizontalne komponente sile rastezanja invarskih žica i upisane u stupcu (3) tabele 1. Pri tome je uzeto da je  $S = S_B$ ,  $x = l$  i vrijednost korijena pozitivna, jer smo uzeli da je točka B na desnoj strani. Budući da se lančanica, u ovom radu, aproksimira s parabolikom lančanicom trebalo bi se u račun uzeti i promjenu opterećenja  $q$  po dužnom metru raspona  $l$ . Međutim, kako je to vrlo mala promjena to će se uzeti da je  $q = \text{const}$ .

Tek sada se moglo pristupiti računanju veličine rastezanja invarskih žica  $\Delta s_0$  (istezanja žice kad su objesišta invarskih žica na istoj visini, tj. kad je  $h = 0$ ), upisane su u stupcu (5) razlike  $\Delta s - \Delta s_0$ . Iz stupca (5) vidi se da se dodatno rastezanje žice ( $\Delta s - \Delta s_0$ ) linearno mijenja, za visinske razlike do 3 m, i da bi se moglo izraziti vrlo jednostavno formulom

$$\Delta_0 - \Delta s_0 = -0,000\,006\,2 \cdot h, \quad (16)$$

gdje visinsku razliku  $h$  treba uvrstiti izraženu u metrima, a  $(\Delta s - \Delta s_0)$  bit će također izraženo u metrima. (Predznak visinske razlike  $h$  je pozitivan ako je točka B viša od točke A, a negativan u suprotnom slučaju.)

#### 4. ZAKLJUČAK

Usporede li se jednadžbe (11) i (16) bit će očito, da je dodatno rastezanje invarskih žica ( $\Delta s - \Delta s_0$ ) uzrokovano visinskom razlikom ( $h$ ) njenih tolančanice, koja se uzima u obzir pri redukciji mjerenih duljina osnovice. lančanice, koja se uzima u obzir pri redukciji mjernih duljina osnovice. Zbog toga razloga trebalo bi i dodatno rastezanje invarskih žica uzeti u račun pri računanju duljina osnovice. Ali, ako bi se uzimao u obzir efekt dodatnog rastezanja invarskih žica tada bi se moralo u račun uzeti i silu trenja na osovinama kolotura stativa za natezanje žica, jer samo trenje u osovinama kolotura natezanih stativa može prema (Muminagić, 1981, str. 295) promijeniti mjerenu duljinu za 0,025 mm. Silu trenja u osovinama kolotura



natezanih stativa žica nije praktički moguće odrediti na terenskom mjerenju, te je uobičajeno da se utjecaj trenja na osovina kolotura eliminira načinom mjerenja, tj. da opažači »vuku« i »guraju« žicu.

Budući da je promatrani efekt rastezanja žica uzrokovan visinskom razlikom objesišta žica općenito manji od utjecaja sile trenja na osovina kolotura to se on i nadalje može zanemarivati pri mjerenju Jäderinovim mjernećim priborom.

Međutim, efekt dodatnog rastezanja žica prouzrokovan visinskom razlikom točaka njihovih objesišta moralo bi se uzeti u obzir pri mjerenju suvremenim priborom za vrlo točno mjerenje duljina mehaničkim načinom DISTINVAR-om (Gervaise, 1974). Naime, kod mjerenja duljina distinvarom za to postoje slijedeći razlozi:

- a) Srednja pogreška jednog mjerenja raspona distinvarom DIM-CERN je oko  $\pm 0,015$  mm (Keller), a pri visokotačnim mjerenjima za potrebe izgradnje akcelerometara atomskih čestica postoji potreba za točnošć od 0,15 mm na duljini od 2200 m (Gervais, 1974).
- b) Sila trenja na osovini zateznog dijela uređaja DISTINVAR-a svedena je na minimum, a kako se čitav uređaj nalazi zatvoren u kutiji to ni pri terenskom mjerenju ne dolazi do onečišćenja osovina, što nije slučaj kod mjerenja Jäderinovim priborom.
- c) Kod mjerenja duljina distinvarom natezni dio uređaja nalazi se samo na jednoj strani žice, a na drugom kraju žica je čvrsto vezana, te nastupa slučaj kao i što je računato za tabelu 1.

Ako se ovaj efekt dodatnog rastezanja žica prouzrokovan visinskom razlikom ne bude u praksi uzimao u račun, korist od ovog rada bit će u tome što se je izvelo formule i za taj vrlo mali utjecaj, a i s druge strane što se je numerički odredilo koliko su veliki ti iznosi.

Na svršetku ugodna mi je dužnost najsrdačnije se zahvaliti prof. dr Rudolfu Mišiću i kolegi Miljenku Lapaine, dipl. ing. matem. na vrlo korisnoj diskusiji i savjetima.

#### LITERATURA:

- [1] Abakumov, N. (1931): Mjerenje bazisa invarnim žicama, Tehnički list br. 21, 22, 23, 1931. god., Zagreb.
- [2] Andrejev, V. (1951): Izvod formule za redukciju dužine obješene niti na horizontalu putem parabole umjesto lančanice, Geodetski list, br. 4—9, 1951.
- [3] Andrejev, V. (1969): Mehanika I dio — Statika, Tehnička knjiga, Zagreb, 1969.
- [4] Bazjanac, D. (1963): Tehnička mehanika I dio — Statika, Tehnička knjiga, Zagreb, 1963.
- [5] Čubranić, N. (1954): Viša geodezija I, Školska knjiga, Zagreb, 1954.
- [6] Gervais, J. (1974): Measures géodésiques de haute précision appliquées a la construction des accélérateurs de particules, Geometre, Juillet 1974, Paris.
- [7] Glazunov, A. A. (1956): Osnovy mehaničeskoj časti vozdušnyh linij elektropredači, tom I, GEI, Moskva, 1956.

- [8] Keller, W., Chur (1982): Neue Instrumente und Beobachtungsverfahren für Polygon-Messungen höchster Präzision, str. 82—91.
- [9] Mišić, R. (1968): Mehanika, Sveučilište u Zagrebu, Geodetski fakultet, 1968.
- [10] Muminagić, A. (1981): Viša geodezija I, Građevinski fakultet, Sarajevo, 1981.

### SAŽETAK

U ovom radu izvedena je formula za računanje veličine rastezanja invarskih žica, kad se u obzir uzme da je djelovanje sile rastezanja u žici promjenjivo i da ono također ovisi o visinskoj razlici njenih točaka objekta. Do sada se obično uzimalo da je sila rastezanja u žici konstantna. Pri izvođenju formule ravnotežni položaj invarske žice je aproksimiran paraboličnom lančanicom, a uzeta je također i pretpostavka da je sila rastezanja u elastičnoj žici jednaka kao u neelastičnoj. U numeričkom primjeru konstatirano je da se dodatno rastezanje invarskih žica uzrokovano visinskom razlikom mijenja linearno s promjenom visinske razlike točaka objekta, kad su visinske razlike manje od 3 m. Veličina promjene rastezanja invarskih žica je približno reda veličine kao i relativna korekcija za deformaciju lančаницe.

### ZUSAMMENFASSUNG

In diesem Aufsatz ist die Formel für die Berechnung der Dehnung des Invardrahtes im Bezug auf die veränderliche Wirkung des Spannungsgewichtes und den ungleich hohen Auflagen, abgeleitet. Bis jetzt nahm man an, dass die Dehnungskraft konstant ist. Bei der Ableitung der Formel ist die Gleichgewichtslage des Invardrahtes mit einer parabolischen Kettenlinie approximiert, mit der Voraussetzung, dass Dahnungskraft eines elastischen Drahtes gleich demjenigen in einem nicht elastischen Drahtes gleich ist. Aus dem numerischen Beispiel geht hervor, dass sich die Zusatzdehnung des Drahtes wegen des Höhenunterschiedes, dessen Wert 3 m nicht überschreitet, linear verändert. Die Grösse der Dehnungsveränderung bei Invardrähten ist annähernd der Grössenreihe der relativen Korrektur der Deformation der Kettenlinie, gleich.

Primljeno: 1985-10-14