UDK 517.5
519.281
Pregledni rad

ANALIZA REGISTRACIJE KONTINUIRANIH MJERENJA

Radovan MARJANOVIĆ — Zagreb*

Kontinuirana mjerenja se najčešće obavljaju preko dužih vremenskih intervala. Iz tog razloga kontinuirane registracije sadrže velike količine podataka, koje je jedino uz pomoć kompjutera moguće analizirati. U tu svrhu koriste se registracije u diskretnim vremenskim intervalima. Taj se zadatak obavlja digitalizacijom, [9], ili se već prije registracije analogni signali iz mjernih senzora konvertiraju, [8], u digitalne. Prednosti i nedostaci obih načina registracije su poznati, [7]. U ovom pregledu bit će opisani najčešće korišteni postupci pri analizi vremenskih nizova uz samo najnužnije teoretsko izvođenje matematičkih algoritama. Teorijske osnove ovih izraza dostupne su iz obilno citirane literature, a zbog svoje kompleksnosti i opširnosti prešle bi okvire ovog prikaza. Svrha rada je upoznavanje čitalaaca s potrebama i mogućnostima, koje je najčešće moguće iskoristiti primjenom već programiranih paketa programa za računski stroj. Tako npr. za sisteme IBM postoje gotovi programi pod zajedničkim nazivom SSP (Scientific Subroutine Package) ili IMSL (. . . Medical Subroutine Library) kojima je moguće riješiti gotovo sve ovdje navedene zadatke.

Analiza vremenskih nizova, između drugih zadataka, sastoji se u tome da se odredi, [11]:

a) s kojim parametrom ili funkcijom se osobine vremenskog niza mogu opisati,

b) koliko se informacija gubi postupkom digitalizacije tj. registracijom vektora y umjesto kontinuirane funkcije y(t),

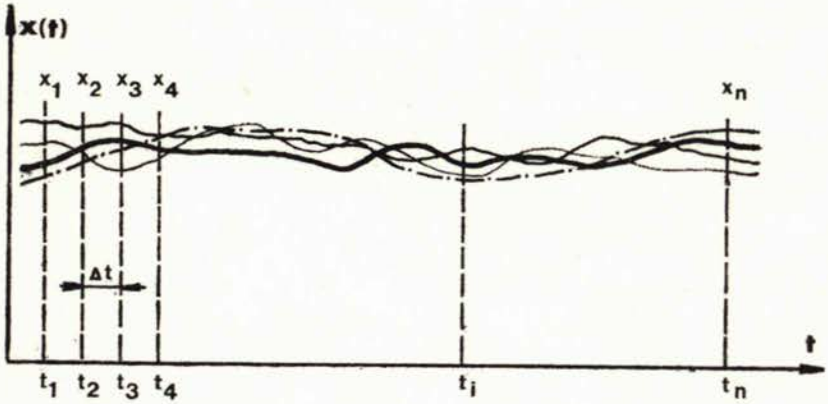
c) frekventni sadržaj vremenskog niza,

d) odnos i zavisnost dvaju ili više istovremeno registriranih vremenskih nizova.

Analizi kontinuiranih registracija prethodi eliminacija determinističkog dijela iz registriranog signala tj. eliminacija trenda koja se provodi postupkom regresije ili filtracijom [9]. Promatramo li takvu funkciju koja je potpuno oslobođena svog determinističkog dijela, uočavamo da su razlike mjerenih vrijednosti prouzročene samo pogreškama sistema za njihovo određivanje. Drugim riječima registrirana funkcija z(t) predstavlja samo jednu od mnogih funkcija

Adresa autora: Dr Radovan Marjanović, dipl. inž. RGN fakultet, 41000 Zagreb, Pierottijeva br. 6.

koje bismo mogli registrirati, [10]. Kažemo samo jedna od j realizacija procesa sl. 1.



sl. 1 Prikaz različitih realizacija nekog stohastičkog procesa.

Za svaki trenutak t_i uvodimo stoga po jednu slučajnu varijablu nazvanu očekivana vrijednost μ_i, koja se računa kao aritmetička sredina, [6]:

$$\mu_i = E\left\{x_i\right\} = \lim_{m \to \infty} \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} x_{ij}.$$

Računanjem srednje vrijednosti svih realizacija dobivamo neku drugu funkciju $\mu(t)$ koju nazivamo očekivana funkcija:

$$\mu(t) = E\left\{x(t)\right\} = \lim_{m \to \infty} \left\{\frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} x_j(t)\right\}.$$

U specijalnom slučaju u kome μ ne ovisi o t tj. μ = konstantan, moguće je μ odrediti iz sume samo jedne realizacije x(t).

$$\mu = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x(t),$$

pa je očekivana vrijednost μ funkcije, srednja vrijednost oko koje ta funkcija varira, [11].

Područje u kome ta funkcija varira određuje se njenom varijancom, koja je dana izrazom:

$$\delta^2(t) = E\left\{(x(t) - \mu)^2\right\} = \lim_{n \to \infty} \left\{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i(t) - \mu)^2,\right.$$

a za vremenske nizove s n članova, gdje je $n \neq \infty$, varijanca se računa prema empirijskom izrazu [6]:

$$\delta_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \quad \text{tj.} \quad \delta_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x} \sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

pri čemu je :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Procesi kod kojih očekivana vrijednost μ i varijanca δ^2 ne ovisi o t, nazivaju se stacionarnim. Ako je samo jedna realizacija nekog stacionarnog procesa dovoljna da se on potpuno opiše govorimo o ergodičkom procesu. Postoji li za svaki trenutak t_i normalna (Gaus-ova) raspodjela pojedinih mjerenih vrijednosti x_{ij}, govorimo o Gauss-ovom procesu.

Obrada vremenskih nizova pretpostavlja ergodičke procese. Često međutim zbog različitih skokova u registraciji ili zbog tzv. »draft-a« ta pretpostavka nije ispunjena. Izbacivanjem skokova iz registracije i eliminacijom trenda prije obrade moguće je zadovoljiti uvjet stacionarnog procesa.

Funkcija kojom ispitujemo tendenciju zadane funkcije da ostane nepromijenjena tj. ustanovljujemo vezu susjednih članova vremenskog niza nazivamo autokovarijantna funkcija. Empirijski izraz za izračunavanje autokovarijantne funkcije glasi, [2], [3]:

$$C_{(xx)}(T_k) = \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^{n-k} (x_i - \bar{x})(x_{i+k} - \bar{x}),$$

pri čemu je : $k = 0,1, \ldots, m; m \leq \frac{n}{10}$

$T_k = \Delta t; \Delta t =$ interval uzorkovanja [9].

Ograničenje broja k uvedeno je iz razloga što podaci računati s $m > \frac{n}{10}$ nisu dovoljno pouzdani.

Empirijski računata autokovarijantna funkcija stoga nije kontinuirana već su njene vrijednosti dane za diskretna mjesta k s razmakom između točaka Δt. Često, međutim, uz pomoć izračunatih diskretnih vrijednosti (autokovarajanci) aproksimiramo kontinuiranu autokovarijantnu funkciju što olakšava interpreticiju.

Kako je vrijednost autokovarijantne funkcije za k=O

$$C_{(xx)}(T_0) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

jednaka empirijskom izrazu za računanje varijance, vrijednost autokovarijantne funkcije za k=O nazivamo empirijska varijanca. Normiranjem izraza za autokovarijantnu funkciju s empirijskom varijacijom dobivamo autokorelacijsku funkciju:

$$R_{(xx)}(T_k) = \frac{C_{(xx)}(T_k)}{C_{(xx)}(T_0)}.$$

Autokovarijantnom ili autokorelacijskom funkcijom računa se korelacija susjednih vrijednosti istog vremenskog niza. Stoga velike apsolutne vrijednosti u $C_{(xx)}(T_1)$ i $C_{(xx)}(T_2)$ ukazuje na jaku korelaciju susjednih vrijednosti iste registracije.

Za ustanovljavanje periodičnosti signala kod kontinuiranih registracija koristimo postupak Fourierove transformacije. Pri tome treba zamijeniti beskonačnu kontinuiranu funkciju f(t) vermenskim nizom konačne duljine z(n) prikazanim diskretnim vrijednostima. Prema Pourierovoj teoriji moguće je svaku periodičku funkciju prikazati kao sumu periodičkih harmonijskih titraja različite frekvencije i amplitude.

Koristeći Euler-ove jednadžbe:

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha; \qquad e^{-i\alpha} = \cos\alpha - i\sin\alpha,$$

pri čemu je i imaginarna jedinica ($i^2 = -1$), možemo pisati, [1]:

$$z(n) = \sum_{m=0}^{n-1} S(\omega_m) e^{i\omega} m^n,$$

$$\text{gdje je } n = 0, 1, \ldots . n - 1.$$

Uz ekvidistantne intervale Δt na apscisnoj osi, frekvencija uzrokovanja je dana kao:

$$f_A = \frac{1}{\Delta t}$$

Gornja frekventna granica f_0 naziva se Nyquist-ova frekvencija:

$$f_0 = \frac{f_A}{2} = \frac{1}{2\Delta t} \qquad \text{(vidi [9]).}$$

Ako je kružna brzina

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad \text{ili} \qquad \omega = 2\pi f$$

tada

$\omega_0 = 2\pi f_0$ predstavlja Nyquist-ovu kružnu brzinu, kojom je određen najmanji mogući razmak spektralnih linija f odnosno ω:

$$\Delta f = \frac{f_0}{n}; \qquad \Delta\omega = \frac{\omega_0}{n}.$$

Spektralne linije f_m u spektrima, na mjestima m se dobivaju prema

$$f_m = \Delta f \cdot m \quad \text{odnosno} \quad \omega_m = \Delta\omega \cdot m.$$

Fourier-ovi koeficijenti su dani kosinusovom transformacijom a_m od z(n) ili Co — spektrom:

$$a_m = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} z(n) \cos\omega_m n$$

$$m = 0, 1, \ldots\ldots, \frac{N}{2}$$

i sinusovom transformacijom b_m od z(n) ili Quad — spektrom:

$$b_m = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} z(n) \sin\omega_m n$$

$$m = 1, 2, \ldots\ldots, \frac{N}{2} - 1. \qquad \text{(prema [5])}$$

Spektar amplituda se računa iz izraza:

$$A(\omega_m) = \sqrt{a_m^2 + b_m^2},$$

a spektar faza prema izrazu:

$$\Phi(\omega) = \operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{b_m}{a_m}\right).$$

Iz spektra amplituda moguće je stoga odrediti amplitudu i postojanje neke frekvencije unutar registriranog signala, a spektar faza pokazuje fazu odgovarajuće frekvencije.

Naročitu važnost za interpretaciju imaju grafički prikazi spektara, kod kojih se na jednu os nanosi amplituda ili faza, a na drugu os frekvencija odnosno period.

Pri obradi dužih vremenskih nizova za uštedu u vremenu često se primjenjuje pojednostavljeni postupak Fourierove transformacije tzv. »fast Fourier transformation« tj. brza Fourierova transformacija. Bitna osobina ovog postupka je veoma skraćeno vrijeme potrebno za računanje. Spektri se, međutim, računaju s $n = 2^m$ podataka niza, pri čemu je $m = 1, 2, \ldots, r$. Nedostatak metode prema algoritmu brze Fourierove transformacije je, prema tome, kod vremenskih nizova kojima se broj mjerenih podataka ne može predočiti s izrazom $n = 2^m$. Na taj se način podaci mjerenja s rednim indeksom većim od 2^m zanemaruju. Za vrlo duge vremenske nizove ta činjenica nema praktične važnosti. Međutim, postupak brze Fourier-ove transformacije ne smijemo primijeniti za obradu kratkih vremenskih nizova kojima je broj elemenata n veći od 2^m jer može dovesti do pogrešnih rezultata i zaključaka.

Ako postupak Fourierove transformacije primijenimo na autokovarijantnu funkciju dobivamo tzv. spektar energije, (engl. power spectrum), koji još zornije nego autokovarijantna funkcija opisuje stohastički karakter nekog procesa. Spektar energije daje količinu energije frekvencije f, ako je opažana funkcija z(t) opisana sumom beskonačno velikog broja harmonijskih titraja raznih amplituda, [4].

Pri tome je

$$O \leq f \leq \infty.$$

Spektar energije se računa prema izrazu

$$P_{zz}(f) = 4 \int_0^\infty C_{(xx)}(T) \cos(2\pi f T)\, dT.$$

Kod obrade vremenskih nizova često je potrebno ispitati zavisnost dvaju ili više paralelno registriranih vremenskih nizova. Pri tome se koriste različiti postupci i metode. Najjednostavniji algoritam koji to omogućuje je račun linearne zavisnosti izražen koeficijentom korelacije dvaju skupova. Koeficijenti korelacije, se označuju slovom r, mogu poprimiti vrijednosti $-1 \leq r \leq 1$. Ako je vrijednost koeficijenta $r = O$, linearna zavisnost između dva skupa ne postoji. Vrijednosti za r između O i /1/ odaju manju ili veću korelaciju između dva skupa, aakoje $r = /1/$ postoji funkcionalna veza. Pozitivan predznak koeficijenta r ukazuje na istovremeni rast ili pad vrijednosti u oba promatrana skupa dok negativan predznak predstavlja da rastu vrijednosti jednog skupa odgovara pad vrijednosti drugog skupa i obrnuto. Vrijednost koeficijenta korelacije računa se prema izrazu, [6],

$$r = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}}.$$

Brojnik ovog izraza naziva se kovarijanca i često označava s μ_{11}. Umjesto ovog načina pisanja često nalazimo i izraz koji je pogodniji za računanje na stroju.

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - n\bar{y}^2}}.$$

Kao što je već prije napomenuto koeficijent korelacije r pokazuje samo linearnu zavisnost dvaju skupova, što znači da je moguće da je funkcionalna zavistnost dvaju skupova jaka, a da (r) po svojoj vrijednosti bude mali.

Uz postupak računanja koeficijenata korelacije dvaju skupova, za ispitivanje istovremene linearne zavisnosti više skupova moguće je koristiti metodu multiple linearne regresije. Metoda se zasniva na algoritmu linearne regresije pri čemu se iz koeficijenata korelacije između zavisnih i nezavisnih varijabli računaju težinski faktori koji služe za računanje pravaca linearne regresije (koeficijenata smjera i odsječaka na osi y tj. x). Postupak je međutim od veće važnosti samo kod primjene na linearno zavisne skupove [7].

Za ustanovljavanje postojanja istih frekvencija dva vremenska niza moguće je primjeniti postupak za računanje križnog spektra energije (engl. cross power spectrum). U tu je svrhu potrebno prvo izračunati križnu kovarijantnu funkciju prema empirijskom izrazu, [2],

$$C_{(xy)}(T_k) = \frac{1}{n-k}\sum_{i=1}^{n-k}(x_i - \bar{x})(y_{i+k} - \bar{y}).$$

Primijenivši postupak Fourierove transformacije moguće je iz $C_{(xy)}$ izračunati križni spektar energije $P_{(xy)}$ koji glasi, [3],

$$P_{(xy)}(f) = 2\int_{-\infty}^{+\infty} C_{(xy)}(T)\exp.(-i2\pi fT)\,dT.$$

Kao i kod prije navedenih postupaka Fourierovom transformacijom dobivamo dva niza podataka koji predstavljaju spektar amplituda i spektar faza. Od naročitog značaja je, međutim, samo spektar faza koji pokazuje postojanje signala istih frekvencija u dva vremenska niza koji se međutim mogu pojaviti s razlikom u fazi.

Promatramo li dva vremenska niza moguće je odrediti dvije autokovarijantne funkcije $C_{(xx)}$ i $C_{(yy)}$ i dvije križno kovarijantne funkcije $C_{(xy)}$ i $C_{(yx)}$. Iz autokovarijantnih funkcija je postupkom Fourierove transformacije moguće odrediti odgovarajuće spektre energija:

$$P_{(xx)}(f),\quad P_{(yy)}(f)\quad P_{(xy)}(f)\quad i\quad P_{(yx)}(f).$$

Iz ovih spektara moguće je prema slijedećem izrazu, [10],

$$\mathrm{Coh}_{(xy)}(f) = \frac{P_{(xy)}(f)}{\sqrt{P_{(xx)}(f) \cdot P_{(yy)}(f)}} .$$

odrediti normiranu koherenciju, koja omogućuje ustanovljavanje istih signala u dva promatrana skupa a koristi se npr. za ustanovljavanje smetnji na mjerni signal.

Prema analogiji s empirijskim koeficijentom korelacije vrijednosti normirane koherencije su

$$0 \leq \mathrm{Coh}_{(xy)}(f) \leq 1 .$$

Ako su u oba vremenska niza (skupa) sadržani signali istih frekvencija $\mathrm{Coh}_{(xy)}(f)$ teži 1.

I na posljetku navedimo način namjene nabrojenih metoda analize vremenskih nizova na primjeru analognih registracija mjerenja s dva ekstenzometra, registracijama temperature na tim ekstenzometrima i registracijom zračnog pritiska.

Prvi postupak je digitalizacija registracija, eliminacija skokova, formiranje datoteka (na kompjuteru) i kontrolno grafičko prikazivanje registracija (na ploteru).

Sve vremenske nizove treba, zatim, podvrći postupku linearne i polinomne regresije. (Za eliminaciju trenda iz registracija ne treba koristiti polinome viših redova od trećeg.) Sve izračunate reziduale treba grafički prikazati u odgovarajućem mjerilu. Kako se radi o vremenskim nizovima istih duljina dobro je da su grafički prikazi istih dimenzija.

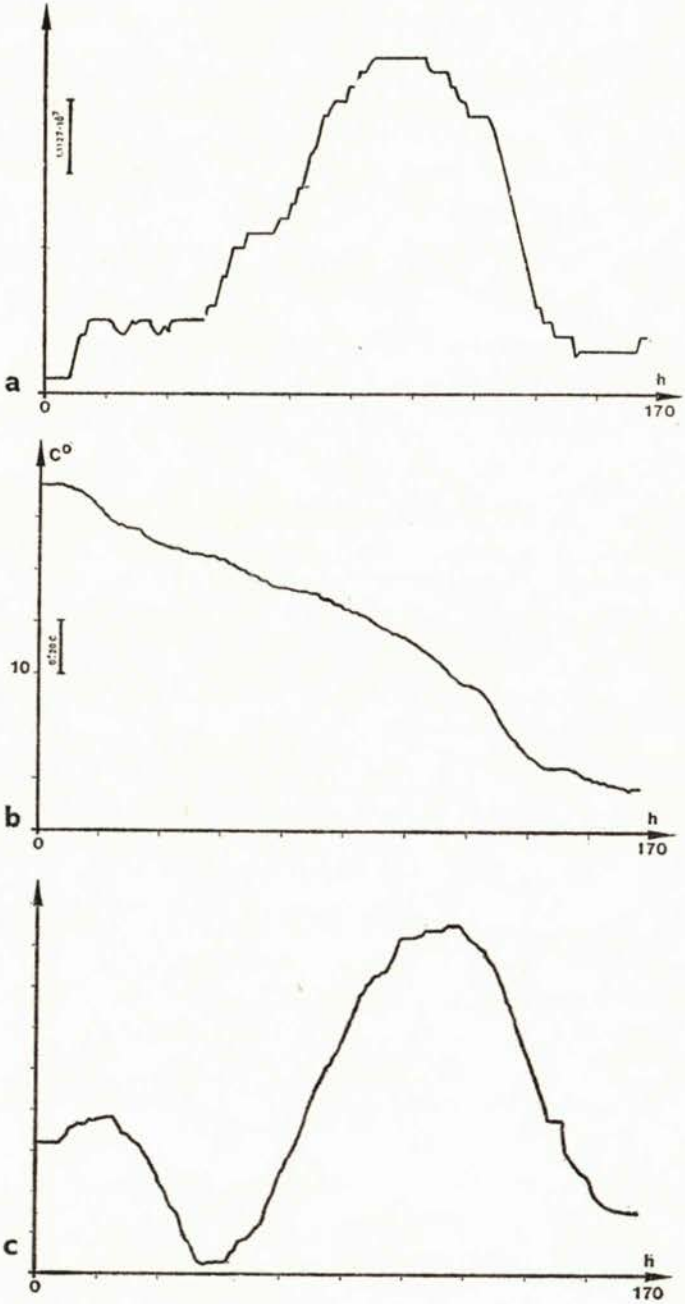
Već je iz grafičkih prikaza mjerenja i polinoma regresije moguće zaključiti o zavisnosti različitih vremenskih nizova. Po obliku slični polinomi regresije ukazuju na niskofrekventni utjecaj koji se manifestira na više registracija. Često se, međutim, tek nakon eliminacije trenda (koji mogu biti različiti polinomi), tj. na rezidualu, uočava sličnost između dva vremenska niza, sl. 2, 3 i 4.

Koeficijenti korelacije predočeni u obliku korelacijske matrice pokazat će linearnu zavisnost između tih vremenskih nizova, tablica 1.

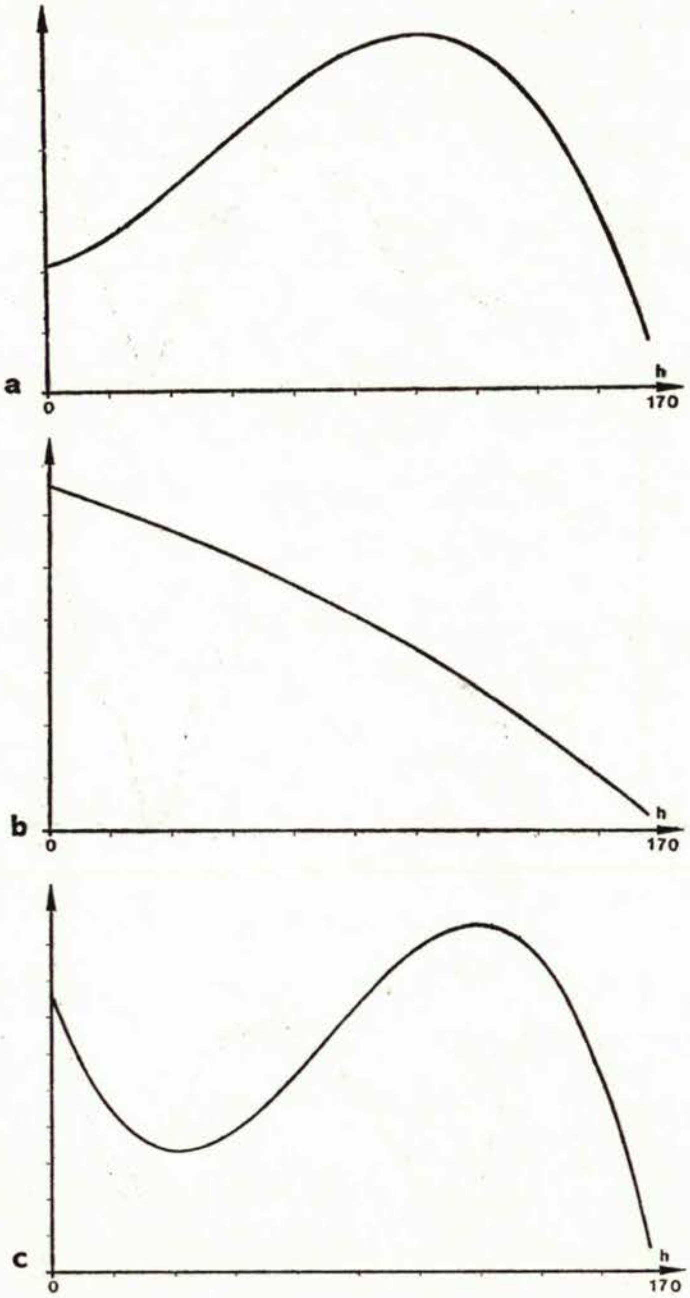
Tablica 1. Korelacijska matrica mjerenih vremenskih nizova.

	2	3	4	5	vrijeme
1 vertikal. ekst.	0.008	— 0.062	— 0.123	0.733	0.212
2 poprečni ekst.		0.961	0.928	— 0.298	— 0.938
3 temp. vert. ekst.			0.989	— 0.243	— 0.986
4 temp. popr. ekst.				— 0.243	— 0.986
5 zračni pritisak					0.320

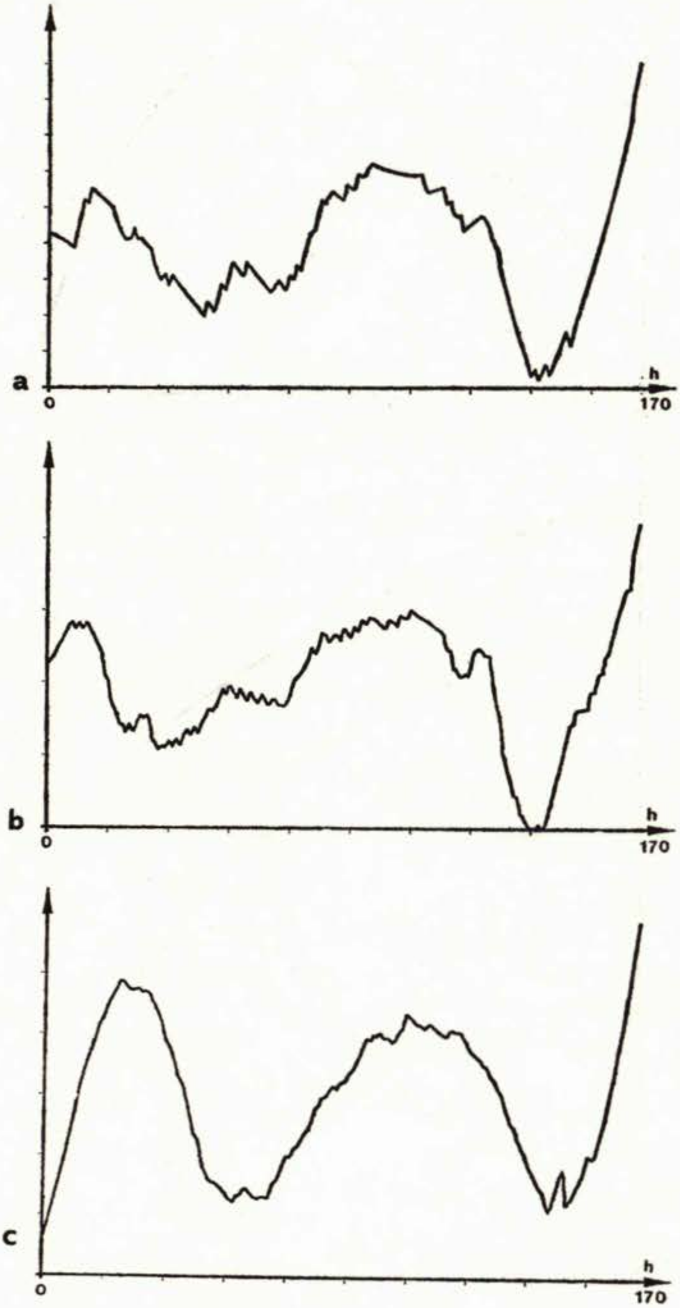
Zatim je potrebno računati korelacije između svih registracija te između
Zatim je potrebno računati korelacije između svih registracija te između
svih reziduala. Iako je teorijski ispravno promatrati zavisnost samo istovjetno obrađenih nizova, može biti od koristi račun korelacije nekog mjerenog signala s rezidualom nekog drugog signala.



sl. 2 Registracije mjerenja (prema [7]); a - vertikalni ekstenzometar, b - temperatura vertikalnog ekstenzometra, c - zračni pritisak.

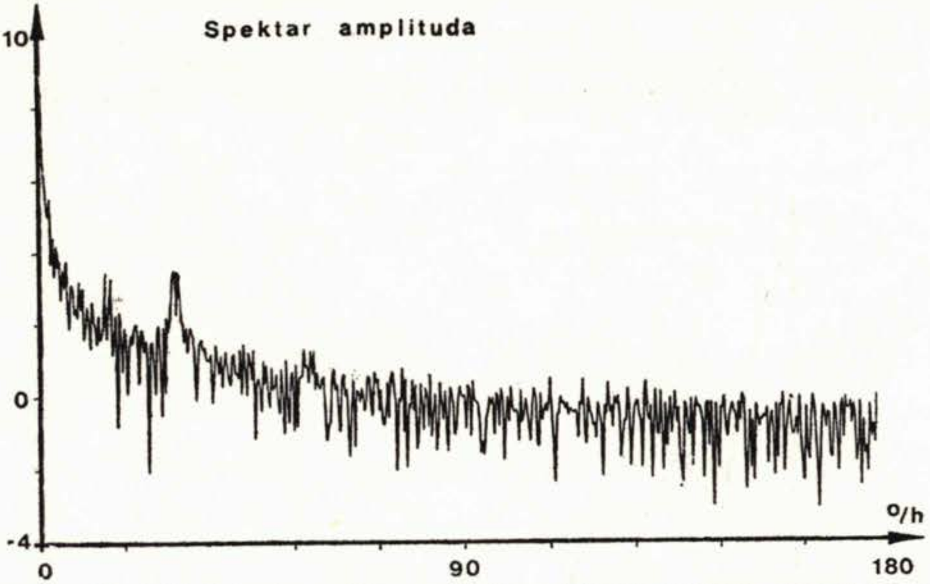


sl. 3 Trend polinomi trećeg stupnja (prema [7]). a - vertikalni ekstenzometar, b - temperatura vertikalnog ekstenzometra, c - zračni pritisak.

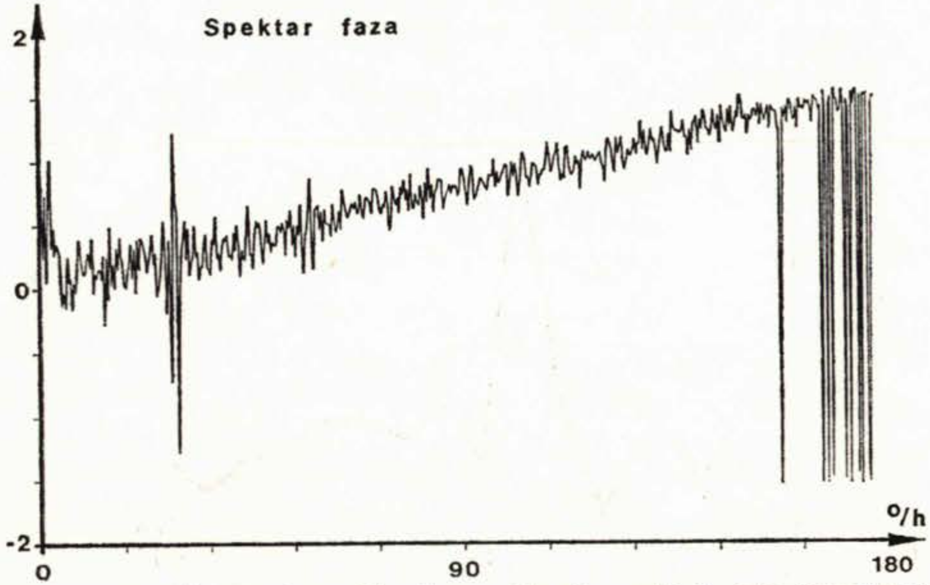


sl. 4 Reziduali nakon provedene regresije (prema [7]). a - vertikalni ekstenzometar b - temperatura vertikalnog ekstenzometra, c - zračni pritisak

Fourierovom spektralnom analizom ustvrdit ćemo postojanje periodičnih signala u registraciji. Postupak ćemo primijeniti na sve registracije i na sve reziduale, a spektre amplituda i faza grafički predočiti, sl. 5 i 6.



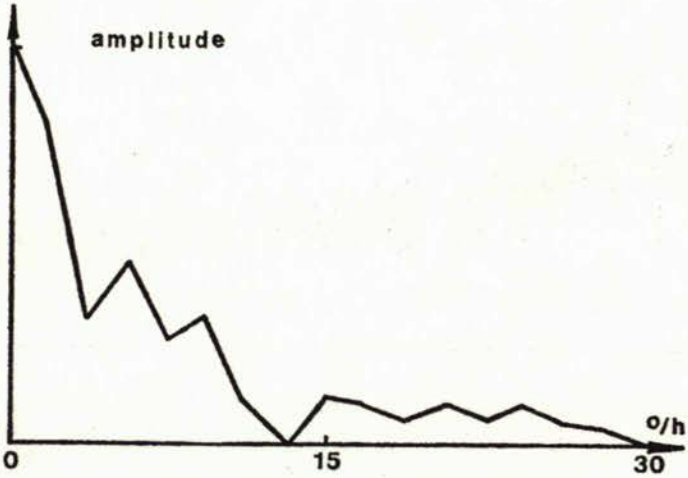
sl. 5 Karakteristični Fourier spektar amplituda registracije zemljinih doba ekstenzometrom. Sigiifikantni signali s periodom od cca 15° predstavljaju dnevne plimne valove, a s periodom od cca 30° poludnevne. U spektru je uočljivo prisustvo niskofrekventnih signala (drift), (prema [7]).



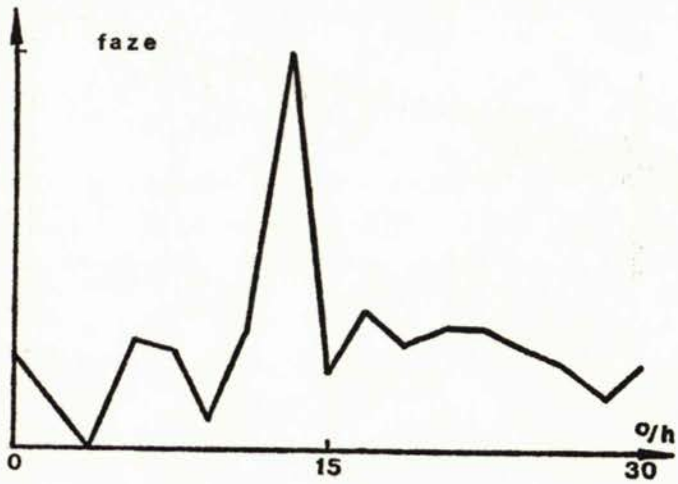
sl. 6 Karakteristični Fourier spektar faza registracije zemljinih doba. Signafikantni signali nacca 30° prethode tj. kasne u fazi za cca 1,5 Π, (prema [7]).

Apscisnu os u spektrima najbolje je podijeliti od 0°/Δ t do 180°/Δ t. Postojanje signifikantnih signala u različitim spektrima na istim mjestima ukazat će na zajedničke utjecaje. Račun spektara faza, križnih spektara energije jednoznačno će potvrditi ili opovrći sumnju, sl. 7 i 8.

Kao što je iz ovog prikaza vidljivo analiza vremenskih nizova zahtijeva mnogo računskih postupaka i daje mnogo podataka koje je moguće riješiti, kao što je već u uvodnom dijelu napomenuto, jedino korištenjem kompjutora i moderne računske tehnike.



sl. 7 Križni spektar energije registracije vertikalnog ekstenzometra i mjerenja temperature, (spektar amplituda), (prema [7]).



sl. 8 Križni spektar energije registracije vertikalnog ekstenzometra i mjerenja temperature, (spektar faza), (prema [7]). Uočljiva razlika u fazi kod cca 15⁰/₀.

LITERATURA:

[1] Bath, M.: Spectral analysis in geophysics, Elsevier Scientific Publishing Company, Amsteram, Oxford, New York, 1974.

[2] Blackman, R. B., Tukey, J. W.: The maseurement of power spectra, Dover Publications, Inc., New York, 1958.

[3] Box, G. E. P., Jenkins G. M.: Time series analysis, Forecasting and Control, Holden Day, San Francisco, 1976.

[4] Bracewell, Ron: The Fourier Transform and Its Applications, McGraw-Hill Book Company, New York, San Francisco, Toronto, London, Sydney, 1965.

[5] Demirel, H.: Statistische Analyse von Erdgezeitenbeobachtungen, Technische Hochschule Darmstadt, Dissertation, 1978.

[6] Ivanović, B.: Teorijska statistika, Jugoslovenski institut za ekonomska istraživanja, Beograd, 1966.

[7] Marjanović, R.: Beiträge zur Desormationsmessung mit mechanischen Extensometern, Technische Hochschule Darmstadt, Dissertation, 1982.

[8] Marjanović, R.: Mjerenje deformacija ekstenzometrima i tilmetrima, Geodetski list, Zagreb 1984, 1—3, 15—24.

[9] Marjanović, R.: Principi filtracije i pripreme registracije kontinuiranih mjerenja za obradu i analizu, Geodetski list, Zagreb 1984, 7—9, 195—202.

[10] Niemeier, W.: Zur Auswertung geodätischer Messreihen, Allgemeine Vermessungs — Nachrichten, Karlsruhe, Jan. 1980, Heft 1.

[11] Pelzer, H.: Besonderheiten der Auswertung kontinuierlicher Messungen und Probleme ihrer Interpretation, Kontinuierliche Messungen in der Ingenieurgeodäsie, RWTH Aachen, 1980.

SAŽETAK

U ovom radu su obrađene osnove analize vremenskih nizova. Naveden je postupak za računanje varijance, autokovarijantne i autokorelacijske funkcije, spektralne analize sadržaja signala, korelacije, multiple regresije, križne kovarijantne funkcije, križnog spektra energije i normirane koherencije. Na primjeru je pokazana namjena objašnjenih metoda.

ABSTRACT

In this work the principles of time series analysis are given. The procedure for computing the variance, the autocovariance and the autocorrelation function, the spectral analysis of the signal content, the correlation, the multiple regression, the cross covariance function, the cross power spektra and the normed coherence is described. The usage of the described methods are shown an a example.

Primljeno: 1984-06-30