

OPĆE RJEŠENJE ODREĐIVANJA ELEMENATA POLOŽAJA I OBLIKA VERTIKALNOG STOŠCA PRIMJENOM METODE POSTEPENOG PRIBLIŽAVANJA

Ivan KRIVIČIĆ — Rijeka*

1. POSTAVLJANJE PROBLEMA

Za određivanje položaja pravca osi rotacionog stošca potrebno je sa dva stajališta očitati tangirajuće pravce na njegov lijevi i desni rub, zadržavajući nagib vizure, i vodeći pritom računa o potrebi njihove orijentacije. Treba dakle imati dva nezavisna para (orijentiranih) vizurnih pravaca simetričnih na ravni-
nu koja prolazi stajalištem i sadrži os stošca. Aritmetičke sredine takvih pravaca daju nam nužno potrebno dva pravca čije će se pripadne vertikalne ravnine si-
jeći u pravcu osi stošca. Može se pokazati da su ta mjerenja dovoljna za određi-
vanje položaja i oblika promatranog stošca, tj. kuta u njegovom vrhu, njegovu
visinu te koordinata dirališta vizurnih pravaca, ako uz ta mjerenja imamo uda-
ljenosti stajališta do osi stošca i visinsku razliku stajališta.

2. RJEŠAVANJE PROBLEMA

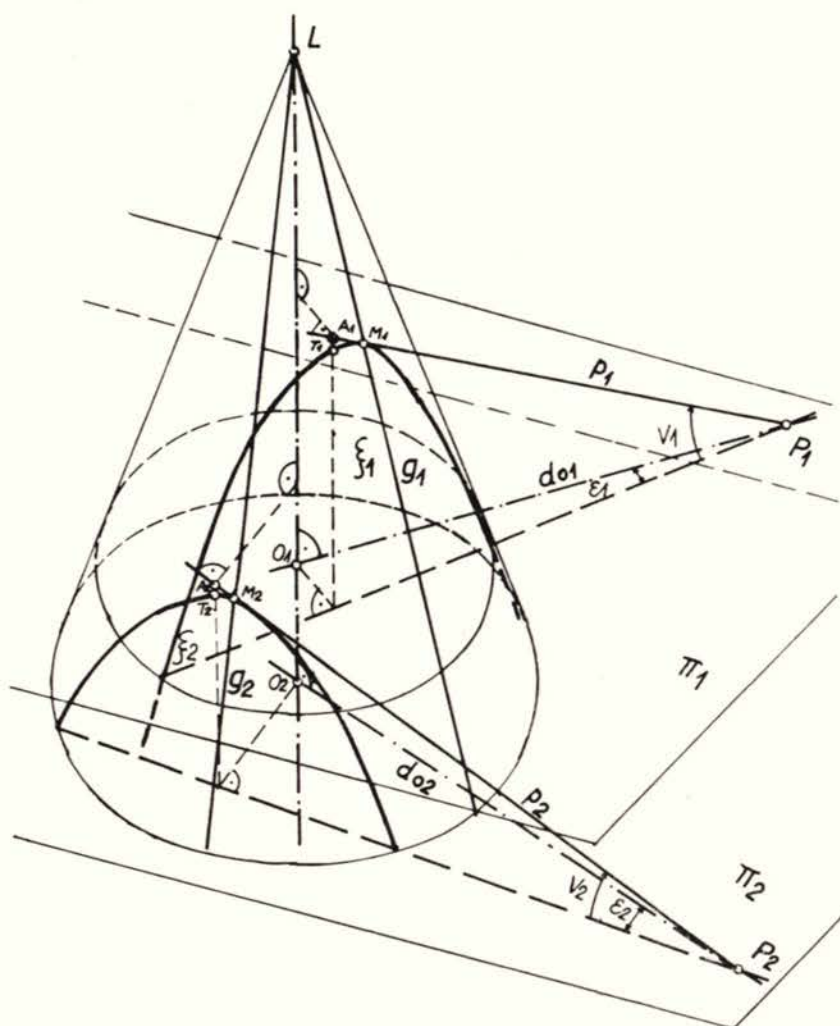
Na slici 1. su sa P_1 i P_2 označena potrebna nam dva stajališta na ra-
zinama Π_1 i Π_2 i prvotno izračunatim udaljenostima d_{01} i d_{02} od osi stošca, sa ko-
jih su očitani pravci p_1 i p_2 što dodiruju stožac u točkama M_1 i M_2 na pripadnim
izvodnicama g_1 i g_2 . (Na slici su prikazani samo lijevi pravci dvaju parova).

Ako sada vertikalne presjeke označene sa ξ_1 i ξ_2 , što ih tvore vertikalne
ravnine u kojima leže vizurni pravci p_1 i p_2 , zarotiramo oko osi stošca i do-
vedemo u međusobno paralelan položaj, kao što je to prikazano na slici 2., mo-
žemo primjeniti metodu postepenog približavanja, na isti način kako je pri-
kazano u radovima [4] i [3], u kojima je objavljena.

3. PRIMJER

U ovdje priloženom numeričkom primjeru obrađen je stožac identičan (su-
kladan) onom iz primjera u [4] i [3]. Uspoređivanjem priloženog primjera
s primjerima iz navedenih radova možemo zapaziti da su rezultati pojedinih
iteracija različiti, ali konvergiraju identičnim vrijednostima za elemente koji su

* Adresa autora: Mr Ivan Krivičić, dipl. inž. Geodetski zavod, Rijeka, F. Kres-
nika 33.



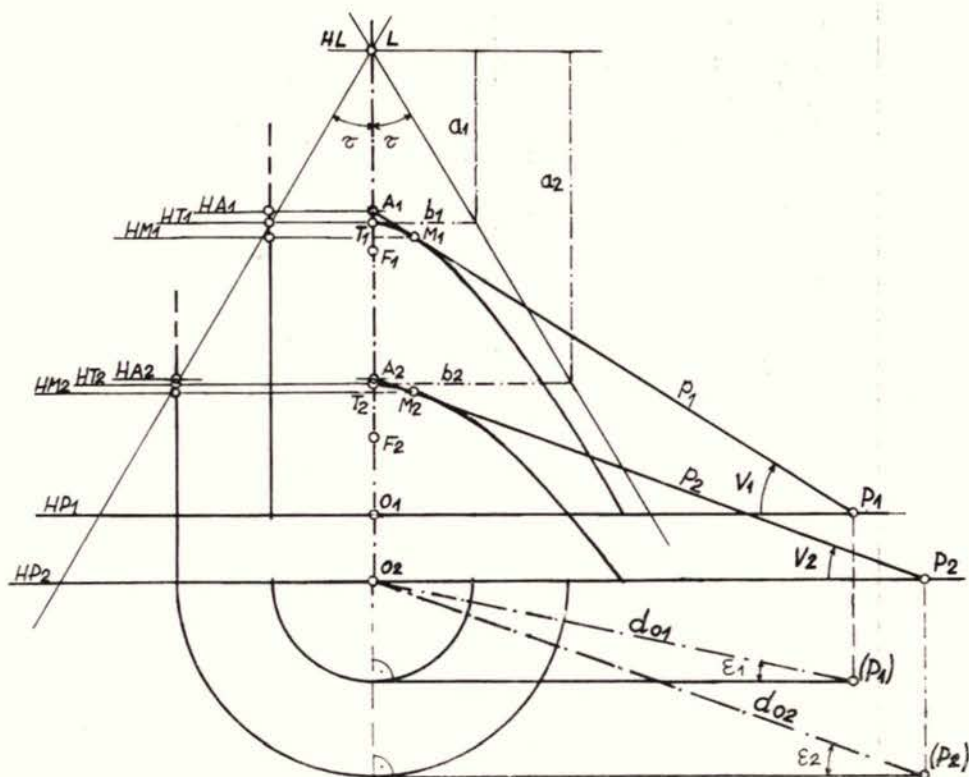
Sl. 1

određeni oblikom stošca, što je i za očekivati. Naime, postavimo li u ovom primjeru $d_{01} = d_{02} = d_0 = 100$ i $HP_1 = HP_2 = 0$ dobivamo primjer iz [3], što svodi problem od općeg slučaja, to jest slučaja kad su vizurni pravci mimosmjerni, na poseban slučaj, kad se oni sijeku ili polaze iz točke P. Potonji slučaj je moguće riješiti i direktno, kako su u [2] to pokazali: mr. D. Jovičić, M. Lapaine i S. Petrović.

4. O TOČNOSTI IZRAČUNATOG KUTA τ

Uvid u točnost računanja kuta τ dobit ćemo posredstvom funkcije:

$$\tau = \arctg \frac{b_2 - b_1}{H_{T2} - H_{T1}},$$



Sl. 2

čiji će nas totalni diferencijal dovesti do (inače poznatog) izraza:

$$d\tau = \frac{\cos \tau}{\Delta g} \cdot db_2 - \frac{\cos \tau}{\Delta g} \cdot db_1 - \frac{\sin \tau}{\Delta g} \cdot dH_{T2} + \frac{\sin \tau}{\Delta g} \cdot dH_{T1}. \quad (1)$$

Veličine b i H_T nisu nezavisne već su funkcije mjerenih veličina ϵ i V , i to:

$$b = d_0 \cdot \sin \epsilon \quad \text{ i } \quad$$

$$H_T \cong H_A = H_p + d_0 \cdot \cos \epsilon \cdot \operatorname{tg} V.$$

Ovdje je za H_T uzeta njena prva aproksimacija, koja je jednaka H_A (vidi formule u glavi primjera računanja), što je za ovu svrhu moguće učiniti, dok je Δg jednak odsječku na izvodnici omeđenom tjemena dviju hiperbola (vidi slike 1 i 2).

Daljnjom primjenom diferencijalnog računa, preko izraza:

$$db = d_0 \cdot \cos \epsilon \cdot d\epsilon \quad \text{ i } \quad$$

$$dH_T = -d_0 \cdot \operatorname{tg} V \cdot \sin \epsilon \cdot d\epsilon + d_0 \cdot \frac{\cos \epsilon}{\cos^2 V} \cdot dV, \quad (2)$$

Primjer računanja koordinata točke tangiranja i vršnog kuta konusa metodom postepenog približavanja.*

Broj pres- jeka staja- lišta	Vert. kut V		H _P		H _I ⁽ⁿ⁾	tg τ ⁽ⁿ⁾ = k ₀ ⁽ⁿ⁾		a ⁽ⁿ⁾ = $\frac{b}{k_0^{(n)}}$	Y _M ⁽ⁿ⁾	X _M ⁽ⁿ⁾	Δa ⁽ⁿ⁾	Δ ² a ⁽ⁿ⁾	H _M ⁽ⁿ⁾	Vert. kut V			
	Horiz. kut ε	ε	d ₀	R = b													
						2	3								4	5	6
1	26°34'00"	13.29723	100	20.56349	62.23212	0.543212	0.553414	37.85537	5.80376	39.33421	1.42324	1.42324	60.75328	27°16'15"22			
					60.80888			37.15752	5.92171	38.66753	1.45104	0.02780	59.29886	26°34'49"89			
					60.78107			37.14324	5.92418	38.65391	1.45163	0.00058	59.27040	26°34'01"04			
					60.76049			37.14294	5.92423	38.65362	1.45164	0.00001	59.26981	26°34'00"02			
2	11°52'00"	20.56349	120	34.69356	60.78048	0.553627	0.553631	37.14293	5.92423	38.65360	1.45164	0.00000	59.26980	26°34'00"00			
					36.22007			63.86744	6.03123	64.82534	0.94374	0.94374	35.26218	17°57'02"65			
					35.27633			62.69007	6.14802	63.66679	0.96174	0.01800	34.29961	17°30'31"05			
					35.25833			62.66598	6.15046	63.64309	0.96212	0.00038	34.28122	17°30'00"64			
2	16°48'17,5	120	34.69356	34.69356	35.25796	28°58'13,1		62.66547	6.16051	63.64260	0.96212	0.00001	34.28083	17°30'00"01			
					35.25795			62.66547	6.15051	63.64260	0.96212	0.00000	34.28082	17°30'00"00			

* Ovaj primjer je računat na računar: TI Programm. 59, po programu koji je izradio Ivan Antoliš, Geodetski Zavod Rijeka.

dolazimo do izraza koji u diferencijalnom obliku povezuje računati kut sa mjerenim kutevima ε i V , a glasi:

$$\begin{aligned} d\tau = & \frac{d_{02}}{\Delta g} \cdot (\cos \tau \cdot \cos \varepsilon_2 + \sin \tau \cdot \operatorname{tg} V_2 \cdot \sin \varepsilon_2) \cdot d\varepsilon_2 - \\ & - \frac{d_{01}}{\Delta g} \cdot (\cos \tau \cdot \cos \varepsilon_1 + \sin \tau \cdot \operatorname{tg} V_1 \cdot \sin \varepsilon_1) \cdot d\varepsilon_1 - \\ & - \frac{d_{02}}{\Delta g} \cdot \frac{\sin \tau \cdot \cos \varepsilon_2}{\cos^2 V_2} \cdot dV_2 + \frac{d_{01}}{\Delta g} \cdot \frac{\sin \tau \cdot \cos \varepsilon_1}{\cos^2 V_1} \cdot dV_1 \end{aligned} \quad (3)$$

Zamjenom diferencijala srednjim pogreškama, uz istovremeno uvođenje je-dnakosti:

$$\begin{aligned} m_{\varepsilon_1}^2 &= m_0^2 + \frac{m_h^2}{2} \cdot \operatorname{tg}^2 V_1, \\ m_{\varepsilon_2}^2 &= m_0^2 + \frac{m_h^2}{2} \cdot \operatorname{tg}^2 V_2 \quad \text{i} \\ m_{V_1}^2 &= m_{V_2}^2 = m_0^2 + m_h^2, \end{aligned}$$

u kojima je:

m_0 = srednja pogreška viziranja i očitavanja pravca

m_h = srednja pogreška horizontiranja alhidadne libele, odnosno indeksa vertikalnog kruga,

gornji izraz postaje:

$$\begin{aligned} m_\tau^2 = & \frac{1}{\Delta g^2} \cdot \left[d_{02}^2 \cdot (\cos \tau \cdot \cos \varepsilon_2 + \sin \tau \cdot \operatorname{tg} V_2 \cdot \sin \varepsilon_2)^2 + \right. \\ & + d_{01}^2 \cdot (\cos \tau \cdot \cos \varepsilon_1 + \sin \tau \cdot \operatorname{tg} V_1 \cdot \sin \varepsilon_1)^2 + \\ & + \sin^2 \tau \cdot d_{02}^2 \cdot \frac{\cos^2 \varepsilon_2}{\cos^4 V_2} + \sin^2 \tau \cdot d_{01}^2 \cdot \frac{\cos^2 \varepsilon_1}{\cos^4 V_1} \left. \right] \cdot m_0^2 + \\ & + \frac{1}{\Delta g^2} \cdot \left[\frac{d_{02}^2 \cdot \operatorname{tg}^2 V_2}{2} \cdot (\cos \tau \cdot \cos \varepsilon_2 + \sin \tau \cdot \operatorname{tg} V_2 \cdot \sin \varepsilon_2)^2 + \right. \\ & + \frac{d_{01}^2 \cdot \operatorname{tg}^2 V_1}{2} \cdot (\cos \tau \cdot \cos \varepsilon_1 + \sin \tau \cdot \operatorname{tg} V_1 \cdot \sin \varepsilon_1)^2 + \\ & + \sin^2 \tau \cdot d_{02}^2 \cdot \frac{\cos^2 \varepsilon_2}{\cos^4 V_2} + \sin^2 \tau \cdot d_{01}^2 \cdot \frac{\cos^2 \varepsilon_1}{\cos^4 V_1} \left. \right] \cdot m_h^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Na taj način smo dobili m_τ kao funkciju od m_0 i m_h .

Promatrajući dobivene izraze lako uočavamo da oni postaju neodređeni za $\Delta g = 0$ i $V = 90^\circ$, što je logično i očekivano, a ujedno ukazuje na potrebu izbjegavanja jako strmih vizura, te tangiranja stošca u dva bliska nivoa, što je očito i iz slika.

Na kraju svakako treba napomenuti da izvedena formula (4) za srednju pogrešku izračunatog kuta strogo vrijedi uz pretpostavku zadanih ili nezavisnim mjerenjima određenih veličina d_{01} i d_{02} . No, u svakom slučaju ona nam može korisno poslužiti da dobijemo uvid u točnost računanja kuta τ , i pruža nam korisne indikacije o uvjetima kojih se trebamo pridržavati prilikom mjerenja.

5. ZAKLJUČAK

Možemo zaključiti da metoda postepenog približavanja rješava postavljeni problem za opći slučaj, polazeći od originalnih mjerenja, a međusobni položaj dva potrebna para vizurnih pravaca isto kao i položaj stajališta za nju je irelevantna činjenica.

Napomenimo još da ovo rješenje pored teoretskog ima i svoj praktički značaj i primjenu, jer iziskuje opažanje objekta sa dva stajališta, od kojih sa svakog treba biti vidljiv samo jedan nivo objekta, što znači da za izvršenje zadatka istovremenog određivanja položaja i oblika promatranog objekta trebamo minimalni broj mjerenja.

6. LITERATURA

- [1] Čubranić, N.: Teorija pogrešaka s računom izjednačenja, Tehnička knjiga, Zagreb, 1967.
- [2] Jovičić, D., Lapaine M., Petrović S.: Prilog određivanju koordinata dirališta vizurnog pravca i nagiba izvodnice vertikalnog objekta oblika stošca, Geodetski list, 1983, 4—6, 97—100.
- [3] Krivičić, I.: Neke geodetske metode mjerenja pri osmatranju deformacija i pomaka vertikalnih objekata, magistarski rad, Geodetski fakultet, Zagreb, 1981.
- [4] Krivičić, I.: Određivanje koordinata dirališta vizurnog pravca i nagiba izvodnice vertikalnog objekta oblika stošca, Geodetski list, 1982, 7—9, 179—193.
- [5] Narobe, Z.: Mjerenje horizontalnih pomaka na visokim objektima, Geodetski list, 1980, 4—6, 91—96.

SAŽETAK

U članku je prikazana primjena metode postepenog približavanja za cjelovito rješenje problema određivanja položaja i elemenata vertikalnog objekta oblika stošca u općem slučaju, koristeći se s dva para simetričnih dodirnih vizura sa dva nezavisna stajališta, dakle minimalnim brojem mjerenja.

ABSTRACT

In the present paper is shown the use of the gradual approaching method for an integral solution of the problem relative to the determination of the position and elements of the vertical cone shaped object, in general case, using two pairs of symmetrical tangential sight lines from two independent station points, that is with the minimal number of measurements.

Primljeno: 1984-11-28