UDK 528.489.063:625.11
Originalni znanstveni rad

PRIMJENA SPLAJNOVA ZA ODREĐIVANJE STACIONAŽE DUŽ ŽELJEZNIČKIH PRUGA

Marko DŽAPO, Milivoj JUNAŠEVIĆ, Miljenko LAPAINE, Svetozar PETROVIĆ — Zagreb*

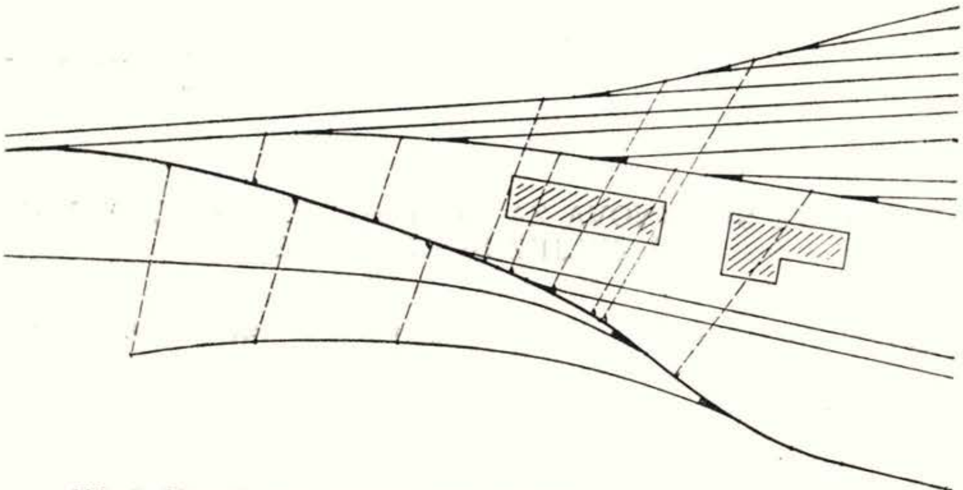
1. UVOD

Za potrebe jugoslavenskih željeznica provedena je izmjera željezničke stanice Split—Predgrađe. Snimanje je urađeno klasičnim geodetskim metodama. U tu svrhu razvijena je odgovarajuća poligonska mreža povezana na državnu trigonometrijsku mrežu, sa koje je detalj sniman polarno i ortogonalno. Za polarno snimanje korišten je elektrooptički daljinomjer DI4L čija je točnost mjerenja udaljenosti po tvorničkim podacima ± (5 mm + 5 mm/km). Dužine kolosijeka su na terenu izmjerene neposredno čeličnom mjeraćom vrpcom.

Željeli smo ispitati: da li precizna tahimetrija omogućuje zadovaljavajuće indirektno određivanje stacionaža ključnih objekata i duljina kolosijeka? To je predstavljalo izvjestan problem, jer je situacija ovdje ipak specifična. Naime po željezničkim propisima tražilo se da os na koju se odnose sve stacionaže bude glavni (prolazni) kolosijek. Neprilika je u tome što se pojedine točke čije se stacionaže traže nalaze čak i po 200 metara od ove osi. Direktno mjerenje tih stacionaža nije bilo moguće, budući da »bacanje« tako dugačkih okomica ne bi osiguravalo zadovoljavajuće točnosti, a osim toga poneke od tih okomica uopće se ne bi mogle realizirati, jer postojeći objekti onemogućavaju optičku vidljivost između točke čija se stacionaža traži i spomenute osi glavnog kolosijeka (vidi sliku 1.). Zbog toga su stacionaže izračunate iz rezultata mjerenja provedenih pri snimanju željezničke stanice.

Osim toga, čak kad bi direktno mjerenje stacionaža bilo i moguće, ono bi zahtijevalo više terenskog rada nego ovdje opisani postupak, koji to nadoknađuje većim »kancelarijskim radom«. Međutim, ako se podaci mjerenja ionako obrađuju pomoću elektroničkog računala (za što je dovoljno čak i stolno računalo, npr. HP 9845A kakvog smo mi koristili), tada je dodatni kancelarijski posao kojeg donosi izračunavanje stacionaža praktički zanemariv.

* Adresa autora: Marko Džapo, dipl. inž., doc. dr Milivoj Junašević, Miljenko Lapaine, dipl. inž., Svetozar Petrović, dipl. inž. — Geodetski fakultet, Zagreb, Kačićeva 26.



Slika 1. Situacija kad postojeći objekti onemogućavaju »bacanje« okomica

2. POSTAVLJANJE PROBLEMA I RAZLIČITE MOGUĆNOSTI NJEGOVOG RJEŠAVANJA

Budući da su sve točke snimljene polarno, poznate su nam njihove položajne koordinate. Dakle: glavni kolosijek (os na koju se odnose stacionaže) određen je nizom točaka čije koordinate znamo. Za jednu (početnu) od njih zadana je i stacionaža. Položajne koordinate znamo i za sve karakteristične točke koje nas interesiraju. Da bismo odredili njihove stacionaže treba ih ortogonalno projicirati na glavni kolosijek i odrediti duljine glavnog kolosijeka od točke sa zadanom stacionažom do dobivenih nožišta.

a) *Direktno mjerenje* potrebnih duljina na terenu nije došlo u obzir iz razloga opisanih u Uvodu.

b) *Grafičko rješenje* — iscrtavanje okomica iz karakterističnih točaka na glavni kolosijek i odmjeravanje udaljenosti na planu je veći posao, a i točnost je bitno manja nego kod analitičkog, obzirom da je situacioni snimak izrađen u mjerilu 1 : 1 000.

c) *Analitičko rješenje*

Glavni kolosijek koji je detaljno snimljen, prikaže se kao krivulja čija se jednadžba određuje računskim putem. Također se računski dolazi i do projekcija svih točaka koje nas zanimaju na tu krivulju, kao i do duljina pripadnih dijelova te krivulje.

Prednost postupka je u tome, da ga je moguće potpuno automatizirati tako da se on u cijelosti odvija u elektroničkom računalu. Prije ovakvog rješavanja problema treba rasčistiti slijedeća pitanja:

— izbor matematičkog modela (vrsta krivulje),

— način projiciranja točaka na krivulju (normala kao okomica ili kao najkraća spojnica, mogućnost egzaktnog rješenja ili jedino numeričke metode),

— način računanja duljina luka

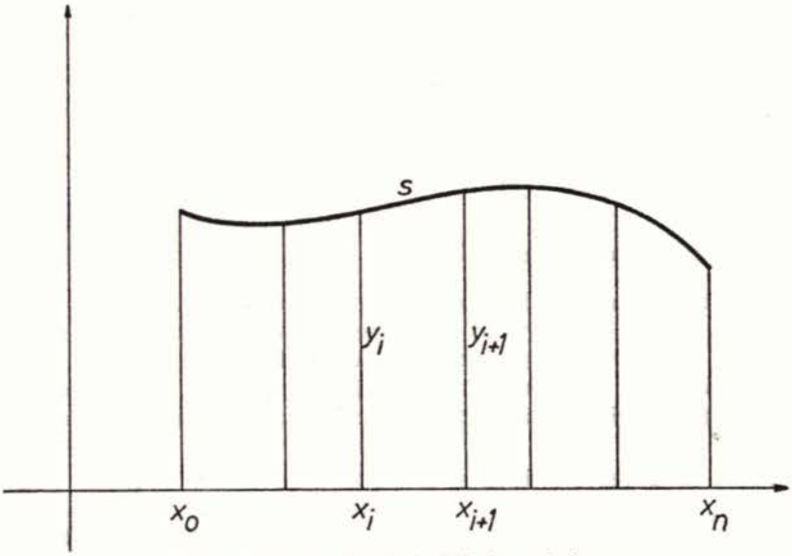
3. RJEŠENJE

3.1. *Izbor krivulje*

Znamo da se željeznički kolosijek projektira kao krivulja koja se obično sastoji od dijelova pravaca, kružnih lukova i prelaznica (najčešće kubnih parabola). Elemente spomenutih dijelova kolosijeka nismo pruzeli iz projekta jer se radilo o snimku izvedenog (faktičnog) stanja koje se može znatno razlikovati od projektiranog. Umjesto toga imali smo niz položajno određenih točaka na glavnom kolosijeku. Trebalo je dakle izvršiti takav izbor krivulje koji je pogodan za bilo koji dio, bilo kakvog kolosijeka.

Na prvi pogled izgleda da se tako može dobiti jedino prilično gruba aproksimacija. Međutim, baš naprotiv, niz snimljenih točaka (pod pretpostavkom da su razumno odabrane, npr. u skladu s Pravilnikom za državni premjer — u našem slučaju sve krivine su snimane čak tako da visina luka nad tetivom nije prelazila 0.1M, gdje je M nazivnik mjerila, tj. 10 cm) vjerno predstavlja stvarno stanje, a to je ono što se želi prikazati. Budući da se radi o čeličnim tračnicama, kao prirodan izbor nameću se kubični splajnovi.

Vrlo je interesantan odlomak u knjizi [3], str. 41—42, u kome se govori da bi prometnice ustvari trebalo projektirati kao kubične splajnove. Pojam kubičnog splajna ne opisuje se u tom odlomku analitičkim izrazom, nego njegovom mehaničkom realizacijom — satvitljivim ravnalom, koje je postojalo i upotrebljavalo se prije analitičkog izraza i iz čijeg je oblika analitički izraz i izveden. Međutim, zbog poteškoća kod matematičkog obuhvaćanja kubičnog splanja (projektiranje prometnica starije je od kompjutera, a i citirana knjiga potiče iz vremena prije njihovog burnog razvoja) aproksimira ga se dijelovima pravaca, kružnim lukovima i prelaznicima. Lorenz navodi da su ispitivanja pokazala da se pomoću navedenih elemenata može veoma dobro aproksimirati kubični splajn, tj. da je prometnica sastavljena od takvih elemenata veoma bliska kubičnom splajnu (!).



Slika 2. Interpolacija kubičnim splajnom

Podsjetimo se definicije kubičnog splajna. Neka je interval [a, b] podijeljen na n podintervala, ne nužno jednakih duljina: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Kubični splajn s je realna funkcija definirana na [a, b] sa svojstvima

$$s \in C^2 [a, b]$$

$$s \,|\, [x_i, x_{i+1}] \tag{1}$$

je polinom najviše 3. stupnja

$$(i = 0, 1, \ldots, n - 1).$$

x_i zovu se čvorovi splajna. Ako je još ispunjen uvjet

$$s(x_i) = yi \qquad i = 0, 1, \ldots, n \tag{2}$$

gdje su y_i zadane vrijednosti, kažemo da je s interpolacioni kubični splajn (slika 2.).

Ako je

$$s(x) = a_i + b_i (x - x_i) + c_i (x - x_i)^2 + d_i (x - x_i)^3 \quad \text{za } x \in [x_i, x_{i+1}] \tag{3}$$

parametre a_i, b_i, c_i, d_i moći ćemo odrediti iz relacija

$$\begin{aligned} a_i &= y_i \\ b_i &= \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{h_i}{6} (s''_{i+1} + 2s''_i) \\ c_i &= \frac{s''_i}{2} \\ d_i &= \frac{s''_{i+1} - s''_i}{6h_i} \qquad i = 0, 1, \ldots, n - 1 \end{aligned} \tag{4}$$

gdje smo označili $h_i = x_{i+1} - x_i$, $s_i'' = s''(x_i)$, nakon što smo riješili odgovarajući sistem linearnih jednadžbi

$$h_{i-1} s''_{i-1} + 2 (h_{i-1} + h_i) s''_i + h_i s''_{i+1} = 6 \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} \right) \tag{5}$$

$$i = 1, \ldots, n - 1$$

uz dva rubna uvjeta (vidjeti [2]).

3.2 *Projiciranje točaka na kubični splajn*

Ortogonalna projekcija T_0' točke T_0 na kubični splajn može se teoretski dobiti na dva načina: kao presjek okomice povučene iz točke T_0 na splajn ili kao točka na splajnu koja je najbliža točki T_0. Može se pokazati da egzaktno rješavanje navedenih problema vodi na rješavanje iste jednadžbe 5. stupnja koja se općenito ne da riješiti direktno, nego odgovarajućim iterativnim metodama.

Da bismo to izbjegli, smislili smo metodu kojom uz unaprijed zadanu točnost dobijemo traženu točku T_0'. Ova metoda se sastoji u tome da se najprije nađe čvor na modelu glavnog kolosijeka (tj. splajnu) koji je najbliži točki T_0. Zatim se prođe malim korakom (uvjetovanim traženom točnošću) po kubnim parabolama koje se sastaju u spomenutom najbližem čvoru. Pri tome se za svaku točku računa udaljenost do T_0, i najkraća od njih određuje položaj tražene točke T_0'.

3.3 *Računanje duljine kolosijeka između dvije točke*

Duljinu kolosijeka između dvije točke izračunat ćemo kao duljinu luka kubičnog splajna.

Da bismo mogli odrediti duljinu luka kubičnog splajna moramo znati odrediti duljinu luka kubne parabole između dviju točaka. Ako je splajn određen relacijom (3), onda se duljina luka između točaka s apscisama x_p i x_k računa po formuli:

$$l = \int_{x_p}^{x_k} \sqrt{1 + s'^2(x)}\, dx = \int_{x_p}^{x_k} \sqrt{1 + (b_i + 2c_i(x - x_i) + 3d_i(x - x_i)^2)^2}\, dx$$

Može se pokazati da se ovaj integral općenito ne može riješiti metodama direktne integracije. Umjesto toga treba koristiti neku od metoda numeričke integracije. Opredijelili smo se za Simpsonovu formulu, kojom se duljina luka splajna dobiva točno na centimetar najčešće već za n = 4.

»U praksi bi bilo dovoljno računati duljinu luka splajna uzimajući veliki broj gusto poredanih točaka na krivulji i umjesto duljine luka između svake dvije točke uzme se sekanta. Ovakav postupak postaje vrlo jednostavan koristeći kompjuter.« (Citat iz [1], str. 85.). Ne možemo se složiti s citiranom tvrdnjom, jer smo isprobali zamjenu duljine luka splajna duljinom odgovarajuće poligonalne linije, pa se pokazalo da je za istu točnost, na trasi duljine oko 1 km, potrebno stotinjak puta više računskih operacija nego primjenom Simpsonove formule. Također smatramo da se Simpsonova formula može jednako jednostavno programirati.

4. ZAKLJUČAK

Pri donošenju zaključaka o primjenjivosti opisane metode i točnosti koju ona omogućava treba najprije uočiti da je jedino kritično mjesto u cijelom postupku činjenica, da se svaka krivulja sastoji od beskonačno mnogo točaka, a snimljeno ih je uvijek samo konačno mnogo i na temelju njih treba naći analitički izraz (u našem slučaju jednadžbu kubičnog splajna) kojeg ćemo u daljnjem postupku upotrebljavati kao matematički model stvarne krivulje. Kao što smo već razjasnili u prethodnom poglavlju bitna komponenta rješenja ovog problema je razuman izbor točaka koje će biti snimljene. Drugo pitanje koje bi se još moglo postaviti jeste: da li umjesto kubičnog splajna postoji bolji izbor? Ne možemo sa sigurnošću tvrditi da je ovo apsolutno najbolji zbor, ali da je dobar može se vidjeti iz njegovog opravdanja navedenog u prethodnom poglavlju, kao i iz točnosti koje se ovim postupkom mogu postići, o čemu će biti govora malo kasnije. Svi ostali dijelovi opisane metode, osim izbora točaka pri snimanju i opredjeljivanja za kubični splajn, su »egzaktni« u smislu da ih se može provesti sa unaprijed zadanom točnošću.

Ekonomičnost i efikasnost postupka je uglavnom vidljiva na prvi pogled, budući da se sve odvija u elektroničkom računalu, a ne na terenu ili manuelnim kancelarijskim radom. Efikasnost potvrđuju i iskustva koja smo stekli prilikom rješavanja konkretnog zadatka, iako se radilo o prvoj, dakle u nekom smislu eksperimentalnoj primjeni razrađene metode.

Aspektu točnosti može se pristupiti na dva načina.

a) Teoretsko razmatranje očekivanih točnosti uz neke pretpostavke, npr. pretpostavku da se stvarni kolosijek sastoji od dijelova koji su savršeni (ili barem »savršeni« u okvirima tražene točnosti)pravci, kružnice i kubne parabole. Postavlja se pitanje koliko će kubni splajn odstupati od takvih krivulja. Ovakvo razmatranje može biti predmet jednog drugog rada.

b) Zaključke o postignutoj točnosti može se donijeti i na temelju eksperimentalne provjere, tako da se prilikom snimanja na terenu izvede i odgovarajući broj mjerenja koja nisu potrebna za sam postupak, nego kao kontrola i sredstvo da se procijeni postignuta točnost. U našem slučaju, izvjestan broj duljina kolosijeka između pojedinih točaka izmjeren je direktno na terenu vrpcom i uspoređen sa izračunatim duljinama luka splajna između pripadnih točaka. Na temelju 26 kontrolnih točaka raspoređenih duž 3 kolosijeka (ukupna duljina 3 km) pokazalo se da je srednja kvadratna razlika stacionaža

$$\sqrt{\frac{[dd]}{n}} = \pm 6 \text{ cm}$$

gdje su d razlike stacionaža određenih na jedan i drugi način. Znači da točnost određivanja stacionaža opisanim postupkom sigurno nije lošija od nekoliko centimetara, što je više nego dobro za opisanu svrhu. Najvjerojatnije je ta točnost i mnogo bolja (možda i milimetarska), ali je pitanje da li se to može utvrditi na temelju ovakve eksperimentalne provjere.

Sve u svemu, opisani postupak je pri rješavanju postavljenog zadatka opravdao očekivanja, kako u pogledu ekonomičnosti, tako i u pogledu točnosti.

LITERATURA:

[1] Domandžić, D.: Prijelazne krivulje i splajnovi kod projektiranja prometnica, Magistarski rad, Zagreb, 1983.

[2] Jovičić, D., Lapaine, M., Petrović, S., Žarinac-Frančula, B.: Rubni uvjeti pri interpolaciji kubičnim splajnovima, Zbornik radova V znanstvenog skupa Proračunavanje i projektiranje pomoću računala, Stubičke toplice, 1983, 497—502.

[3] Lorenz, H.: Trassierung und Gestaltung von Strassen und Autobahnen, Baumverlag GMBH, Wiesbaden und Berlin, 1971.

SAŽETAK

U radu se opisuje problematika indirektnog određivanja duljina željezničkog kolosijeka i stacionaža na temelju podataka izmjerenih na terenu preciznom tahimetrijom. Daje se vlastita metoda koja se temelji na kubičnom splajnu kao modelu glavnog-prolaznog kolosijeka. Naime, on je obično projektiran kao krivulja sastavljena od dijelova pravaca, kružnih lukova i prelaznica (najčešće kubnih parabola). Opisuje se primjena ove metode na jednom praktičnom primjeru.

ABSTRACT

The paper deals with the topic of determining lenghts of railroad tracks and distances along them indirectly, using field data obtained by precision tacheometry. The authors give their own method based on the cubic spline as a model of the main — active track, which is usually planned as a curve consisting of parts of straight lines, circles and transition curves (in rule cubic parabolas). The application of the method to a practical case is also described.

Primljeno: 1985-02-06