

## OBRNUTI KARTOGRAFSKI ZADATAK

Nedjeljko FRANČULA, Damjan JOVIČIĆ, Blanka ŽARINAC-FRANČULA — Zagreb\*

## 1. UVOD

Da bi se izradila matematička osnova neke karte potrebno je sastaviti osnovne kartografske jednadžbe:

$$\begin{aligned}x &= f_1(\varphi, \lambda), \\y &= f_2(\varphi, \lambda)\end{aligned}\quad (1)$$

gdje su  $\varphi, \lambda$  geografske koordinate neke točke na Zemljinom elipsoidu ili kugli, a  $y$  i  $x$  pravokutne koordinate u određenoj kartografskoj projekciji. Taj zadatak nazivamo direktni kartografski zadatak. Rješenje tog zadatka za većinu projekcija, koje se danas upotrebljavaju u kartografskoj praksi, dano je u udžbenicima o kartografskim projekcijama (Borčić 1955, Jovanović 1983).

Rješenje obrnutog kartografskog zadatka definirano je jednadžbama:

$$\begin{aligned}\varphi &= F_1(y, x), \\ \lambda &= F_2(y, x)\end{aligned}\quad (2)$$

postaje za mnoge projekcije aktualno tek izumom digitalizatora i njegovom primjenom u kartografskoj praksi (vidi npr. Coogley 1983). Digitalizator je uz ploter i grafički terminal neophodan instrument u kompjutorski podržavanoj izradi karata. On omogućuje da se razmjerno brzo digitalizira sadržaj karte, tj. odrede u lokalnom sustavu digitalizatora pravokutne koordinate velikog broja točaka objekata prikazanih na karti. Time su stvoreni preduvjeti za rješenje vrlo važnog zadatka a to je transformacija sadržaja karte iz jedne kartografske projekcije u drugu. U tu svrhu potrebno je rotacijom i translacijom transformirati točke iz lokalnog sustava digitalizatora u koordinatni sustav karte.

Rješenjem obrnutog kartografskog zadatka moguće je potom za sve te točke izračunati geografske koordinate. Primjenom direktnog kartografskog zadatka računaju se iz geografskih koordinata pravokutne koordinate u bilo kojoj drugoj kartografskoj projekciji. Uz pomoć plotera moguće je sada digitalizirani sadržaj karte i iscrutati u nekoj novoj projekciji.

Za transformaciju sadržaja karte iz jedne projekcije u drugu predložen je nedavno postupak uz pomoć suvremenih ortofotouređaja (Bormann, Vozikis

\* Adresa autora: Prof. dr Nedjeljko Frančula, mr Damjan Jovičić, mr Blanka Žarinac-Frančula, Geodetski fakultet, Zagreb, Kačićeva 26

1981; vidi također Braum 1982, str. 118—121). Tim postupkom postižu se izvrsni rezultati (vidi primjere u Bormann, Vozikis 1982) no za njegovu primjenu potrebno je također rješenje obrnutog kartografskog zadatka.

Nadalje, u stvaranju automatskih kartografskih sistema moguće je rješavanje obrnutog kartografskog zadatka stvoriti baze podataka koristeći podatke sa karata u različitim projekcijama.

U udžbenicima o kartografskim projekcijama nema rješenja obrnutog kartografskog zadatka. Rješenja postoje samo za projekcije koje se upotrebljavaju za potrebe državne izmjene (npr. Gauss-Krügerova projekcija, kosa konformna cilindrična projekcija). Zbog sve veće važnosti tog zadatka nužno je da od sada udžbenici o kartografskim projekcijama daju i rješenja obrnutog kartografskog zadatka.

A. A. Pavlov uočava još 1967. godine važnost tog zadatka i daje rješenja za neke od najčešće upotrebljivanih projekcija (Pavlov 1967).

Prema recenziji objavljenj u časopisu *Kartographische Nachrichten* (Ferschke 1984; J. P. Snyder u monografiji »Map Projections by the U.S. Geological Survey« daje formule za direktni i obrnuti zadatak za 16 projekcija koje upotrebljava Geological Survey u SAD.

Rješenje obrnutog zadatka za nekoliko projekcija, kad Zemlju smramo kuglom, daje i Coogley (1983).

A. A. Kavrajiskij (1982) ukazuje na postupak kojim se ovaj zadatak može riješiti za neke uspravne projekcije Zemljinog elipsoida.

Strogo rješenje obrnutog kartografskog zadatka za neke je projekcije vrlo teško naći, a za neke projekcije i nemoguće. U tom slučaju treba koristiti približna rješenja. U kartografskoj literaturi u tu se svrhu predlaže transformacija pomoću polinoma (Boginskij 1972, Vasmut 1983). Više autora istraživalo je dosad taj postupak (Hunger 1974, Starikov 1978, Fischer 1979).

Točnost transformacije tim postupkom ovisi o vrsti projekcije, stupnju polinoma, veličini područja preslikavanja, broju i rasporedu oslonih točaka i točnosti digitalizacije. Utjecaj stupnja polinoma, veličine područja preslikavanja te broja i rasporeda oslonih točaka na točnost transformacije istraživana je u radu Frančula, Lapaine, Petrović 1984a.

Isti autori u radu Frančula, Lapaine Petrović 1984b predlažu primjenu Hardyjevih topografskih jednadžbi (v. Hardy 1971) za rješavanje obrnutog kartografskog zadatka. Istraživanje je pokazalo da je Hardyjeva metoda »multikvadratnih« topografskih jednadžbi pogodna, zbog svojih dobrih svojstava, i za rješavanje obrnutog kartografskog zadatka.

U ovom radu dajemo stroga rješenja obrnutog kartografskog zadatka za projekcije koje se često koriste u kartografskoj praksi. Pri tom smo Zemlju smatrali kuglom (polumjera  $R$ ) pa se izvedene formule mogu primijeniti za karte sitnih mjerila.

## 2. RJEŠENJE OBRNUTOG KARTOGRAFSKOG ZADATKA ZA USPRAVNE PROJEKCIJE

Formule koje ćemo ovdje dati izveli smo su iz osnovnih kartografskih jednadžbi danih u udžbenicima o kartografskim projekcijama. Pri tome nećemo

ispisivati formule za računanje konstanti projekcije ( $k, K$ ), jer se te formule mogu naći u svakom udžbeniku o kartografskim projekcijama (npr. Borčić 1955, Jovanović 1983).

Formule su izvedene za uspravne projekcije, a u posebnom odjeljku dat ćemo rješenja za poprečne i kose projekcije.

Ishodište koordinatnog sustava u cilindričnim i pseudocilindričnim projekcijama te u Aitovljevoj i Aitov-Hammerovoj projekciji smješteno je u presjek srednjeg meridijana i ekvatora. Pozitivni smjer osi  $x$  usmjeren je po meridijanu prema sjeveru, a osi  $y$  po ekvatoru prema istoku. U konusnim i pseudokonusnim projekcijama ishodište je u presjeku srednjeg meridijana i paralele s najmanjom širinom. U azimutalnim projekcijama ishodište je u geografskom polu.

U svim formulama sa  $\lambda$  je označena geografska duljina od srednjeg meridijana područja preslikavanja a ne od početnog meridijana.

Geografske koordinate  $\varphi$  i  $\lambda$  dobit će se po danim formulama u radijanima, uz pretpostavku da arkus funkcije daju kut također u radijanima, što je slučaj kod većine računala. Pravokutne koordinate  $y, x$  i polumjer kugle  $R$  treba da su u istim jedinicama, npr. u metrima ili centimetrima u mjerilu karte.

### 2.1 Cilindrične projekcije

U cilindričnim projekcijama geografsku duljinu računamo po formuli

$$\lambda = \frac{y}{k}. \quad (3)$$

Geografska širina računa se, ovisno o vrsti projekcije, po ovim formulama

a) konformna projekcija

$$\varphi = 2 \cdot \arctg e^{\frac{x}{k}} - \frac{\pi}{2}, \quad (4)$$

b) ekvivalentna projekcija

$$\varphi = \arcsin \frac{kx}{R^2}, \quad (5)$$

c) ekvidistantna projekcija

$$\varphi = \frac{x}{R}. \quad (6)$$

### 2.2 Konusne projekcije

U svim projekcijama u kojima se paralele preslikavaju kao kružnice (konusne, azimutalne, pseudokonusne) koristi se polarni koordinatni sustav kao pomoćni sustav. Polumjere paralela označavamo sa  $\rho$ , kutova između meridijana s  $\delta$ , a udaljenost ishodišta polarnog sustava od ishodišta pravokutnog sustava s  $q$ .

U rješavanju obrnutog kartografskog zadatka prvo se iz pravokutnih koordinata  $y, x$  izračunaju polarne koordinate  $\rho$  i  $\delta$  po formulama.

$$\rho = \sqrt{(q - x)^2 + y^2}, \quad (7)$$

$$\delta = \arctg \left( \frac{y}{q - x} \right). \quad (8)$$

Potom se iz polarnih koordinata računaju geografske koordinate  $\varphi$  i  $\lambda$ .

Geografska duljina računa se po formuli

$$\lambda = \frac{\delta}{k}. \quad (9)$$

Geografsku širinu računa se, ovisno o vrsti projekcije, po ovim formulama

a) konformna projekcija

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - 2 \cdot \arctg \left( \frac{\rho}{K} \right)^{\frac{1}{k}}, \quad (10)$$

b) ekvivalentna

$$\varphi = \arcsin \left( K - \frac{k \rho^2}{2R^2} \right), \quad (11)$$

c) ekvidistantna projekcija

$$\varphi = \frac{K - \rho}{R}. \quad (12)$$

### 2.3 Azimutlana projekcije

U azimutalnim projekcijama podudaraju se ishodišta polarnog i pravokutnog sustava, pa polarne koordinate  $\rho$  i  $\delta$  računamo po formulama

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (13)$$

$$\delta = \arctg \left( \frac{y}{x} \right).$$

Geografska duljina  $\lambda$  računa se po formuli

$$\lambda = \delta, \quad (14)$$

a geografska širina  $\varphi$  po ovim formulama

a) konformna projekcija

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - 2 \cdot \arctg \left( \frac{\rho}{2Rk} \right), \quad (15)$$

b) ekvivalentna projekcija

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - 2 \cdot \arcsin\left(\frac{\rho}{2Rk}\right), \quad (16)$$

c) ekvidistantna projekcija

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\rho}{Rk}, \quad (17)$$

d) ortografska projekcija

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\rho}{R}\right), \quad (18)$$

e) centralna projekcija

$$\varphi = \arctg \frac{\rho}{R}. \quad (19)$$

#### 2.4 Pseudokonusne projekcije

Polarne koordinate računaju se kao i u konusnim projekcijama po formuli (7) i (8).

U ovoj grupi projekcija dajemo rješenje za Bonneovu projekciju

$$\varphi = \frac{K - \rho}{R}, \quad \lambda = \frac{\rho \cdot \delta}{R \cdot \cos \varphi}. \quad (20)$$

#### 2.5 Pseudocilindrične projekcije

a) Sansonova projekcija

$$\varphi = \frac{x}{R}, \quad \lambda = \frac{y}{R \cdot \cos \varphi}; \quad (21)$$

b) Mollweideova projekcija

U ovoj projekciji potrebno je prvo izračunati pomoćni kut  $\beta$  po formuli

$$\beta = \arcsin \frac{x}{R\sqrt{2}}, \quad (22)$$

a potom geografske koordinate po ovim formulama

$$\varphi = \arcsin \frac{\sin 2\beta + 2\beta}{\pi}, \quad \lambda = \frac{y\pi}{2R\sqrt{2}\cos \beta}; \quad (23)$$

c) Eckertova projekcija IV

$$C_x = R\sqrt{\frac{\pi}{4 + \pi}}, \quad C_y = \frac{R}{\sqrt{\pi(4 + \pi)}},$$

$$\beta = \arcsin \frac{x}{2 \cdot C_x},$$

$$\varphi = \arcsin \frac{2\beta + 4 \cdot \sin \beta + \sin 2\beta}{4 + \pi}, \quad (24)$$

$$\lambda = \frac{y}{2 C_y (1 + \cos \beta)},$$

d) Eckertova projekcija V

$$C_x = \frac{2R}{\sqrt{\pi + 2}}, \quad C_y = \frac{R}{\sqrt{\pi + 2}}, \quad (25)$$

$$\varphi = \frac{x}{C_x}, \quad \lambda = \frac{y}{C_y (1 + \cos \varphi)};$$

e) Eckertova projekcija VI

$$C = \frac{R}{\sqrt{\pi + 2}}, \quad \beta = \frac{x}{2C}, \quad (26)$$

$$\varphi = \arcsin \frac{2(\beta + \sin \beta)}{\pi + 2}, \quad \lambda = \frac{y}{C(1 + \cos \beta)}.$$

## 2.6 Aitovljeva i Aitov-Hammerova projekcija

a) Aitovljeva projekcija

$$\delta = \arcsin \frac{y}{2x}, \quad \rho = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{4 \sin^2 \delta + \cos^2 \delta}}, \quad (27)$$

$$\varphi = \arcsin (\cos \delta \sin \rho) \quad \lambda = 2 \cdot \arcsin \frac{\cos \rho}{\cos \varphi};$$

b) Aitov-Hammerova projekcija

$$\delta = \arcsin \frac{y}{2x}, \quad \rho = 2 \arcsin \frac{1}{2R} \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{\cos^2 \delta + 4 \sin^2 \delta}}, \quad (28)$$

$$\varphi = \arcsin (\cos \delta \sin \rho), \quad \lambda = 2 \arcsin \frac{\cos \rho}{\cos \varphi}.$$

## 3. RJEŠENJE OBRNUTOG KARTOGRAFSKOG ZADATKA ZA POPREČNE I KOSE PROJEKCIJE

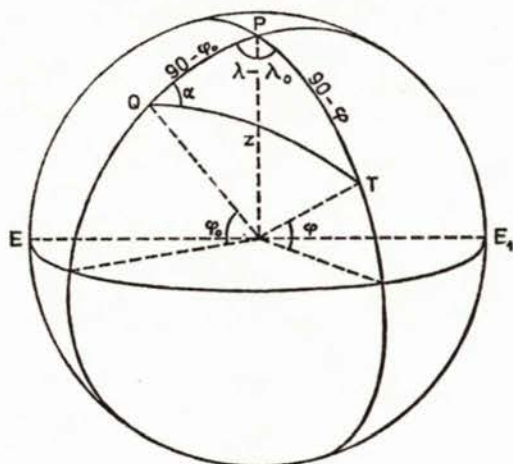
U rješavanju obrnutog kartografskog zadatka za poprečne i kose projekcije koristimo se izvedenim formulama (3)—(28) za uspravne projekcije. Po tim formulama izračunate vrijednosti neće biti geografske koordinate  $\rho$  i  $\lambda$

već analogne koordinate  $\varphi'$ ,  $\lambda'$  u poprečnom ili kosom sustavu. Iz tako izračunatih koordinata dobiju se sferne polarne koordinate  $z$  i  $\alpha$  po formulama

$$z = \frac{\pi}{2} - \varphi',$$

$$\alpha = \lambda'.$$
(29)

Geografske koordinate  $\varphi$  i  $\lambda$  računaju se iz sfernog trokuta PTQ (sl. 1). Sa P je označen geografski pol, sa Q kartografski pol (pol poprečnog ili kosog sustava) s



Sl. 1

koordinatama  $\varphi_0$ ,  $\lambda_0$ , a s T točka čije koordinate računamo. Iz tog trokuta dobije se

$$\varphi = \arcsin(\cos z \sin \varphi_0 + \sin z \cos \varphi_0 \cos \alpha),$$
(30)

$$\lambda - \lambda_0 = \arcsin \frac{\cos z \sin \varphi \sin \varphi_0}{\cos \varphi \cos \varphi_0}.$$

#### LITERATURA

- [1] Boginskij, V. M.: Sposob izyskanija proizvol'nih proekcij melkomasštabnyh kart, Nedra, Moskva 1972.
- [2] Borčić, B.: Matematička kartografija, Tehnička knjiga, Zagreb 1955.
- [3] Bormann, G. E., Vozikis, E.: Map projection transformation with digitally controlled differential rectifiers, ASP-ACSM Fall Technical Meeting, San Francisco 1981.
- [4] Bormann, G. E., Vozikis, E.: Photographische Kartenumbildung mit dem Wild-AVIOPLAN ORI, Kartographische Nachrichten 1982, 6, 201-206.
- [5] Braum, F.: Diferencijalno redresiranje i preslikavanje, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb 1982.

- [6] Cogley, G. J.: Digit — an interactive procesor for digitized data, *Computers and Geosciences* 1983, 2, 123—155.
- [7] Ferschke, H.: Snyder, John P., *Map Projections by the U.S. Geological Survey*, Geological Survey Bulletin, Nr. 1532, 1982, *Kartographische Nachrichten* 1984, 1, 34—35.
- [8] Fischer, E.—U.: Zur Transformation digitaler kartographischer Daten mit Petenzreihen, *Nachrichten aus dem Karten- und Vermessungswesen* I/79 23—42, Frankfurt a. M. 1979.
- [9] Frančula, N., Lapaine, M., Petrović, S.: Transformacija sadržaja karte iz jedne kartografske projekcije u drugu, *Zbornik radova VI Međunarodnog simpozija »Kompjuter na sveučilištu«*, Dubrovnik 1984, 608.1—608.8.
- [10] Frančula, N., Lapaine, M., Petrović, S.: Rješavanje obrnutog kartografskog zadatka primjenom Hardyjevih topografskih jednažbi, *Zbornik radova VI Međunarodnog simpozija »Projektiranje i proizvodnja pomoću računala«* Zagreb 1984.
- [11] Hardy, R. L.: Multiquadric equations of topography and other irregular surfaces, *Journal of Geophysical Research*, Vol. 76, No. 8, 1971, 1905—1915.
- [12] Hunger, S.: Zur Transformation von Kartenprojektionen, *Nachrichten aus dem Karten- und Vermessungswesen*, I/65 57—66, Frankfurt a.M. 1974.
- [13] Jovanović, V.: *Matematička kartografija*, Vojnogeografski institut, Beograd 1983.
- [14] Kavrajiskij, A.V.: Preobrazovanie prjamougolnyh koordinat v geografičeskie dlja nekotoryh proekcij ellipsoida, *Geodezija i kartografija* 1982, 7, 40—43.
- [15] Pavlov, A.A.: Preobrazovanie kartografičeskih proekcij na elektronnyh vyčislitel'nyh mašinah, *Geodezija i aërosemka* 1967, 4, 27—33.
- [16] Starikov, J.P.: Iteracionnyj metod analitičeskogo transformirovania kartografičeskogo izobraženija s pomoščju EVM, *Geodezija i kartografija* 1978, 2, 60—66.
- [17] Vasmuť, A.S.: Modelirovanie v kartografii s primeneniem EVM, *Nedra*, Moskva 1983.

### SAŽETAK

U članku su izvedene formule za računanje geografskih koordinata iz pravokutnih koordinata u 19 kartografskih projekcija. Formule su izvedene za uspravne projekcije, a u posebnom odjeljku dana su rješenja za poprečne i kose projekcije. Sve formule izvedene su uz pretpostavku da je Zemlja kugla.

### ZUSAMMENFASSUNG

In dem Artikel sind die Formeln für die Berechnung der geographischen Koordinaten aus den rechtwinkligen Koordinaten für die 19 normalachsigen kartographischen Abbildungen gegeben. Auch ist die Lösung für die querachsigen und schiefachsigen Abbildungen beigefügt. Die inverse Abbildungsfunktionen sind für die Erdkugel abgeleitet.

Primljeno: 1984-08-17