

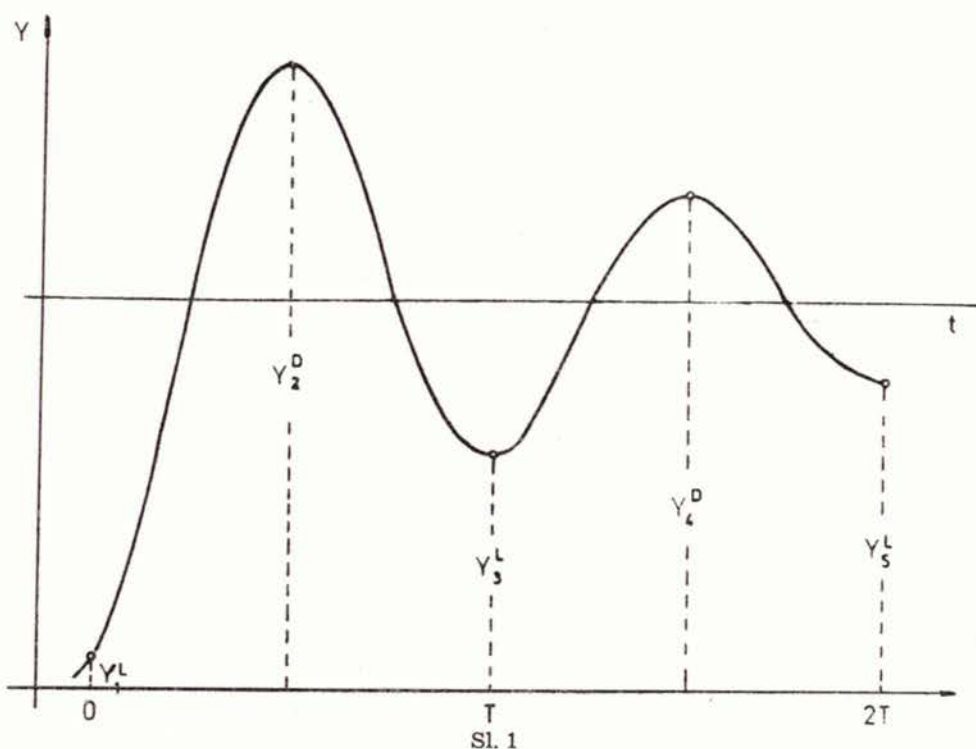
UDK 528.526.6

Originalni znanstveni rad

APROKSIMACIJA NIZA TOČAKA REVERZIJE OSI GYROTEODOLITA POLINOMOM PRIKLADNOG STUPNJA

Milivoj JUNAŠEVIĆ — Zagreb*

U primjeni takozvanih gyroteodolita za potrebe orijentacije geodetskih mreža postoje različite metode opažanja. Jedna od primjenjivanih metoda opažanja jeste metoda opažanja maksimalnih elongacija reverzionih točaka.

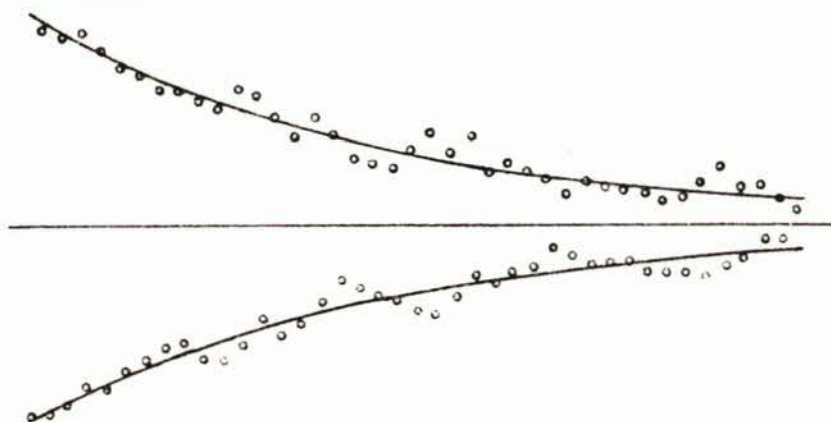


Promatramo li oscilacije osi gyrokompasa oko nekog srednjeg položaja ravnoteže moramo na osnovu rezultata opažanja konstatirati, da su u opažanim veličinama sadržani osim fizikalnih veličina i neki utjecaji, koji su dije-

* Adresa autora: Doc. dr Milivoj Junašević, Geodetski fakultet, Zagreb, Kačićeva 26

lom posljedica smetnji u fizikalnom procesu a dijelom i posljedica nesavršenstva osjetila opažača. Iako u literaturi postoji opis niza postupaka za određivanje najvjerojatnijeg položaja dinamičke ravnoteže (mislimo pritenstveno (na formule M. Schulera), ukazala se potreba da se u što kraćem vremenu pokuša odrediti najvjerojatniji položaj dinamičke ravnoteže a da se ne ulazi u odnos srednjih pogrešaka očitavanja i srednjih pogrešaka smetnje. Osciliranje osi gyroteodolita oko položaja dinamičke ravnoteže može se odvijati pod utjecajem linearnog i eksponencijalnog zakona prigušenja titranja. Ovisno o prirodi prigušenja izgrađuje se i odgovarajući deterministički i stohastički model fizikalnog procesa te prema tome izvodi odgovarajuća numerička obrada izmjerenih veličina.

Kako je odnos takozvanih pogrešaka smetnje i pogrešaka očitavanja nepoznat a ovisi o svojstvima instrumenata i osobnim karakteristikama opažača to smo pokušali pronaći put, da na izvjestan način »izbrišemo« osobne pogreške i pogreške izazvane smetnjama u radu instrumenta. Željeli smo dobiti rezultate primjenjive u geodetskoj praksi, a s druge strane da imaju temelj u računu izjednačenja. U tu svrhu obrađeni su rezultati opažanja reverzionih točaka s različitim gyroteodolitima. Ideja je bila da se niz točaka lijevo od srednjeg položaja i niz točaka desno od srednjeg položaja zamjene svaki sa po jednim polinomom prikladnog stupnja te se na taj način »izbrišu« obje vrste pogrešaka.



Sl. 2

Ovi polinomi određeni pod uvjetom da suma kvadrata odstupanja bude minimalna bili bi ovojnice odnosno envelope lijevih i desnih diskretnih točaka. Upotrijebimo li oznake Y_i za vrijednost opažane elongacije od nekog referentnog pravca a za vrijednost i -te točke envelope $y_i^{L,D}$ dobit ćemo razliku:

$$\Delta_i = a_0 + a_1 z_i^1 + a_2 z_i^2 + \dots + a_{r-1} z_i^{r-1} - Y_i \quad (01)$$

pri čemu indeksi i variraju u granicama: $1, 2, \dots, n/2$.

Na ovaj način dobivamo za sve točke koje leže s iste strane srednjeg položaja $n/2$ jednadžbi popravaka u slučaju da je n paran broj. Pisano matricama za svaku stranu vrijedi sustav:

$$\Delta = B \cdot x - l \quad (02)$$

pri čemu su:

Δ = vektor popravaka-odstupanja,
 $\left(\frac{n}{2}, l\right)$

B = matrica koeficijenata uz nepoznanice a
 $\left(\frac{n}{2}, r\right)$

l = vektor ordinata od nekog referentnog pravca,
 $\left(\frac{n}{2}, l\right)$

x = vektor nepoznatih koeficijenata polinoma
 a_0, a_1, \dots, a_{r-1}

$(r-1)$ = stupanj glačajućeg polinoma.

Izjednačenjem sustava (02) po metodi posrednih mjerenja dobivamo vektor nepoznanica:

$$x = (B^T B)^{-1} B^T \cdot l. \quad (03)$$

Pri tome srednja pogreška ordinate jedne točke koja se sastoji od pogreške mjerenja i pogreške aproksimacije polinomom iznosi:

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{\Delta^T \cdot \Delta}{\left(\frac{n}{2}\right) - r}}, \quad (04)$$

a jednadžba glačajućeg polinoma:

$$P = x^T \cdot z, \quad (05)$$

pri čemu je: $z^T = [1, z, z^2, \dots, z^{r-1}]$.

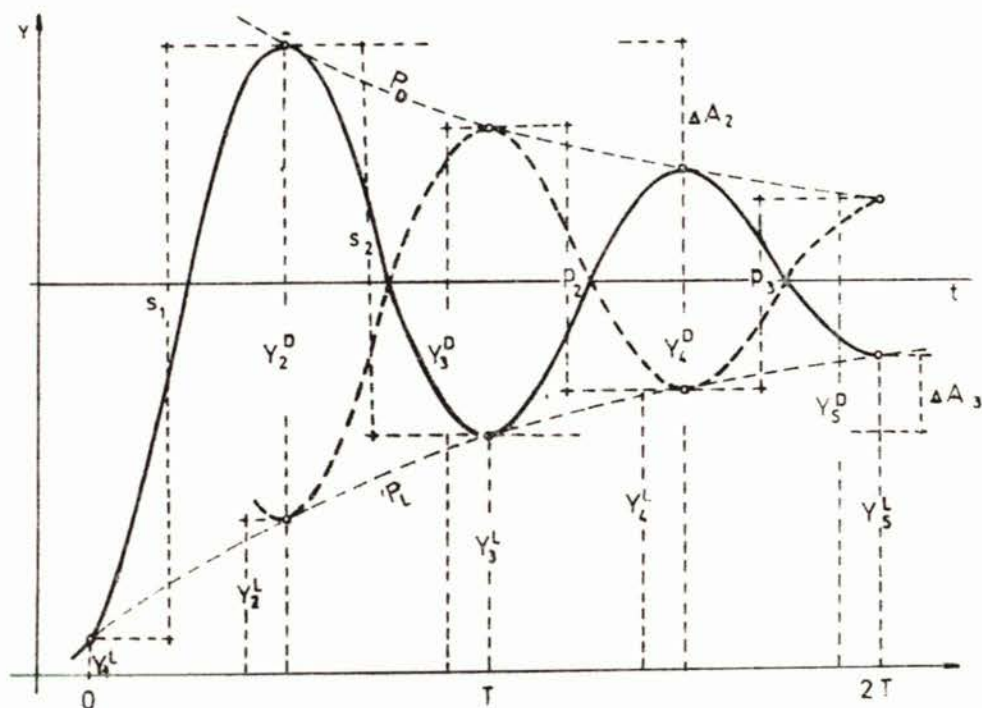
Pomoću jednadžbi (05) moguće nam je sada izračunati »teoretske« vrijednosti elongacija reverzionih točaka odnosno:

$$\begin{aligned} Y_i^{(L)}, & \quad (i = 1, 3, 5, \dots, n-1), \\ Y_j^{(D)}, & \quad (j = i+1 = 2, 4, \dots, n), \end{aligned} \quad (06)$$

pri tome je smanjenje amplitude odnosno elongacija

$$\begin{aligned} \Delta A_i^{(L)} &= Y_i - Y_{i+2}, & (i = 1, 3, 5, \dots, n-3) \\ \Delta A_j^{(D)} &= Y_j - Y_{j+2}, & (j = i+1 = 2, 4, \dots, n-2), \end{aligned} \quad (07)$$

u vremenskom intervalu $\Delta t = T$.



Sl. 3

Na ovaj način dobivamo osim teoretskih vrijednosti za opažane reverziona točke i teoretske vrijednosti za $n/2$ »virtualnih« točaka.

Označimo ove vrijednosti sa:

$$i \quad \bar{Y}_j^{(L)}, \quad (j = 2, 4, \dots, n-2) \quad (08)$$

$$\bar{Y}_i^{(D)}, \quad (i = j+1 = 3, 5, \dots, n-1).$$

Nalazi li se početna točka lijevo od srednjeg položaja ravnoteže moguće je za svaki par točaka odrediti srednju vrijednost

$$G_j = \frac{Y_j^{(D)} + \bar{Y}_j^{(L)}}{2}, \quad (j = 2, 3, 4, \dots, n-1). \quad (09)$$

Srednja vrijednost položaja dinamičke ravnoteže G_0 za cijeli niz opažanih točaka dobiva se kao aritmetička sredina, to jest:

$$G_0 = \frac{1}{2(n-2)} \left(\sum_{j=2}^{n-1} Y_j^{(D)} + \sum_{j=2}^{n-1} \bar{Y}_j^{(L)} \right). \quad (10)$$

Teoretski bi moralo vrijediti:

$$G_2 = G_3 = \dots = G_{n-1} = G_0.$$

Formiramo razlike $\Delta_j = G_j - G_0$.

Želimo utvrditi, da li srednji položaj na početku opažanja niza i pri kraju niza ima jednaku vrijednost odnosno, da li dolazi tijekom vremena opažanja do njegove promjene. Isto tako iz opažanih vrijednosti formiramo razlike:

$$\begin{aligned} S_i &= Y_{i+1}^{(D)} - Y_i^{(L)}, & (i = 1, 3, \dots, n-1) \\ S_j &= Y_j^{(D)} - Y_{j+1}^{(L)}, & (j = i+1 = 2, 4, \dots, n-2). \end{aligned} \quad (12)$$

Tada analogno postupku M. Schulera možemo izračunati omjer prigušenja

$$\alpha_L = \frac{S_{L+1}}{S_L} \quad (L = 1, 2, \dots, n-2) \quad (13)$$

i logaritmički dekrement polutitraja:

$$X_{KL} = \ln \frac{1}{\alpha_L} = -\ln \alpha_L. \quad (14)$$

Isti postupak možemo primijeniti i za »virtualne« točke izračunate pomoću polinoma P_L i P_D pa pišemo:

$$\begin{aligned} P_i &= \bar{Y}_{i+2}^{(D)} - \bar{Y}_{i+1}^{(L)}, & (i = 1, 3, \dots, n-3) \\ P_j &= \bar{Y}_{j+1}^{(D)} - \bar{Y}_{j+2}^{(L)}, & (j = i+1 = 2, 4, \dots, n-4). \end{aligned} \quad (15)$$

Analogno izrazu (13) dobivamo:

$$\bar{\alpha}_L = \left| \frac{P_{L+1}}{P_L} \right| \quad \text{i} \quad \bar{X}'_{KL} = \ln \frac{1}{\bar{\alpha}_L} = -\ln \left| \frac{P_L}{P_{L+1}} \right| \quad (16)$$

pri čemu je $(L = 1, 2, \dots, n-4)$.

Ukoliko α nije konstantno za cijeli niz opažanih točaka nego je na primjer padajuća vremenska funkcija $\alpha(t)$ tada treba vrijediti:

$$\alpha_L > \bar{\alpha}_L > \alpha_{L+1}. \quad (17)$$

Po ovom postupku analiziran je niz od 90 opažanih reverzionih točaka. Kao mjera za ocjenu prikladnosti polinoma odgovarajućeg stupnja primjenjena je srednja pogreška mjerenja jedinične težine m_0 .

Pregled srednjih pogrešaka m_0 za polinome P_L i P_D

| stupanj polinoma | lijevi polinom | desni polinom |
|------------------|------------------|------------------|
| 1. | $\pm 0.615\ 778$ | $\pm 0.501\ 926$ |
| 2. | 0.106 437 | 0.104 168 |
| 3. | 0.016 069 | 0.015 179 |
| 4. | 0.006 506 | 0.005 553 |
| 5. | 0.004 060 | 0.003 864 |
| 6. | 0.004 071 | 0.003 887 |
| 7. | 0.003 853 | 0.003 815 |
| 8. | 0.003 734 | 0.003 734 |
| 9. | 0.003 688 | 0.003 626 |

Zadovoljili smo se s polinomima 5. stupnja, jer se iz gornje tabele vidi, da se povišenjem stupnja polinoma iznad 5, srednja pogreška m_0 ne smanjuje značajno. Također, kod polinoma visokog stupnja pojavljuje se opasnost velikih oscilacija.

Pregled koeficijenata polinoma 5. stupnja

| a_i | lijevi polinom | desni polinom |
|-------|-------------------------------|------------------------------|
| a_0 | $+0.34113094 \times 10^3$ | $+0.32822098 \times 10^3$ |
| a_1 | -0.35017961 | $+0.36156318$ |
| a_2 | $+0.99515014 \times 10^{-2}$ | $-0.10518021 \times 10^{-1}$ |
| a_3 | $-0.19411684 \times 10^{-3}$ | $+0.21799641 \times 10^{-3}$ |
| a_4 | $+0.261184005 \times 10^{-5}$ | $-0.31652130 \times 10^{-5}$ |
| a_5 | $-0.17467116 \times 10^{-7}$ | $+0.22181020 \times 10^{-7}$ |

Isti niz opažanih točaka reverzije izjednačen je strogo po metodi najmanjih kvadrata uzimajući u obzir eksponencijalni zakon gušenja i odnos između kvadrata pogrešaka očitavanja i pogrešaka smetnje

$$\lambda = \frac{m_0^2}{m_{sm}^2} = 1 \quad (18)$$

te je za najvjerojatniji srednji položaj dobivena vrijednost (v. [3])

$$G = 334.876\ 57 \pm 0.00\ 06$$

Usporedimo li taj rezultat s vrijednošću određenoj po predloženoj metodi

$$G_p = 334.8\ 76\ 50$$

dobivamo razliku od samo 7^{cc} .

Primjenjena metoda omogućuje nadalje da se u opažanom nizu točaka ispitata pojava »Drifta«, te da se taj utjecaj eliminira iz konačnog rezultata.

LITERATURA:

- [1] Fabian, L.: Zufallsschwingungen und ihre Behandlung, Berlin 1973.
- [2] Grafarend, E. W.: Shar-Effekt-Tests an Vermessungskreiseln, AVN 1972, str. 318.
- [3] Junašević, M.: Analyse und Ausgleichung von Umkehrpunktbeobachtungen an Kreiseltheodoliten mit besonderer Berücksichtigung von systematischen Fehlerinflüssen, Bonn 1977.
- [4] Kohlrausch, W.: Praktische Physik, Bd. 1. Berlin—Leipzig 1944, str. 70.
- [5] Linnik, J. W.: Die Methode der kleinsten Quadrate in moderner Darstellung, Berlin 1961.
- [6] Magnus, K.: Schwingungen. Eine Einführung in die theoretische Behandlung von Schwingungsproblemen, Stuttgart 1969, str. 71.
- [7] Shuler, M. i Wolf, H.: Zur Bestimmung der wahrscheinlichsten Gleichgewichtslage bei ungedämpften und gedämpften Schwingungen, Mitteil. aus dem Marktsch. 1954, str. 97.
- [8] Wolf, H.: Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate, Bonn 1968.

SAŽETAK

U obradi opažanog niza točaka reverzije osi gyroteodolita nisu uzete u obzir pogreške očitavanja i pogreške smetnje. Za točke koje leže s iste strane srednjeg položaja izračunati su polinomi, kojima se rezultati opažanja glačaju. Pomoću jednadžbi polinoma izračunate su teoretske vrijednosti ordinata opažanih točaka te su one poslužile za računanje najvjerojatnijeg položaja dinamičke ravnoteže osi zvrka. Rezultat dobiven po strogoj metodi i ovdje predloženoj razlikuje se za 7^{cc}.

ZUSAMMENFASSUNG

Bei Bearbeiten der Reihe von Umkehrpunktbeobachtungen der Kreiseltheodolitenachse wurden die Ablese- und die Störfehler nicht berücksichtigt. Für die Punkte die am gleichen Seite der Gleichgewichtslage liegen wurden Polynome gerechnet, mit welchen beobachteten Resultate geglättet werden. Hilfs Polynomegleichungen wurden die theoretischen Ordinatenwerte der beobachteten Umkehrpunkten gerechnet, und dieselbe dienten für die Bestimmung der plausibelsten Lage des dynamischen Gleichgewichtes der Kreiselachse.

Primljeno: 1984-12-15