UDK 528.024.4
Originalni znanstveni rad

TRIGONOMETRIJSKI NIVELMAN U REALNOM POLJU UBRZANJA SILE TEŽE PRI APROKSIMACIJI ZEMLJE ELIPSOIDOM

Asim BILAJBEGOVIĆ — Zagreb*

1. UVOD

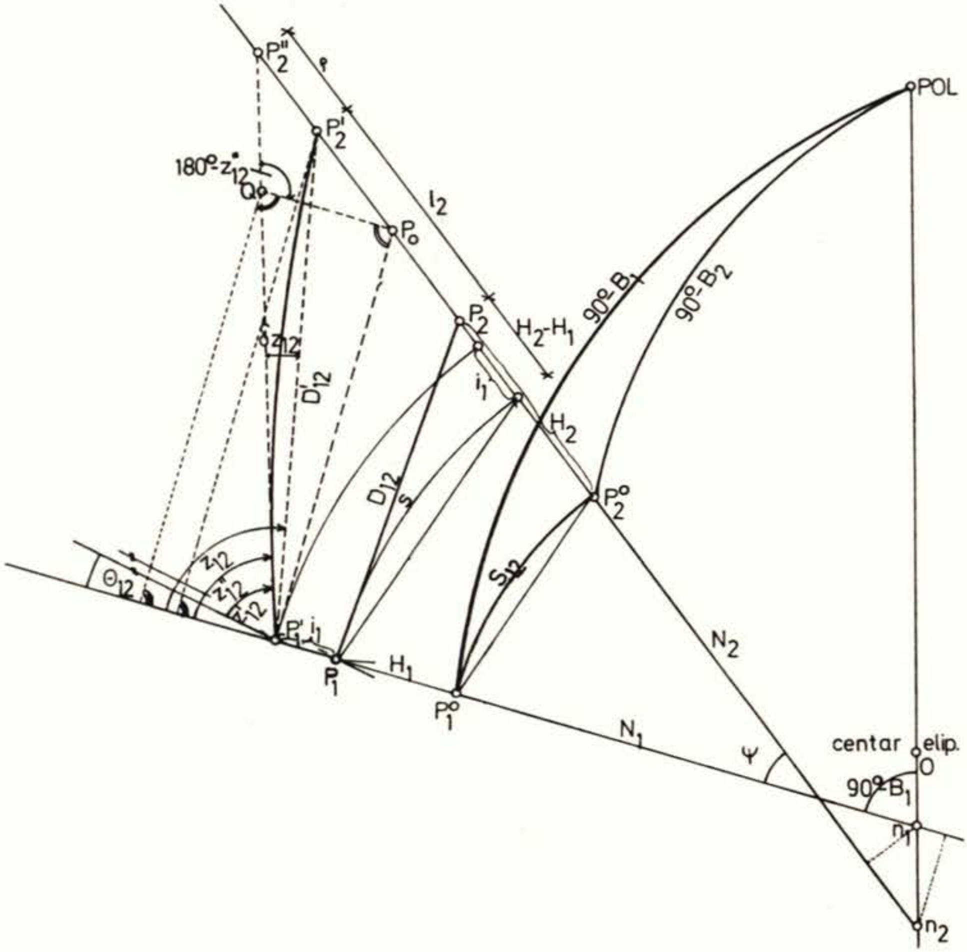
Osnovna poteškoća trodimenzionalne geodezije (prostornih geodetskih mreža) je mjerenje vertikalnih kutova s dovoljnom točnošću, odnosno određivanje utjecaja refrakcije. Mjerenjem udaljenosti točaka daljinomjerima s različitim valnim dužinama, pruža se mogućnost određivanja indeksa loma zraka uzduž putanje vala. Na taj se način omogućuje računanje utjecaja refrakcije na vertikalne kutove, odnosno trigonometrijski nivelman [3]. To je naročito aktuelan trigonometrijski nivelman na velike udaljenosti. Međutim, pri tome treba paziti na izbor duljina (ukoliko se radi o klasičnom trigonometrijskom nivelmanu), kako zbog utjecaja refrakcije tako i zbog težina visinskih razlika, koje su obrnuto proporcionalne kvadratu duljina. U SSSR tolerirale su se dužine do 20, odnosno 25 km ([2], str. 64). Točnost ove metode određivanja za najtočnije jednostrano određene visinske razlike (na većim udaljenostima) kreće se od cca 10—15 cm ([2] str. 64). Ta konstatacija omogućuje da se pri izvođenju formula zanemare pogreške reda veličine 2—3 cm. Matematički model računanja visinskih razlika u realnom polju ubrzanja sile teže pri aproksimaciji. Zemlje elipsoidom razrađen je u [4], str. 72—74. U toj su knjizi izvedene formule čiji se početni, mjereni, podaci odnose na centre točaka na fizičkoj površini Zemlje. Međutim, obično se na velikim udaljenostima vertikalni kutevi mjere s izdignutim instrumentom i signalom, te je interesantno izvesti formule koje se odnose na takav slučaj.

2. OSNOVNA FORMULA TRIGONOMETRIJSKOG NIVELMANA

Mjereći vertikalni kut s točke P_1 na P_2 (sl. 1) dobije se u biti astronomska zenitna duljina, te je neophodno preći s izmjerene (astronomske) na geodetsku zenitnu daljinu. Osim toga, zraka svjetlosti pri mjerenju prolazi kroz atmosferu i podložna je utjecaju refrakcije. Za zenitnu daljinu $P_1' P_2'$ (sl. 1) vrijedi slijedeća relacija:

$$z_{12} = z'_{12} + \delta z_{12} + \Theta_{12} = z^*_{12} + \delta z_{12}, \tag{1}$$

* Adresa autora: Doc. dr Asim Bilajbegović, Geodetski fakultet Zagreb, Kačićeva 26.



Sl. 1.

Na sl. 1 označuje:

P_1, P_2 — središta biljega točaka
P_1' — presjek horizontalne osi instrumenta i normale na elipsoid u točki P_1
P_2' — vrh signala na koji se vizira
P_2'' — pomaknutu sliku vrha signala zbog refrakcije
$P_2'P_2''$ — utjecaj refrakcije ρ
i — visinu instrumenta
l — visinu signala
B_i — geodetsku širinu točke i (i = 1.2).

gdje je:

δz_{12} — popravak za refrakciju
Θ — komponenta otklona vertikale u tački P_1 u smjeru spojnice $P_1 P_2$
z'_{12} — astronomska zenitna daljina

z_{12} — geodetska zenitna daljina (nadir — normala na retrenti elipsoid).
Popravak za refrakciju računa se po formuli ([4], str. 72)

$$\delta z_{12} = \rho'' \frac{k_{12}}{2R} D_{12} \sin z_{12} \approx \rho'' \frac{k_{12}}{2R} \cdot S_{12}, \tag{2}$$

gdje je:

$R = \sqrt{M \cdot N}$ — srednji polumjer Zemlje (funkcija srednje geodetske širine i dimenzija referentnog elipsoida)
D_{12} — kosa duljina strane $P_1 P_2$
S_{12} — projekcija duljine D_{12} na referentni elipsoid
k_{12} — integralni koeficijent refrakcije za mjerenja s točke P_1' na P_2'

Poznato je, da su normale na elipsoid, općenito, mimoilazni pravci, a ne sijeku malu os elipsoida u istoj točki. Izuzetno, kada se točke nalaze u ravnini istog meridijana ili paralele one se sijeku i nisu mimoilazni pravci. U klasičnoj teoriji trigonometrijskog nivelmana normale se sijeku u centru kugle koja aproksimira elipsoid na tom području. (To i nije loša aproksimacija za male udaljenosti). U ovim razmatranijma normale ne sijeku malu os elipsoida u istoj točki, sl. 1.

Ako se projicira izlomljena linija $P_1' P_2' n_2 n_1$ na pravac koji prolazi točkama n_1 i P_1 dobije se

$$(N_1 + H_1 + i_1) = -D'_{12} \cos z_{12} + (N_2 + H_2 + l_2) \cdot \cos \Psi - \\ - n_1 n_2 \sin B_1. \tag{3}$$

Da se izračuna $\cos \Psi$, neophodno je potražiti kosinuse kutova (α, β, γ) što ih normale određuju s koordinatnim osima geocentričnog prostornog koordinatnog sustava (v. [4], str. 17):

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \cos B \cos L \\ \cos \beta &= \cos B \sin L \\ \cos \gamma &= \sin B, \end{aligned} \tag{4}$$

gdje je:

B, L — geodetska širina, odnosno duljina promatrane točke.

Na osnovu poznate formule iz matematike, može se izračunati kosinus kuta što ga zatvaraju dva pravca, pomoću kosinusa kutova što ih zatvaraju pravci s koordinatnim osima, tj.

$$\cos \gamma = \cos \alpha_1 \cdot \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cdot \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cdot \cos \gamma_2,$$

odnosno

$$\cos \Psi = \sin B_1 \cdot \sin B_2 + \cos B_1 \cdot \cos B_2 \cos (L_1 - L_2) \tag{5}$$

Ukoliko se u (3) uvrsti umjesto $\cos\Psi$

$$\cos\Psi = 1 - 2\sin^2\frac{\Psi}{2},$$

nakon jednostavnog sređivanja

$$(H_2 - H_1) = D'_{12}\cos z_{12} + 2(H_2 + N_2 + l_2)\sin^2\frac{\Psi}{2} - (N_2 - N_1) + \\ + n_1 n_2 \sin B_1 + i_1 - l_2 \tag{6}$$

Analognim postupkom, tj. projiciranjem $P'_1 P'_2 n_2 n_1$ na pravac $n_2 P_2$ (sl. 1)

$$(H_1 - H_2) = D'_{21}\cos z_{21} + 2(N_1 + H_1 + l_1)\sin^2\frac{\Psi}{2} - (N_1 - N_2) - \\ - n_1 n_2 \sin B_2 + i_2 - l_1. \tag{7}$$

Koristeći poznate formule iz više geodezije ([4], str. 17)

$$N = \frac{a}{(1 - e^2\sin^2 B)^{1/2}} \approx a\,[1 + \frac{e^2}{2}\sin^2 B + \frac{3}{8}e^4\sin^4 B + \ldots]$$

$$\overline{On_i} = N_i\, e^2 \sin B_i \tag{8}$$

i uvođenjem slijedećih aproksimacija dobije se:

$$(N_1 - N_2) + n_1 n_2 \sin B_2 \approx (N_2 - N_1) - n_1 n_2 \sin B_1 \approx \frac{a e^2}{2}(\sin B_2 - \\ - \sin B_1)^2 \approx \frac{a e^2}{2}(B_2 - B_1)^2 \cos B_{sr}. \tag{9}$$

Ukoliko je $(B_2 - B_1) = 0{,}^\circ 225$, što odgovara duljini luka meridijana od cca 25 km, onda (9) iznosi oko 0,5 m. Drugim riječima, elipsoidni članovi u izrazima (6) i (7) su bitni i ne mogu se zanemariti. Međutim, u izrazima

$$2(N_2 + H_2 + l_2)\sin^2\frac{\Psi}{2}\ \text{i}\ 2(N_1 + H_1 + l_1)\sin^2\frac{\Psi}{2}^{*)}$$

mogu se izostaviti visine signala, te se izrazi (6) i (7) mogu napisati u obliku:

$$H_2 - H_1 = D'_{12}\cos z_{12} + 2(N_2 + H_2)\sin^2\frac{\Psi}{2} - (N_2 - N_1) +$$

---

* Zanemarivanje visine signala izaziva pogrešku u visinskoj razlici do 0,15 mm.

$$+ n_1 n_2 \sin B_1 + i_1 - l_2 \tag{10}$$

$$H_1 - H_2 = D'_{21} \cos z_{21} + 2(N_1 + H_1) \sin^2 \frac{\Psi}{2} - (N_1 - N_2) -$$
$$- n_1 n_2 \sin B_2 + i_2 - l_1 \tag{11}$$

Konačna visinska razlika je aritmetička sredina iz (10) i (11),

$$\Delta H = \frac{D'_{12} \cos z_{12} - D'_{21} \cos z_{21}}{2} + (N_2 - N_1 + H_2 - H_1) \sin^2 \frac{\Psi}{2} +$$
$$+ N_1 - N_2 + \frac{n_1 n_2}{2} (\sin B_1 + \sin B_2) + \frac{i_1 - i_2}{2} + \frac{l_1 - l_2}{2}$$

ili

$$\Delta H = \frac{D'_{12} \cos z_{12} - D'_{21} \cos z_{21}}{2} + (N_2 - N_1 + H_2 - H_1) \sin^2 \frac{\Psi}{2} +$$
$$+ \Delta_{12} + \frac{i_1 - i_2}{2} + \frac{l_1 - l_2}{2}, \tag{12}$$

gdje je:

$$\Delta_{12} = N_1 - N_2 + \frac{n_1 n_2}{2} (\sin B_1 + \sin B_2).$$

Ako se uvrste irazi (9) u predhodnu jednadžbu i zadrže članovi do reda veličine ae^4

$$\Delta_{12} = - \frac{a e^4}{8} (\sin^2 B_2 - \sin^2 B_1)(\sin B_2 - \sin B_1)^2.$$

Δ_{12} ima maksimalnu vrijednost za $\frac{B_1 + B_2}{2} = 30^\circ$. Za duljinu luka od 100 km iznosi svega 0,3 mm te se u (12) može zanemariti. Tada (12) glasi

$$\Delta H = \frac{D'_{12} \cos z_{12} - D'_{21} \cos z_{21}}{2} + (N_2 - N_1) \sin^2 \frac{\Psi}{2} +$$
$$+ (H_2 - H_1) \sin^2 \frac{\Psi}{2} + \frac{i_1 - i_2}{2} + \frac{l_1 - l_2}{2},$$

$$\Delta H \left(1 - \sin^2 \frac{\Psi}{2}\right) = \frac{D'_{12} \cos z_{12} - D'_{21} \cos z_{21}}{2} + (N_2 - N_1) \sin^2 \frac{\Psi}{2} +$$
$$+ \frac{i_1 - i_2}{2} + \frac{l_1 - l_2}{2}.$$

Kad se u prethodnom izrazu zanemari veličina

$(N_2 - N_1)\sin^2\frac{\Psi}{2}$, koja je i za $D'_{12} = 25$ km manja od 0,5 mm,

$$\Delta H = \frac{D'_{12}\cos z_{12} - D'_{21}\cos z_{21}}{2}\sec^2\frac{\Psi}{2} + \left(\frac{i_1 - i_2}{2} + \frac{l_1 - l_2}{2}\right)\sec^2\frac{\Psi}{2} \quad (13)$$

U izrazu (13) su kosinusi geodetskih zenitnih daljina koje se ne mjere, nego računaju pomoću (1) i (2);

$$z_{12} = z'_{12} + \rho''\frac{k_{12}}{2R}S_{12} + \Theta_{12} \qquad \text{i}$$

$$z_{21} = z'_{21} + \rho''\frac{k_{21}}{2R}S_{12} + \Theta_{21} \qquad (S_{12} \approx S_{21}) \quad (14)$$

Izračunajmo pomoću (14) $\cos z_{12}$ i $\cos z_{21}$ i razvijmo ih u Taylorov red.

$$\cos z_{12} = \cos z'_{12} - \sin z'_{12}\cdot\frac{k_{12}\cdot S_{12}}{2R} - \sin z'_{12}\cdot\frac{\Theta''_{12}}{\rho''}$$

$$\cos z_{21} = \cos z'_{21} - \sin z'_{21}\cdot\frac{k_{21}\cdot S_{12}}{2R} - \sin z'_{21}\cdot\frac{\Theta''_{21}}{\rho''}.$$

Uvrste li se dobiveni izrazi u (13) i uvede aproksimacija $D_{12}\cdot\cos z_{12} \approx S_{12}$ samo uz članove za utjecaj refrakcije i otklon vertikale, dobit će se

$$\Delta H = \frac{D'_{12}\cos z'_{12} - D'_{21}\cos z'_{21}}{2}\sec^2\frac{\Psi}{2} + \sec^2\frac{\Psi}{2}\left[-\frac{S_{12}}{2\rho''}(\Theta''_{12} - \Theta''_{21}) + \right.$$

$$\left. + \frac{i_1 - i_2}{2} + \frac{l_1 - l_2}{2} - \frac{k_{12} - k_{21}}{4R}S^2_{12}\right].$$

Pošto je Ψ mali kut (za 25 km $\psi \approx 0{,}^\circ 225$) može se u drugom članu desne strane predhodnog izraza $\sec\frac{\Psi}{2}$ aproksimirati jedinicom, te je konačno

$$\Delta H = \frac{D'_{12}\cos z'_{12} - D'_{21}\cos z'_{21}}{2}\sec^2\frac{\Psi}{2} - \frac{S_{12}}{2\rho''}(\Theta''_{12} - \Theta''_{21}) -$$

$$- \frac{k_{12} - k_{21}}{4R}S^2_{12} + \frac{i_1 - i_2}{2} + \frac{l_1 - l_2}{2}. \quad (15)$$

Razmotrimo u (15) popravak za utjecaj otklona vertikale

$$\Delta H_\Theta = -\frac{S_{12}}{2\rho''}(\Theta''_{12} - \Theta''_{21}) = -\frac{S_{12}}{2\rho''}(\Theta_1 - \Theta_2); \quad (16)$$

gdje je:

$$\Theta_1 = \xi_1 \cos A_{12} + \eta_1 \sin A_{12}; \qquad \Theta_2 = \xi_2 \cos A_{21} + \eta_2 \sin A_{21},$$

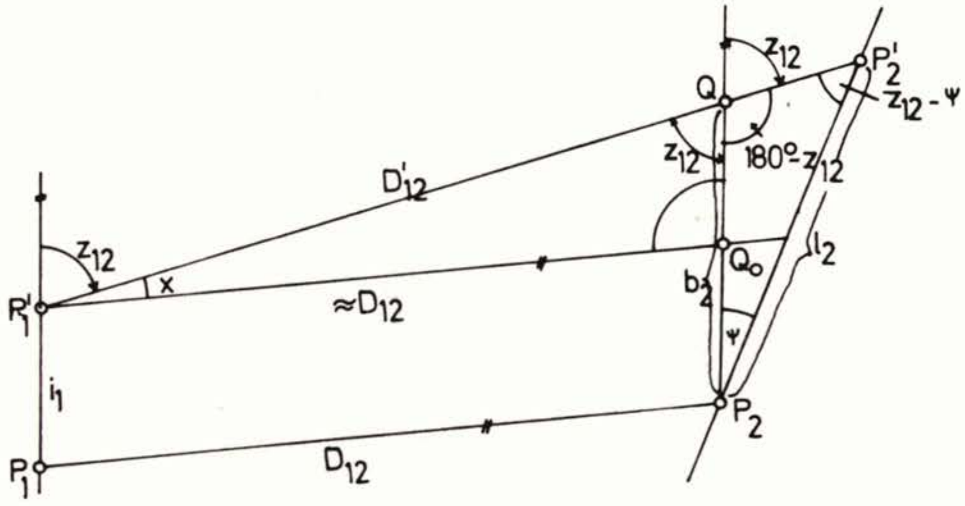
ξ, η — otklon vertikale duž meridijana, odnosno prvog vertikala
A_{ij} — azimut geodetske linije.

Ukoliko je $\Theta_{12} = -\Theta_{21} = 5'', 10'', 20'', 30'', 50''$, i $S_{12} = 25$ km, utjecaj otkolona vertikale računat po izrazu (16) jednak je 0.61 m. 1.21, 2.42, 3.64 odnosno 6.06 m. Zbog toga se popravak za utjecaj otklona vertikale ne može zanemariti kod većih duljina niti u ravničastim predjelima. Taj je iznos blizak ali nije identičan prirastu visine geoida između točaka P_1 i P_2

3. RAČUNANJE DULJINA D''_{12} i D'_{21}

U definitivnoj formuli za računanje visinskih razlika (15) imamo duljine D'_{12} i D'_{21} One se odnose na spojnicu horizontalne osi instrumenta i vrha signala. Upravo pri elektrooptičkom mjerenju duljina mjerimo D'_{12} i D'_{21}. To je i osnovna razlika između formula u ovom radu i u [4], gdje umjesto duljine D'_{12} dolazi D_{12} kao spojnica središta oznaka na točkama P_1 i P_2. Ova zamjena duljina može izazvati pogrešku i do 15 cm, što će se vidjeti iz narednih razmatranja.

Ukoliko je zadana prostorna duljina trigonometrijske strane D_{12}, za korištenje izraza (15) treba izračunati D'_{12}.



Sl. 2.

Iz trokuta $Q\,P_2'\,P_2$ (sl. 2):

$$\frac{b_2}{\sin(z_{12} - \Psi)} = \frac{l_2}{\sin z_{12}}$$

odnosno

$b_2 = l_2 \cos \Psi (1 - \mathrm{ctg}\, z_{12} \cdot \mathrm{tg}\, \Psi)$ (Ψ je mali kut za koji vrijedi $\cos \Psi \approx 1$, $\sin \Psi \approx \Psi$)

$b_2 = l_2 (1 - \Psi\, \mathrm{ctg}\, z_{12})$.

Iz istog trokuta

$$\frac{QP_2'}{\sin \Psi} = \frac{l_2}{\sin z_{12}}; \qquad - QP_2' = \frac{\Psi \cdot l_2}{\sin z_{12}}.$$

I za ekstremne vrijednosti $l_2 = 20$ m, $D_{12} = 25$ km, $z_{12} = 85°$ i $\psi = 0{,}°2245$ dobije se $b_2 = 19{,}993$ m $\approx l_2$ i $QP_2' = 0{,}078$ m.

Primjeni li se na trokut $P_1'QQ_0$ sinusni poučak, dobit će se

$$\frac{\sin x}{l_2 - i_1} = \frac{\sin z_{12}}{D_{12}},$$

odnosno

$$\sin x = \frac{l_2 - i_1}{D_{12}} \cdot \sin z_{12} \tag{17}$$

Osim toga

$$P_1'Q = \frac{D_{12}}{\sin z_{12}} \sin (z_{12} + x) = \frac{D_{12}}{\sin z_{12}} (\sin z_{12} \cos x + \cos z_{12} \sin x) =$$

$$= \frac{D_{12}}{\sin z_{12}} \sin z_{12} (\cos x + \mathrm{ctg}\, z_{12} \sin x) = D_{12} \sin x (\mathrm{ctg}\, z_{12} + \mathrm{ctg}\, x).$$

Prema sl. 2

$$D_{12}' = P_1'Q + QP_2' \approx P_1'Q = D_{12} \cdot \sin x (\mathrm{ctg}\, z_{12} + \mathrm{ctg}\, x). \tag{18}$$

Kad se u (15) umjesto D'_{12} uvrsti duljina $D_{12} = \overline{P_1 P_2}$ dobije se pri ekstremnim vrijednostima ($D_{12} = 25$ km, $z_{12} = 85°$, $i_1 = 1{,}4$ m i $l_2 = 20$ m), pogreška u visinskoj razlici od 0,158 m ($D'_{12} = 25001{,}617$ m). Očito pogreška od 0,141 m nije zanemariva veličina i treba ju uzeti u obzir.

Ukoliko imamo duljinu d_{12} izračunatu iz koordinata u Gauss-Krügerovoj projekciji, najprije treba izračunati duljinu geodetske linije s_{12} na elipsoidu (sl. 1), zatim s po formuli

$$s = S_{12} + \frac{S_{12}}{\sqrt{M \cdot N} + H_1} \tag{19}$$

Tada se duljina D_{12} može aproksimirati s duljinom s (v. [1]), i dalje koristiti izvedene formule.

LITERATURA:

[1] Bilajbegović, A.: Rukopis »Viša geodezija«.

[2] Gajdaev, P. A.: Matematičeskaja obrabotka geodičeskih setej, Nedra, Moskva 1977.

[3] Kahmen, H.: Berechnung vor Zeitreihen der Schwankungen der Refraktionskoeffizienten, Geodätische Netze in Landes- und Ingenieurvermessund. Konrad Wittwer; Stuttgart 1980.

[4] Pellinen/Deumlich: Theoretische Geodäsie, VEB, Verlag für Bauwesen, Berlin 1982.

SAŽETAK

U ovom radu su izvedene formule za računanje visinskih razlika trigonometrijskog nivelmana na većim udaljenostima, temeljene na mjerenim veličinama u realnom polju ubrzanja sile teže i aproksimaciji Zemlje elipsoidom. Izvedene formule mogu se korisno upotrijebiti kada su poznate duljine trigonometrijskih strana D_{ij}, pošto su dati izrazi za računanje duljine D'_{ij} (sl. 1), koje se odnose na spojnicu horizontalne osi instrumenta i vrha signala. Formule (15), (18) i (19) mogu korisno poslužiti za sastavljanje jednadžbi pogrešaka u izjednačenju trodimenzionalnih mreža.

ZUSAMMENFASSUNG

In diesem Aufsatz sind die Formeln für die Höhenbestimmung über grösseren Entfernungen angegeben. Die Formeln stützen sich auf dem reelen Schwerefeld der Erde, die mit einem Rotationsellipsoid approximiert ist. Die Formeln kann man nützlich verwenden bei bekannten trigonometrischen Seiten D_{ij}, da die Ausdrücke für die Berechnung der Strecken D_{ij}' bezieht sich auf die Verbindungslinie zwischen der Kippachse des Instrumentes und der Signalspitze.

Primljeno: 1985-04-19