

UDK 528.486:513

725.826

Originalni znanstveni rad

RAČUNANJE ELEMENATA ISKOLČENJA ZAKRIVLJENIH STARTNIH LINIJA (EVOLVENTI KRUŽNICA) ZA UTRKE NA 1000 m, 3000 m, 5000 m i 10 000 m

Miljenko SOLARIĆ, Branka CAPEK — Zagreb*

1. UVOD

Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu dobio je više radnih zadataka iskolčenja i obilježavanja lakoatletskih staza: 1982. godine atletsku stazu na Gradskom stadionu u Osijeku, 1984. godine u Kumrovcu na atletskom borilištu u sklopu Spomen-parka i 1985. godine atletsku stazu na Gradskom stadionu u Titovom Drvaru. Na taj način stečeno je izvjesno iskustvo za tu vrstu posla, a uočeni su i neki problemi.

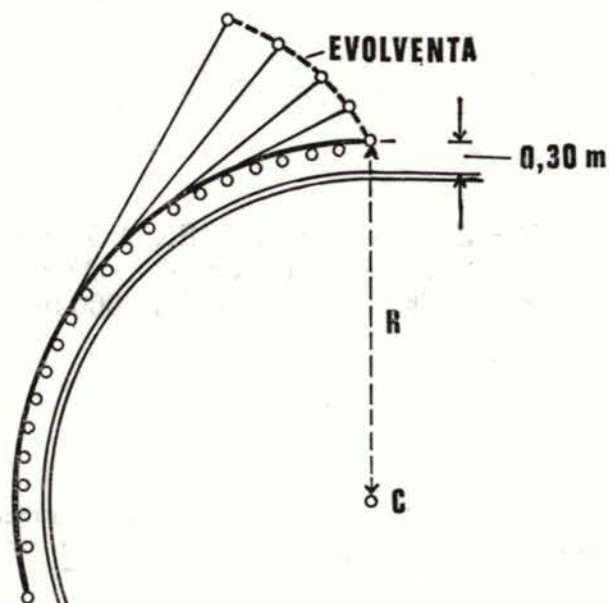
Internacionalna amaterska atletska federacija (IAAF) dala je smjernice za metode mjerenja i obilježavanja atletskih staza. Za obilježavanje zakrivljenih startnih linija — evolventi data je konstruktivno geometrijska metoda iskolčenja, što nije karakteristika rada geodetskih stručnjaka. Po toj preporuci, za iskolčenje zakrivljenih startnih linija morala se upotrebljavati dovoljno duga čelična vrpca, nešto duža od tangente iz startnog mjesta trkača u zadnjoj stazi na putanju trkača u prvoj stazi [4], [1] i [3]. Prije obilježavanja evolvente morala se čavlima označiti teoretska putanja trkača u prvoj stazi, koja je 30 cm udaljena od unutarnjeg ruba staze, rubnjaka (vidi sliku 1.). U tu su se svrhu na mjestu teoretske putanje trkača zabijali čavli na međusobnoj udaljenosti od 30 cm, a na dužini od cca 30 m. Poslije toga se prelazilo na obilježavanje evolvente, kako je to prikazano na slici 1.

Sve utrke kod kojih su startna mjesta definirana evolventom trče se u prvoj stazi, što znači, da trkači poslije starta zauzimaju pozicije uz njen unutrašnji rub. Kako trkači koji startaju u vanjskim stazama ne bi bili oštećeni, jer bi morali pretrčati dulji put od onih na unutarnjim, startna linija obilježava se u obliku evolvente. Raspored startnih linija za 400 — metarske staze vidi se na slici 2.

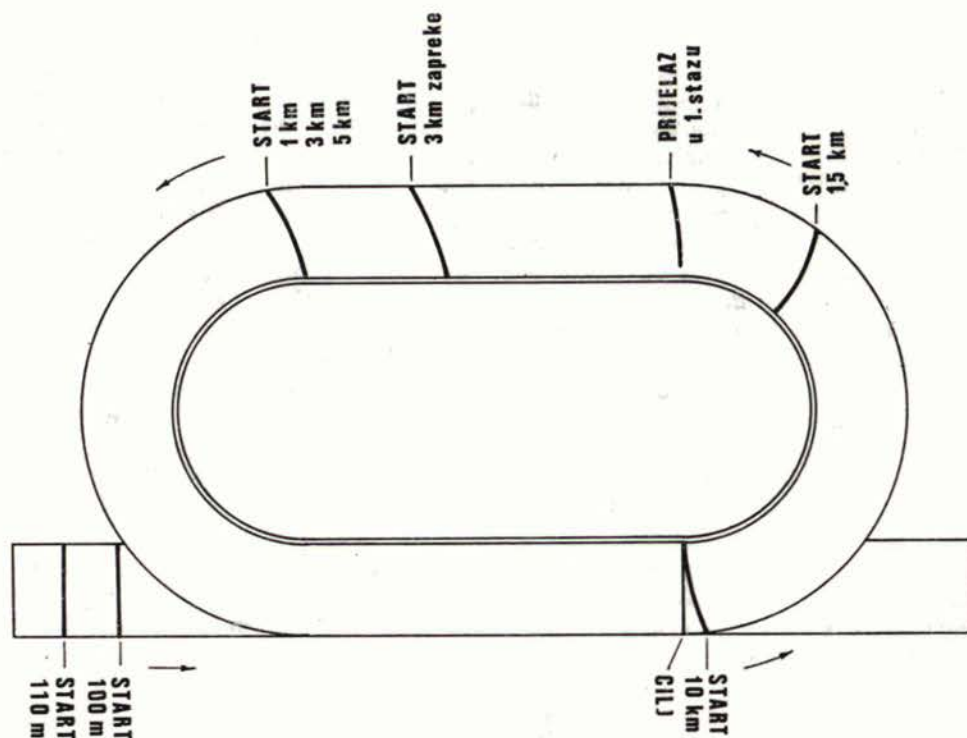
U ovom članku dat će se egzaktno rješenje za iskolčenje zakrivljenih startnih linija za utrke na 1000 m, 3000 m, 5000 m i 10 000 m. Za te discipline konstruktivni dijelovi evolventi vezani su isključivo za kružne krivine, dok za

* Adresa autora: Prof. dr Miljenko Solarić i Branka Capek, dipl. inž. Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb, Kačićeva 26

Ovaj rad djelomično je financirala Samoupravna interesna zajednica za znanstveni rad SR Hrvatske (SIZ-III).

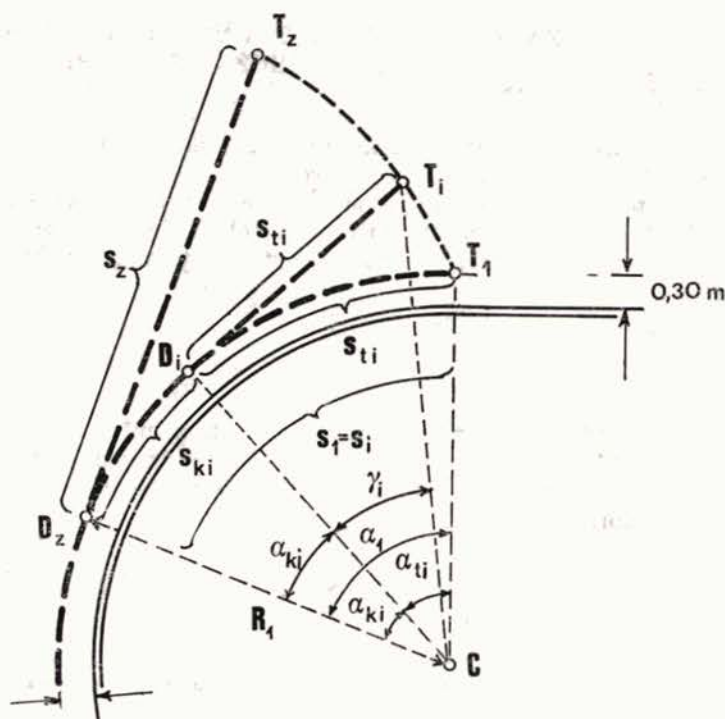


Sl. 1.

Sl. 2. Raspored startnih linija za utrke na 100, 110, 1000, 1500, 3000, 5000, 10 000, 3000 m sa zaprekama i prelaz trkača u prvu stazu za utrke na 800 i 4×400 m.

utrke na 1500 m, 3000 m sa zaprekama i za evolventu koja označava mjesto za prijelaz trkača u prvu stazu kod utrka na 800 m i 4×400 m konstruktivni dijelovi evolvente vezani su za kružne krivine i pravce, odnosno samo pravce (vidi sl. 2).

Poslije starta u utrkama duljim od 800 m trkači u vanjskim stazama nastoje prijeći u prvu stazu trčeći po tangenti od točke njihovog starta do ulaska u putanju (trajektoriju) gibanja trkača iz prve staze, koja se nalazi na 30 cm od rubnjaka (vidi sl. 3).



Sl. 3. Prikaz ulaska trkača u prvu stazu

Da bi svi trkači bili ravnopravni oni moraju do točke D_z (točke dirališta tangente povučene iz točke starta trkača u zadnjoj stazi T_z na kružni dio putanje gibanja trkača u prvoj stazi) prijeći *jednako dugi put*, tj. mora biti

$$s_1 = s_z = s_i = \text{const}$$

gdje je: s_1 — put koji pretrči trkač trčeći po kružnom dijelu krivine radijusa R_1 do točke D_z , tj. do mjesta gdje trkač iz zadnje staze ulazi u njegovu putanju gibanja

s_z — put koji pretrči trkač iz zadnje staze gibajući se od njegovog startnog mjesta T_z do točke D_z

s_i — put (s_{ti}) koji pretrči trkač u i -toj stazi (gdje je $i = 1, 2, 3, \dots, z$) trčeći od točke starta T_i do točke D_i gdje tangenta iz točke T_i

tangira putanju trkača iz prve staze plus put (s_{ki}) koji pretrči taj trkač po kružnom dijelu krivine prve staze od točke D_1 do točke D_z , što se može izraziti formulom

$$s_i = s_{ti} + s_{ki} \quad (2)$$

Sve te točke starta iz bilo je staze za koje je zadovoljena jednakost (1) računajući s_i do točke D_z nalaze se na krivulji tako zvanj EVOLVENTA KRUŽNICE.

2. IZVOD FORMULE ZA RAČUNANJE KUTEVA POD KOJIM SE ISKOLČAVAJU TOČKE EVOLVENTE KRUŽNICE IZ SREDIŠTA POLUKRUŽNIH KRIVINA (C)

Formule za računanje kuta pod kojim bi se iskolčile točke zakrivljenih startnih linija (evolventi) nismo našli direktno u udžbenicima matematike (vidi npr.: [2]), te smo do tražene jednakžbe došli kratkim izvodom. Kao što se vidi iz slike 3. i 4., kut β_i pod kojim treba iskolčiti startno mjesto trkača T_1 iz središta polukružne krivine, računajući kut od startnog mjesta trkača u

prvoj stazi bit će jednak:

$$\beta_i = 2 \cdot \pi - \alpha_1 + \alpha_{ki} + \gamma_i \quad (3)$$

gdje je: α_1 = središnji kut za dio staze od startnog mjesta trkača u prvoj stazi (T_1) do točke D_z ulaska trkača iz zadnje staze u prvu stazu, a on se može izračunati iz kružnog isječka D_zCT_1 po formuli

$$\alpha_1 = \frac{s_1}{R_1} \quad (4)$$

(R_1 je radijus polukružne krivine po kojoj trči trkač u prvoj stazi)

α_{ki} = središnji kut za dio staze od točke D_1 gdje je ušao trkač iz staze »i« u prvu stazu do točke D_z , gdje ulazi trkač iz zadnje staze u prvu, koji se može izračunati iz kružnog isječka D_zCD_1 po formuli

$$\alpha_{ki} = \frac{s_{ki}}{R_1} \quad (5)$$

γ_i — središnji kut za dio staze od točke starta trkača iz staze »i« (T_1) do točke gdje je on ušao u prvu stazu D_1 , a on se može izračunavati po formuli

$$\gamma_i = \arctg\left(\frac{s_{ti}}{R_1}\right) \quad (6)$$

Da bi se mogli izračunati kutovi α_{ki} i γ_i po formulama (5) i (6) moraju se prethodno izračunati veličine s_{ki} i s_{ti} . Iz formula (1) i (2) slijedi da je

$$s_1 = s_z = s_i = s_{ki} + s_{ti}$$

odnosno da je

$$s_{ki} = s_1 - s_{ti} \quad (7)$$

a iz pravokutnog trokuta T_1D_1C može se izračunati kateta s_{ti} po formuli

$$s_{ti} = \sqrt{R_1^2 - R_i^2} \quad (8)$$

Nakon uvrštenja jednadžbi (4), (5), (6) i (7) u (3) bit će

$$\beta_i = 2 \cdot \pi - \frac{s_1}{R_1} + \frac{s_1 - s_{ti}}{R_1} + \arctg \left(\frac{s_{ti}}{R_1} \right) \quad (9)$$

tj.

$$\beta_i = 2 \cdot \pi - \frac{s_{ti}}{R_1} + \arctg \left(\frac{s_{ti}}{R_1} \right) \quad (10)$$

Uvrstili se još jednadžba (8) u (10) dobit će se da je

$$\beta_i = 2 \cdot \pi - \sqrt{\left(\frac{R_i}{R_1}\right)^2 - 1} + \arctg \left(\sqrt{\left(\frac{R_i}{R_1}\right)^2 - 1} \right) \quad (11)$$

gdje je kut β_i izražen u radijanima, a da bi ga se izrazilo u stupnjevima treba gornji izraz pomnožiti sa $360^\circ/(2 \cdot \pi)$, te će končana naša formula po kojoj se računa glasiti:

$$\beta_i = \left[2 \cdot \pi - \sqrt{\left(\frac{R_i}{R_1}\right)^2 - 1} + \arctg \left(\sqrt{\left(\frac{R_i}{R_1}\right)^2 - 1} \right) \right] \frac{180^\circ}{\pi} \quad (12)$$

3. PRAKTIČNA PRIMJENA

Kod standardnih 400 metara dugačkih atletskih staza startna mjesta za utrke na 1000 m, 3000 m i 500 m se podudaraju. U slučaju da su staze dulje od 400 m, što »Pravilnik za atletska takmičenja« ASJ dozvoljava, tada su startna mjesta za gore navedene utrke odvojena, odnosno obilježena sa tri evolvente. Takav smo slučaj imali u Titovom Drvaru.

Pomoću formule (12) mogu se izračunati kutovi pod kojim će se polarno iskolčiti točke startnih linija za utrke 1000 m, 3000 m, 5000 m i 10 000 m iz središta polukružnih krivina (C), računajući kut β_i od startnog mjesta trkača u prvoj stazi T_1 (vidi sl. 4) kao funkciju različitih radijusa R_i .

U praktičnom radu kao vrlo pogodno pokazalo se je i polarno iskolčenje iz točke T_1 , startnog mjesta trkača u pvoj stazi, jer su dužine d_i (od T_1 do T_i) vrlo male (vidi sliku 5). Pri tome se kut ν_i pod kojim treba iskolčiti bilo koju točku evolvente može izračunati transformacijom koordinatnog sustava iz središta kružne krivine C u točki T_1 , tj. iz jednadžbe

$$\vartheta_i = \frac{\pi}{2} + \text{arc tg} \left(\frac{X_i}{Y_i} \right) \quad (13)$$

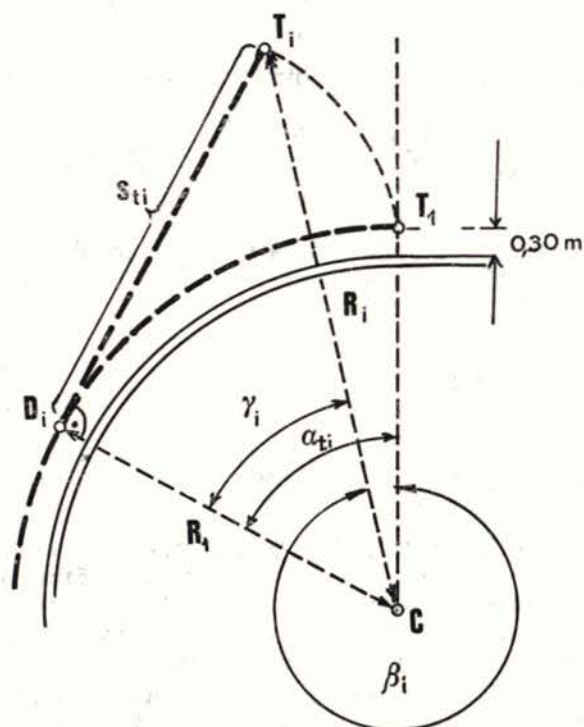
gdje je:

$$Y_i = R_1 \cdot \sin(360^\circ - \beta_i) \quad (14)$$

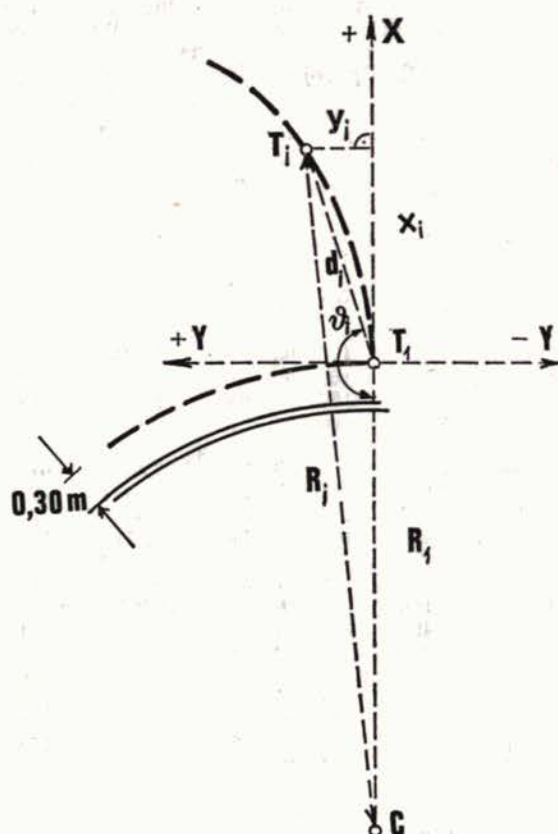
$$X_i = R_1 \cdot \cos(360^\circ - \beta_i) - R_1 \quad (15)$$

a udaljenost iskolčavane točke T_i od točke T_1 može se odrediti iz jednadžbe

$$d_i = \sqrt{X_i^2 + Y_i^2} \quad (16)$$



Slika 4.



Sl. 5. Polarno iskolčenje startne linije iz točke starta trkača u prvoj stazi (T_1), kao i njeno ortogonalno iskolčenje od pravca CT_1 .

Ako se može govoriti o nedostatku polarnog načina iskolčenja startnih linija iz točke T_1 , tada bi trebalo reći da su vizure, kad se postavi stativ s instrumentom visoko, prilično strme.

Ukoliko se na terenu ima prizma, tada se prethodnim računanjem ordinata i apscisa po formulama (14) i (15) startna linija može vrlo jednostavno iskolčiti i ortogonalnim načinom od pravca CT_1 .

U ovom radu prilažemo i tabelu 1 u kojoj se nalaze odabrane vrijednosti za iskolčenje startnih linija za 1000, 3000, 5000 i 10 000 m, ako je radijus putanje gibanja trkača u prvoj stazi $R_1 = 36,80$ m, tj. za građevinski radijus unutrašnjeg ruba staze (rubnjaka) $R_G = 36,50$ m. Potrebne vrijednosti elemenata za polarno iskolčenje startnih linija, kad se instrument nalazi u središtu kružne krivine (C), date su u stupcima (1) i (2), a iz stupaca (3) i (4) mogu se pročitati elementi za polarno iskolčenje istih startnih linija iz točke T_1 . Ukoliko se odluči za iskolčenje ortogonalnim načinom, tada se potrebne apscise i ordinate točaka evolventa (startnih linija) mogu uzeti iz stupca (5) i (6) tabele 1 za standardni radijus kružne krivine trkača u 1. stazi ($R_1 = 36,80$ m).

Tabela 1. Potrebni elementi za polarno iskolčenje startnih linija na 1000, 3000, 5000 i 10 000 m iz točke C, ili točke T₁, kao i ortogonalnim načinom od pravca CT₁ za kružne krivine građevinskog radijusa R_G = 36,50 m odnosno radijusa putanje trkača u prvoj stazi R₁ = 36,80 m.

R _i (1) (m)	β _i (2) ' "		d _i (3) (m)	δ _i (4) ' "		X (5) (m)	Y (6) (m)	STAZA (7)
36,800	360	00 00	0,000	180	00 00	0,000	0,000	1
37,110	359	57 30	0,311	175	01 53	0,310	0,027	
37,415	359	53 03	0,620	172	59 14	0,615	0,076	
37,720	359	47 20	0,930	171	24 17	0,920	0,139	
38,025	359	40 36	1,243	170	03 41	1,224	0,215	2
38,330	359	33 01	1,558	168	52 11	1,529	0,301	
38,635	359	24 42	1,875	167	47 08	1,833	0,397	
38,940	359	15 42	2,195	166	46 57	2,137	0,502	
39,245	359	06 05	2,517	165	50 35	2,440	0,616	3
39,550	358	55 55	2,840	164	57 20	2,743	0,737	
39,855	358	45 13	3,167	164	06 39	3,046	0,867	
40,160	358	34 02	3,495	163	18 11	3,347	1,004	
40,465	358	22 25	3,825	162	31 35	3,649	1,149	4
40,770	358	10 21	4,158	161	46 39	3,949	1,300	
41,075	357	57 53	4,493	161	03 09	4,548	1,624	
41,380	357	45 03	4,829	160	20 58	4,249	1,459	
41,685	357	31 50	5,168	159	39 55	4,846	1,796	5
41,990	357	18 17	5,510	158	59 55	5,144	1,975	
42,295	357	04 24	5,853	158	20 52	5,440	2,160	
42,600	356	50 12	6,198	157	42 41	5,735	2,351	
42,905	356	35 42	6,546	157	05 18	6,029	2,548	6
43,210	356	20 54	6,895	156	28 38	6,322	2,752	
43,515	356	05 50	7,247	155	52 38	6,614	2,962	
43,820	355	50 30	7,601	155	17 16	6,905	3,178	
44,125	355	34 54	7,957	154	42 29	7,194	3,399	7
44,430	355	19 03	8,314	154	08 14	7,482	3,627	
44,735	355	02 58	8,674	153	34 30	7,768	3,860	
45,040	354	46 40	9,036	153	01 14	8,053	4,100	
45,345	354	30 07	9,767	151	56 01	8,336	4,345	8
45,650	354	13 22	9,401	152	28 25	8,618	4,595	
45,955	353	56 24	10,135	151	24 01	8,898	4,851	
46,260	353	39 14	10,505	150	52 23	9,177	5,113	

4. ZAKLJUČAK

Stari konstruktivno-geometrijski način iskolčenja evolventi (startnih linija) pomoću zabijenih čavala (po obodu kružnog dijela zamišljene putanje gibanja trkača u prvoj stazi, tj. 30 cm od rubnjaka) i mjerne vrpce ima slijedeće nedostatke:

- Pri zatezanju vrpce silom s kojom se ona normalno zateže ($50 N^*$) čavli se savijaju, pa to onda prouzrokuje netočnost iskolčenja evolvente.
- Budući da vrpca ne leži ploštice na tartan stazi, već je naslonjena na nju samo svojom najmanjom dimenzijom (debljinom), ona se savije i to različito kako se odmotava od kružnice označene čavlima, te tako taj utjecaj djeluje na netočnost iskolčenja startnih linija.
- Treba se zabiti velik broj čavala po dijelu oboda kružne krivine (oko 90) za što treba dosta vremena.

Predloženim analitičkim načinom iskolčenja evolventata polarnom metodom iz središta kružnog dijela krivine, odnosno iz točke starta trkača u prvoj stazi ili pak ortogonalnom metodom od pravca koji spaja točku starta trkača u prvoj stazi (\bar{T}_1) i središte kružne krivine (C) mogu se iskolčiti točke zakrivljenih startnih linija s točnošću kakva se zahtijeva.

Elemente za iskolčenje startnih linija, ako je radijus kružne krivine putanje po kojoj trči trkač u prvoj stazi normalne (standardne) veličine $R_1 = 36,80$ m, može se direktno jednostavno pročitati iz priložene tabele br. 1 u ovom radu. Međutim, ako radijus kružne krivine putanje po kojoj trči trkač u prvoj stazi nije standardne veličine, tj. ako je $R_1 \neq 36,80$ m, tada se elementi za iskolčenje moraju izračunati po formulama datim u ovom radu. To se danas može učiniti vrlo jednostavno čak i najjednostavnijim džepnim elektroničkim računalima. te se nadamo da će predloženi način iskolčenja zakrivljenih startnih linija u obliku evolventi naći primjenu u praksi. Dapače, stručnjaci iz Atletskog saveza Hrvatske zamolili su nas da im pripremimo prijedlog za iskolčenje evolventi našim načinom, koji bi oni iznijeli na sastanku Internacionalne amaterske atletske federacije (IAAF).

LITERATURA

- [1] Atletski savez Jugoslavije: Pravila za atletska takmičenja, »Sportska tribina«, Zagreb, 1977.
- [2] Blanuša, D.: Viša matematika, I dio, drugi svezak; Tehnička knjiga 1965.
- [3] Capek, B. i Fanton, A.: Izvještaj o izmjeri i iskolčenju, te obilježavanju atletske staze na stadionu »Gradski vrt« u Osijeku, 1982. (neobjavljeno).
- [4] Rieke, H.: Vermessung der 400 m — Kreisbogen — Laufbahn mit Messband und Theodolit, südwestdeutsche Verlagsdruckerei G. Hornberger, 6757 Waldfishbach-Burgalben/Pfalz.

SAŽETAK

U ovom radu izvedena je formula za računanje kutova pod kojim će se iskolčiti točke — evolventi kružnica — startnih linija za trkače na 1000 m, 3000 m, 5000 m i 10 000 m iz središta polukružnih krivina. Zatim je izvedena i formula za računanje kutova pod kojima će se iskolčavati točke startne

* N — kratica za novu jedinicu za silu Newton. (Stara jedinica za silu je bila kp odnosno još ranije kg. $1 \text{ kg} = 1 \text{ kp} = 9,81 \text{ N} \approx 10 \text{ N}$)

linije (evolvente) iz točke starta trkača u prvoj stazi, a kut se pri tome mjeri od središta kružne krivine. Osim toga su dane formule za računanje apscisa i ordinata za iskolčenje ortogonalnom metodom. Za standardne zakrivljenosti atletske staze $R_1 = 36,80$ m elementi za iskolčenje polarnim metodama i ortogonalnim načinom date su u posebnoj tabeli.

ZUSAMMENFASSUNG

In diesem Aufsatz ist die Formel für die Berechnung, den Winkeln für die polare Absteckung der Kreisevolventen, die als Startlinien für 1000, 3000, 5000 und 10 000 — Meterlauf gelten, vom Kreismittelpunkt aus, abgeleitet. In der Vortsetzung ist die Formel für die Berechnung den Winkeln für die polare Absteckung der Evolvente, gemessen von der Startstelle des Laufers in der ersten Laufbahn abgeleitet, wobei sich die Anfangsrichtung auf den Kreismittelpunkt bezieht. Ausserdem sind die Formeln für die orthogonale Absteckung gegeben. Für die Leichtatleikbahnen mit standarden Bahnlänge von 400 — Meter ($R_1 = 36,80$ m) sind die Absteckungsmasse für obengenannte Methoden in der Tabelle angegeben.

Primljeno: 1985-09-15