

PRAKTIČNO RAČUNANJE NORMALNIH I NORMALNIH
ORTOMETRIJSKIH VISINA

Asim BILAJBEGOVIĆ — Zagreb*

1. UVOD

Nivelman visoke točnosti spada u red najtočnijih geodetskih mjerenja. Zbog toga, pri obradi rezultata takvih mjerenja, treba uzeti u obzir i mnoge pojedinosti teorije oblika i fizikalnih svojstava Zemlje, koje su često puta irelevantne za ostale geodetske radove. Kao prvo, postavlja se pitanje sistema visina za obradu rezultata mjerenja, odnosno niveliranja. Budući da se obrada II nivelmana visoke točnosti (II NVT) na području naše zemlje privodi kraju, postavlja se pitanje izbora sistema visina. Idealni sistem visina trebao bi zadovoljavati dobro poznate uvjete:

1. Visine točaka trebaju biti jednoznačne i neovisne o putu niveliranja.

2. Visine treba odrediti jednoznačno na osnovu rezultata mjerenja na fizičkoj površini Zemlje, bez uvođenja bilo kakvih hipoteza o unutrašnjoj građi Zemlje. (To je za nas jako važno pošto nemamo, bar za sada pouzdane podatke o gustoći površinskih slojeva Zemlje na našem području.)

3. Praktična primjena rezultata mjerenja zahtijeva da: popravci mjerenih visinskih razlika, zbog računanja visina točaka u odabranom sistemu, trebaju biti mali, tako da se pri obradi nivelmana nižih redova mogu zanemariti. Poznato je da se geodetske visine sastoje iz dva dijela:

$$H_A = H_A^* + N_1^{\wedge}$$

ili (1)

$$H_A = H_A^{\vee} + N^{\wedge},$$

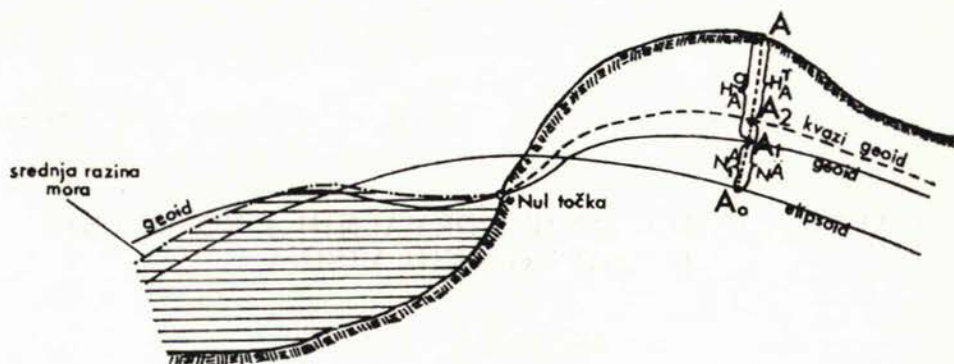
gdje je:

H_A^* — ortometrijska visina

H_A^{\vee} — normalna visina

N_1^{\wedge} i N^{\wedge} — unudlacija geoida, odnosno kvazigeoida (visina spomenutih ploha nad referentnim elipsoidom) sl. 1

* Adresa autora: Doc. dr Asim Bilajbegović, Geodetski fakultet Zagreb, Kačićeva 26.



Sl. 1

Na osnovu jednadžbe (1) i sl. 1 nameće se četvrti uvjet:

4. U izabranom sistemu visina treba izračunati geoidni dio visine (N_1^A ili N^A) dovoljno točno, a samo računanje treba biti jednostavno.

Radi različitih tehničkih zahtijeva u strojogradnji, hidrotehnici, pri izradi željezničkih pruga itd., poželjno je zadovoljiti uvjet da

5. točke koje se nalaze na istoj nivo plohi imaju jednake visine.

Očigledno da su uvjeti 3 i 5 proturječni, te nam za najbolji sistem visina ostaje traženje kompromisa između svih nabrojanih zahtijeva. Međutim, u našoj zemlji se bar za sada postavljaju kao ograničenje izbora sistema visina, ne samo navedeni uvjeti nego i raspoloživi materijal mjerenja. Naime, ubrzanja sile teže nisu mjerena duž svih nivelmanskih vlakova, ona se ne odnose na istu vremensku epohu kao mjerene visinske razlike i na više mjesta razlikuju se putevi niveliranja i mjerenja ubrzanja sile teže. Uzimajući u obzir 5 navedenih uvjeta, raspoloživi materijal mjerenja II. NVT, i zahtijeve prakse za novom jedinstvenom nivelmanskom mrežom, preostaje nam kao prihvatljiv i moguć, bar za sada, jedino sistem normalnih ortometrijskih visina. (Jasno je, tek kad se obrade i analiziraju postojeća, te izvedu neophodna dopunska gravimetrijska mjerenja, moći ćemo govoriti i o drugim visinskim sistemima: geopotencijalnim kotama, normalnim visinama (visinama Molodenskog), pravim ortometrijskim ili dinamičkim visinama). Cilj ovog rada nije diskusija o izboru najpovoljnijeg sistema visina, jer je prijedlog (Klak-Bilajbegović) [3] verificiran od nadležnih komisija i stručnih organa, nego izvod formula i sastavljanje tablica za računanje normalnih i normalnih ortometrijskih visina (popravaka) za područje naše zemlje, na temelju novog geodetskog sistema (Geodetski sistem 1980, v. [5].

2. NORMALNE ORTOMETRIJSKE VISINE

Ako uzduž puta niveliranja nemamo mjerenja ubrzanja sile teže, a niveliramo po fizičkoj površini Zemlje, neophodno je reducirati računato normalno ubrzanje sile teže, kako bi se ono odnosilo na fizičku površinu Zemlje, a ne na površinu nivo elipsoida. Iz gravimetrije poznat je izraz za Fayeovu korekciju (2)

$$\delta H = g \frac{2H}{R} \left(1 - \frac{3H}{2R} \right) \cong g \frac{2H}{R}. \quad (2)$$

Ako se u (2) uvede normalna vrijednost ubrzanja sile teže na pola visine točke A, tj. na visini $\frac{H^A}{2}$, zatim srednji polumjer zakrivljenosti Zemlje $R = \sqrt{MN}$, za točku sa srednjom širinom Jugoslavije ($\varphi_{sr} \cong 43^\circ 50'$), dobije se

$$\gamma_m^A = \gamma_0^A - 3.0754 \frac{H^A}{2} = \gamma_0^A - 1.5377 H^A \text{ (}\mu\text{ms}^{-2}\text{)} = \gamma_0^A - 0.15377 H^A \text{ (mgal)} \quad (3)$$

Analogno izrazu za računanje prave ortometrijske visine [4] napišimo matematičku definiciju normalne ortometrijske visine

$$H_\gamma^A = \frac{1}{\gamma_m^A} \int_{(OA)} \gamma dh. \quad (4)$$

Uvede li se u integral identitet

$$\gamma = \gamma_m^A + \gamma - \gamma_m^A, \quad (5)$$

tada (4) glasi

$$H_\gamma^A = \frac{1}{\gamma_m^A} \int_{(OA)} (\gamma_m^A + \gamma - \gamma_m^A) dh = \int_{(OA)} dh + \frac{1}{\gamma_m^A} \int_{(OA)} (\gamma - \gamma_m^A) dh \quad (6)$$

Gdje je $\int_{(OA)} dh = H_{m\text{jerenno}}^A =$ sračunata visina točke na osnovu rezultata mjerenja, a drugi član je normalna ortometrijska korekcija K_γ^A , odnosno korekcija za konvergenciju nivo ploha normalnog polja ubrzanja sile teže

$$K_\gamma^A = \frac{1}{\gamma_m^A} \int_{(OA)} (\gamma - \gamma_m^A) dh. \quad (7)$$

Na osnovu uvedenih oznaka normalna ortometrijska visina računa se po formuli

$$H_\gamma^A = H_{m\text{jerenno}}^A + K_\gamma^A. \quad (8)$$

Pošto se geometrijskim nivelmanom mjere visinske razlike a ne apsolutne visine, izraz (8) nije prikladan za računanje ortometrijskih visina. Primjenimo izraz (8) na dvije susjedne točke A i B i potražimo razliku njihovih visina.

$$H_\gamma^B - H_\gamma^A = \frac{1}{\gamma_m^B} \int_{(OB)} \gamma dh - \frac{1}{\gamma_m^A} \int_{(OA)} \gamma dh = \int_{(OB)} dh - \int_{(OA)} dh + \frac{1}{\gamma_m^B} \int_{(OB)} (\gamma - \gamma_m^B) dh - \frac{1}{\gamma_m^A} \int_{(OA)} (\gamma - \gamma_m^A) dh. \quad (9)$$

Uvrsti li se (8) u (9) analogno postupku pri izvodu izraza (6) dobije se

$$H_{\gamma}^B - H_{\gamma}^A = H_{mjereno}^B - H_{mjereno}^A + K_{\gamma}^B - K_{\gamma}^A \quad (10)$$

ili

$$\Delta h^{A,B} = \Delta h_{mjer.}^{A,B} + K_{\gamma}^{A,B}, \quad (11)$$

gdje:

$\Delta h_{mjer.}^{A,B}$ — mjerena visinska razlika između točaka A i B

$K_{\gamma}^{A,B}$ — normalna ortometrijska popravka visinske razlike, tj.

$$K_{\gamma}^{A,B} = \frac{1}{\gamma_m^B} \int_{(OB)} (\gamma - \gamma_m^B) dh - \frac{1}{\gamma_m^A} \int_{(OA)} (\gamma - \gamma_m^A) dh \quad (12)$$

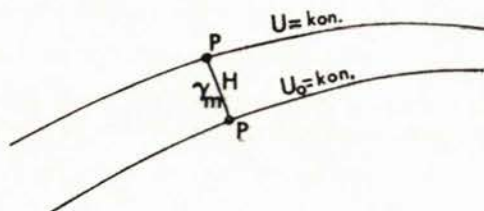
Očigledno su prema (12) normalne ortometrijske popravke male veličine. Međutim, izraz (12) nije prikladan za praktična računanja, (pošto treba računati razlike integrala) pa je potrebno sastaviti praktičniji izraz za računanje normalnih ortometrijskih popravaka.

2.1. Računanje normalnih ortometrijskih popravaka

Normalno ubrzanje sile teže računato prema Geodetskom sistemu 1980 ([5] str. 24)

$$\gamma_0 = 9.780327 (1 + 0.0053024 \sin^2\varphi - 0.0000058 \sin^2 2\varphi) \text{ ms}^{-2}, \quad (13)$$

odnosi se na nivo plohu elipsoida, sl. 2.



Sl. 2

Na osnovu poznatog svojstva nivo ploha $U_0 = \text{konst.}$ i $U = \text{konst.}$, konstantna je i razlika potencijala ($U_0 - U$). Iz definicije potencijala, (potencijal je funkcija čije derivacije u određenim smjerovima daju sile u tim smjerovima), slijedi

$$U_0 - U = \gamma_m \cdot H = \text{konst.} \quad (H \text{ je visinska razlika dviju jako bliskih nivo ploha}) \quad (14)$$

Diferenciranjem (14) dobije se

$$\gamma_m dH + H \cdot d\gamma_m = 0. \quad (15)$$

Iz (15) slijedi

$$dH = - \frac{d\gamma_m}{\gamma_m} H. \quad (16)$$

Očigledno je dH diferencijalna promjena visine dviju bliskih nivo ploha, odnosno njihova konvergencija. Budući da je dH mala veličina izraz $\frac{d\gamma_m}{\gamma_m}$ u (16) može se zamijeniti s

$$\frac{d\gamma_m}{\gamma_m} = \frac{d\gamma_0}{\gamma_0}. \quad (17)$$

Diferenciranjem (13) dobije se

$$d\gamma_0 = 9.780\,32677 (2 \cdot 0.0053024 \sin\varphi \cos\varphi \, d\varphi - 0.000\,0058 \cdot 2\sin 2\varphi \cos 2\varphi \cdot 2 \, d\varphi)$$

Drugi član u zagradi je mala veličina te se može zanemariti. U tom slučaju

$$d\gamma_0 = 9.780327 (2 \cdot 0.0053024 \sin\varphi \cos\varphi \, d\varphi) = 9.780327 (\beta \sin 2\varphi \, d\varphi) \quad (18)$$

Djeljenjem (18) sa (13) te zanemarivanjem trećeg člana u (13) dobije se:

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma_0}{\gamma_0} &= \frac{\beta \sin 2\varphi \, d\varphi}{(1 + \beta \sin^2 \varphi)} = \beta \sin 2\varphi \, d\varphi (1 + \beta \sin^2 \varphi)^{-1} = \\ &= \beta \sin 2\varphi (1 - \beta \sin^2 \varphi + \beta^2 \sin^4 \varphi) \, d\varphi = \\ &= (\beta \sin 2\varphi - \beta^2 \sin^2 \varphi \sin 2\varphi + \beta^3 \sin 2\varphi \sin^4 \varphi) \, d\varphi \dots \end{aligned} \quad (19)$$

Zbog računanja konvergencije bliskih nivo ploha uvrstimo (19) u (16).

$$dH = - [\beta \sin(2\varphi) - \beta^2 \sin^2 \varphi \sin(2\varphi) + \beta^3 \sin(2\varphi) \sin^4 \varphi] \, d\varphi H. \quad (20)$$

Jednadžba (16) vrijedi za plohe bliske nivo plohi elipsoida i tad se može uvesti aproksimacija $\gamma_m = \gamma_0$. Međutim, da se dobije normalna ortometrijska korekcija visinske razlike između točaka A i B, prema izrazima (12) i (20), neophodno je (20) integrirati:

$$K_{\gamma}^{A,B} = - \int_{(AB)} [\beta \sin(2\varphi) - \beta^2 \sin^2 \varphi \sin(2\varphi) + \beta^3 \sin(2\varphi) \sin^4 \varphi] \, d\varphi H. \quad (21)$$

Budući da je $\beta^3 = 0,000\,000\,149$, treći član se može zanemariti bez ikakvog značajnijeg utjecaja na točnost računanja normalne ortometrijske popravke

$$K_{\gamma}^{A,B} = - \int_{(AB)} (\beta \sin 2\varphi - \beta^2 \sin^2 \varphi \sin 2\varphi) \, d\varphi H. \quad (22)$$

Ako se označi $H_s = \frac{H_A + H_B}{2}$ i $\varphi_s = \frac{\varphi_A + \varphi_B}{2}$, tad se integral (22), za male veličine $d\varphi$, može aproksimirati izrazom (sumom)

$$K_{\gamma}^{A,B} = - \beta \sin 2\varphi_s H_s \frac{\Delta\varphi''}{\varphi''} + \beta^2 \sin^2 \varphi_s \sin 2\varphi_s H_s \frac{\Delta\varphi''}{\varphi''}. \quad (23)$$

Postavlja se pitanje da li se drugi član desne strane izraza (23) može zanemariti. Za ekstremne slučajeve: $H_s = 600$ m, udaljenost repera $d = 1,5$ km i $\varphi_s = 45^\circ$

$$\beta^2 \sin^2 \varphi_s \cdot \sin 2\varphi_s \cdot 600 \cdot \frac{55''}{206265} = 0,000\,002\,249 \text{ m} \approx 0,002 \text{ mm}$$

Pošto su mjerenja u II NVT izvedena na stotinku milimetra, u praktičnim računanjima može se zanemariti drugi član u izrazu (23). Izuzetno ga treba uzeti u obzir ako je udaljenost između repera veća od 2 km i $H > 600$ m.

Konačno (23) poprima oblik:

$$K_{\gamma}^{A,B} = -\beta \sin 2\varphi_s H_s \frac{\Delta\varphi''}{\rho''} = -0,000025707 \sin 2\varphi_s H_s \Delta\varphi'' \text{ [mm]} \quad (24)$$

Već je navedeno, da smo integral u (22) zamijenili sumom. Da se dobije uvid o redu aproksimacije, koja zbog toga utiče na točnost računanja ortometrijskih popravaka, treba riješiti integral (22)

$$K_{\gamma}^{A,B} = - \int_{(AB)} \beta \sin 2\varphi \, d\varphi \cdot H = - H \beta \sin^2 \varphi \Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2} = H \beta (\sin^2 \varphi_1 - \sin^2 \varphi_2)$$

Neka je: $\varphi_1 = 45^\circ 00' 00''$, $\varphi_2 = 45^\circ 00' 70''$, $H_s = 600$ m u tom slučaju je $K_{\gamma}^{A,B} = -0,001079684$ m = -1,07968 mm. Ukoliko računamo po izrazu (24), dobit ćemo

$$K_{\gamma}^{A,B} = -0,001079683 \text{ m} = -1,07968 \text{ mm.}$$

Očigledno, aproksimacija integrala sumom nema utjecaja na točnost računanja ortometrijskih popravaka. Međutim, postavlja se pitanje, može li se izraz (24) još više pojednostaviti uvođenjem srednje širine naše zemlje $\varphi_{sr} = 43^\circ 50'$ umjesto $\varphi_s = \frac{\varphi_A + \varphi_B}{2}$. Pošto se Jugoslavija proteže između geografskih širina $\varphi_1 = 40^\circ 50'$ i $\varphi_2 = 46^\circ 50'$, $\varphi_{sr} = 43^\circ 50'$, razlike između srednje i najjužnije, odnosno najsjevernije točke naše zemlje iznosi cca 3° .

Diferencirajmo izraz (24) po φ_{sr}

$$dK_{\gamma}^{A,B} = -\beta \cos 2\varphi_{sr} \cdot \frac{2d\varphi_{sr}''}{\rho''} H_s \frac{\Delta\varphi''}{\rho''} \quad (25)$$

Za

$$\begin{aligned} d\varphi_{sr} &= 3^\circ, \Delta\varphi = 55'' \quad H_s = 1000 \text{ m} \\ dK_{\gamma}^{A,B} &= -0,00000603 \text{ m} = -0,006 \text{ mm} \end{aligned}$$

Navedeni brožani podaci pokazuju da se za praktična računanja može koristiti u formuli (24) srednja širina $\varphi_{sr} = 43^\circ 50'$. Međutim, ako bi željeli točnost računanja $dK_{\gamma}^{A,B}$ od 0,004 mm, tad bi za ekstremne uvjete $d\varphi_{sr} = 3^\circ$ i $\Delta\varphi'' = 55''$ mogli izračunati do koje se srednje visine H_s može koristiti srednja širina Zemlje $\varphi_{sr} = 43^\circ 50'$.

Iz (25)

$$H_s = - \frac{dK_{\gamma}^{A,B} \cdot \rho''^2}{\beta \cos 2\varphi_{sr} 2d\varphi_{sr}'' \Delta\varphi''} \approx 664 \text{ m}$$

Drugim riječima, ukoliko bi imali najsjevernije odnosno najjužnije dijelove naše zemlje na nadmorskoj visini većoj od 664 m, a udaljenosti među reperima $d > 1,5$ km onda u formulu (24) treba uvesti stvarnu srednju geografsku širinu.

Uvođenjem numeričkih vrijednosti $\varphi_{rs} = 43^\circ 50'$, $\beta = 0,0053024$ $\rho = 206265$ u (24) dobije se definitivni izraz za računanje normalnih ortometrijskih popravaka.

$$K_{\gamma}^{A,B} = -0,000\ 025\ 685\ H_s\ \Delta\varphi''\ |\text{mm}|, \quad (26)$$

gdje je:

$K_{\gamma}^{A,B}$ — normalna ortometrijska korekcija u milimetrima

H_s — srednja visina u metrima $H_s = \frac{H_A + H_B}{2}$

$\Delta\varphi''$ — razlika geografskih širina u sekundama $\Delta\varphi'' = \varphi_B - \varphi_A$.

Na osnovu (26) sastavljena je tablica 1, a njena upotrebu objašnjava slijedeći primjer.

Primjer 1.

Sračunati normalnu ortometrijsku korekciju za $H_s = 463\text{ m}$, $\Delta\varphi'' = 25''$.

Iz tablice 1 za $\Delta\varphi'' = 25''$

$$\begin{cases} H_s = 400\text{ m} & K_{\gamma_{400}}^{A,B} = -0,257\text{ mm} \\ H_s = 600/10 & K_{\gamma_{60}}^{A,B} = -0,038 \\ H_s = 300/100 & K_{\gamma_3}^{A,B} = -0,002 \\ \hline \Sigma & = -0,297\text{ mm} \end{cases}$$

Zbroj pojedinačnih popravaka daje normalnu ortometrijsku korekciju $K_{\gamma}^{A,B} = -0,297\text{ mm} = -0,30\text{ mm}$

3. NORMALNE VISINE ILI VISINE MOLODENSKOG

Svrha ovog poglavlja nisu teorijska razmatranja normalnih visina, (što se nalazi u gotovo u svakom suvremenijem udžbeniku iz Više geodezije), nego dobivanje prikladnog izraza za računanje normalnih visina za područje naše zemlje, na osnovu Geodetskog sistema 1980, te sastavljanje tablica za praktična računanja. Normalna visina razmatrane točke B prema Molodenskom definira na je izrazom

$$H_N^B = \frac{1}{\gamma_m^B} \int_{(OB)} g \cdot dh, \quad (27)$$

gdje je:

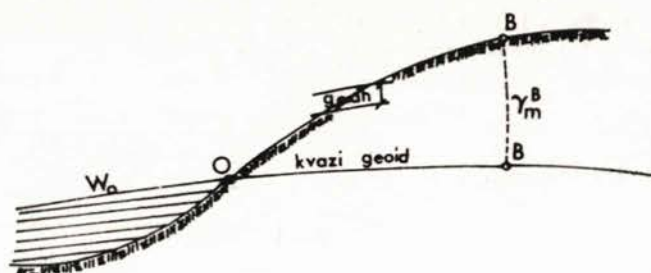
H_N^B — normalna visina točke B

γ_m^B — normalno ubrzanje sile teže na težišnici točke B na visini $\frac{H^B}{2}$
(v. izraz (3))

g — mjereno ubrzanje sile teže sl. 3

Tablica 1

$\Delta\varphi''$	H, [m]									
	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
1	-.003	-.005	-.008	-.010	-.013	-.015	-.018	-.021	-.023	-.026
2	-.005	-.010	-.015	-.021	-.026	-.031	-.036	-.041	-.046	-.051
3	-.008	-.015	-.023	-.031	-.039	-.046	-.054	-.062	-.069	-.077
4	-.010	-.021	-.031	-.041	-.051	-.062	-.072	-.082	-.092	-.103
5	-.013	-.026	-.039	-.051	-.064	-.077	-.090	-.103	-.116	-.128
6	-.015	-.031	-.046	-.062	-.077	-.092	-.108	-.123	-.139	-.154
7	-.018	-.036	-.054	-.072	-.090	-.108	-.126	-.144	-.162	-.180
8	-.021	-.041	-.062	-.082	-.103	-.123	-.144	-.164	-.185	-.205
9	-.023	-.046	-.069	-.092	-.116	-.139	-.162	-.185	-.208	-.231
10	-.026	-.051	-.077	-.103	-.128	-.154	-.180	-.205	-.231	-.257
11	-.028	-.057	-.085	-.113	-.141	-.170	-.198	-.226	-.254	-.283
12	-.031	-.062	-.092	-.123	-.154	-.185	-.216	-.247	-.277	-.308
13	-.033	-.067	-.100	-.134	-.167	-.200	-.234	-.267	-.301	-.334
14	-.036	-.072	-.108	-.144	-.180	-.216	-.252	-.288	-.324	-.360
15	-.039	-.077	-.116	-.154	-.193	-.231	-.270	-.308	-.347	-.385
16	-.041	-.082	-.123	-.164	-.205	-.247	-.288	-.329	-.370	-.411
17	-.044	-.087	-.131	-.175	-.218	-.262	-.306	-.349	-.393	-.437
18	-.046	-.092	-.139	-.185	-.231	-.277	-.324	-.370	-.416	-.462
19	-.040	-.098	-.146	-.195	-.244	-.293	-.342	-.390	-.439	-.488
20	-.051	-.103	-.154	-.205	-.257	-.308	-.360	-.411	-.462	-.514
21	-.054	-.108	-.162	-.216	-.270	-.324	-.378	-.432	-.485	-.539
22	-.057	-.113	-.170	-.226	-.283	-.339	-.396	-.452	-.509	-.565
23	-.059	-.118	-.177	-.236	-.295	-.354	-.414	-.473	-.532	-.591
24	-.062	-.123	-.185	-.247	-.307	-.370	-.432	-.493	-.555	-.616
25	-.064	-.128	-.193	-.257	-.321	-.385	-.449	-.514	-.578	-.642
26	-.067	-.134	-.200	-.267	-.334	-.401	-.467	-.534	-.601	-.668
27	-.069	-.139	-.208	-.277	-.347	-.416	-.485	-.555	-.624	-.693
28	-.072	-.144	-.216	-.288	-.360	-.432	-.503	-.575	-.647	-.719
29	-.074	-.149	-.223	-.298	-.372	-.447	-.521	-.596	-.670	-.745
30	-.077	-.154	-.231	-.308	-.385	-.462	-.539	-.616	-.693	-.771
31	-.080	-.159	-.239	-.318	-.398	-.478	-.557	-.637	-.717	-.796
32	-.082	-.164	-.247	-.329	-.411	-.493	-.575	-.658	-.740	-.822
33	-.085	-.170	-.254	-.339	-.424	-.509	-.593	-.678	-.763	-.848
34	-.087	-.175	-.262	-.349	-.437	-.524	-.611	-.699	-.786	-.873
35	-.090	-.180	-.270	-.360	-.449	-.539	-.629	-.719	-.809	-.899
36	-.092	-.185	-.277	-.370	-.462	-.555	-.647	-.740	-.832	-.925
37	-.095	-.190	-.285	-.380	-.475	-.570	-.665	-.760	-.855	-.950
38	-.098	-.195	-.293	-.390	-.488	-.586	-.683	-.781	-.878	-.976
39	-.100	-.200	-.301	-.401	-.501	-.601	-.701	-.801	-.902	-.1002
40	-.103	-.205	-.308	-.411	-.514	-.616	-.719	-.822	-.925	-.1027
41	-.105	-.211	-.316	-.421	-.527	-.632	-.737	-.842	-.948	-.1053
42	-.108	-.216	-.324	-.432	-.539	-.647	-.755	-.863	-.971	-.1079
43	-.110	-.221	-.331	-.442	-.552	-.663	-.773	-.884	-.994	-.1104
44	-.113	-.226	-.339	-.452	-.565	-.678	-.791	-.904	-.1017	-.1130
45	-.116	-.231	-.347	-.462	-.578	-.693	-.809	-.925	-.1040	-.1156
46	-.118	-.236	-.354	-.473	-.591	-.709	-.827	-.945	-.1063	-.1182
47	-.121	-.241	-.362	-.483	-.604	-.724	-.845	-.966	-.1086	-.1207
48	-.123	-.247	-.370	-.493	-.616	-.740	-.863	-.986	-.1110	-.1233
49	-.126	-.252	-.378	-.503	-.629	-.755	-.881	-.1007	-.1133	-.1259
50	-.128	-.257	-.385	-.514	-.642	-.771	-.899	-.1027	-.1156	-.1284



Sl. 3

Ako se u (27) uvrsti umjesto g izraz

$$g = \gamma + (g - \gamma),$$

dobije se

$$H_N^B = \frac{1}{\gamma_m^B} \int_{(OB)} \gamma \, dh + \frac{1}{\gamma_m^B} \int_{(OB)} (g - \gamma) \, dh, \quad (28)$$

gdje je:

$$(g - \gamma) - \text{Fayeova anomalija.}$$

Prvi član jednadžbe (28) je normalna ortometrijska visina H_γ^B točke B, te (28) poprima oblik

$$H_N^B = H_\gamma^B + \frac{1}{\gamma_m^B} \int_{(OB)} (g - \gamma) \, dh. \quad (29)$$

Iz (28) slijedi da se normalne visine razlikuju od normalnih ortometrijskih visina za izraz

$$K_{(g-\gamma)}^B = \frac{1}{\gamma_m^B} \int_{(OB)} (g - \gamma) \, dh,$$

koji je funkcija anomalije ubrzanja sile teže i mjerene visinske razlike.

Primijeni li se (28) na drugu točku A dobije se

$$H_N^A = H_\gamma^A + \frac{1}{\gamma_m^A} \int_{(OA)} (g - \gamma) \, dh. \quad (30)$$

Logično je, da je normalna visinska razlika točaka A i B jednaka razlici njihovih normalnih visina tj.

$$\Delta h_N^{A,B} = H_N^B - H_N^A = H_\gamma^B - H_\gamma^A + \frac{1}{\gamma_m^B} \int_{(OB)} (g - \gamma) \, dh - \frac{1}{\gamma_m^A} \int_{(OA)} (g - \gamma) \, dh \quad (31)$$

Prvi član u (31) je normalna ortometrijska visinska razlika, a druga dva člana su korekcije radi anomalija ubrzanja sile teže. Pošto te korekcije nisu velike

(v. tablicu 2) a točke A i B su zapravo susjedni reperi, može se γ_m^A i γ_m^B zameniti srednjom vrijednosti normalnog ubrzanja sile teže

$$\gamma_m = \frac{\gamma_m^A + \gamma_m^B}{2}.$$

U tom slučaju (31) prelazi u

$$\Delta h_N^{A,B} = \Delta h^{A,B} + \frac{1}{\gamma_m} \int_{(AB)} (g - \gamma) dh. \quad (32)$$

Ako se (11) uvrsti u (32) dobije se

$$\Delta h_N^{A,B} = \Delta h_{mjer.}^{A,B} + K_\gamma^{A,B} + K_{(g-\gamma)}^{A,B} = \Delta h_{mjer.}^{A,B} + K_N^{A,B}. \quad (33)$$

gdje je:

- $\Delta h_N^{A,B}$ — normalna visinska razlika točki A i B
- $\Delta h_{mjer.}^{A,B}$ — mjerena visinska razlika točki A i B
- $K_N^{A,B}$ — normalna korekcija visinske razlike
- $K_\gamma^{A,B}$ — normalna ortometrijska korekcija visinske razlike
- $K_{(g-\gamma)}^{A,B}$ — korekcija zbog anomalije ubrzanja sile teže

Neposredno iz (33) slijedi:

$$K_N^{A,B} = K_\gamma^{A,B} + K_{(g-\gamma)}^{A,B} \quad (34)$$

Uvede li se u (32) srednja vrijednost anomalije

$$(g - \gamma)_s = \frac{(g - \gamma)_A + (g - \gamma)_B}{2},$$

što je opravdano zbog blizine repera, može se integral na desnoj strani (32) riješiti primjenom teorema srednje vrijednosti

$$\int_{(AB)} (g - \gamma) dh = (g - \gamma)_s \int_{(AB)} dh = (g - \gamma)_s \Delta h_{mjer.}^{A,B}. \quad (35)$$

Nadalje, uvedimo u (32) umjesto γ_m konstantno normalno ubrzanje $\gamma_s = 9,8051443 \text{ ms}^{-2}$, koje se odnosi na srednju širinu područja Jugoslavije,

$$K_{(g-\gamma)}^{A,B} = 1,01987 \cdot 10^{-3} (g - \gamma)_s \Delta h_{mjer.}^{A,B}. \quad (36)$$

gdje je izraženo:

$$\begin{aligned} (g - \gamma)_s & \text{ u miligalima } (10^{-5} \text{ ms}^{-2}) \\ \Delta h_{mjer.}^{A,B} & \text{ u metrima} \\ K_{(g-\gamma)}^{A,B} & \text{ u milimetrima.} \end{aligned}$$

Uvođenjem srednjeg ubrzanja sile teže γ_s na mjesto γ_m , za ekstremne uvjete $\Delta\varphi = 3^\circ$ i $(g - \gamma)_s = 100 \cdot 10^{-5} \text{ ms}^{-2}$ i $\Delta h_{mjer.}^{A,B} = 100 \text{ m}$, dobije se pogreška u korekciji $K_{(g-\gamma)}^{A,B}$ od svega 0,0003 mm. To je i razlog za pojednostavljenje računanja $K_{(g-\gamma)}^{A,B}$.

Ako se u (34) uvrsti (26) i (36) dobije se konačni izraz za računanje popravaka mjerenih visinskih razlika u sistemu normalnih visina:

$$K_N^{A,B} = -0,000 \cdot 025685 H_s \cdot \Delta\varphi'' + 0,00101987 (g-\gamma)_s \Delta h_{mjer.}^{A,B} \text{ mm} \quad (37)$$

U prethodnoj formuli je: H_s i $\Delta h_{mjer.}^{A,B}$ izraženo u metrima, $\Delta\varphi$ u sekundama i $(g-\gamma)$ u miligalima.

Za praktična računanja korekcija, u cilju dobivanja normalnih visinskih razlika koristi se (37) ili tablica 1 za prvi član i tablica 2 za drugi član izraza (37).

Primjer 2.

Sračunati normalnu korekciju za:

$$H_s = \frac{H^A + H^B}{2} = 463 \text{ m,}$$

$$\Delta\varphi = \varphi_B - \varphi_A = 25'',$$

$$(g - \gamma)_s = \frac{(g - \gamma)_A + (g - \gamma)_B}{2} = 40 \cdot 10^{-5} \text{ ms}^{-2} \quad \text{i}$$

$\Delta h_{mjer.}^{A,B} = H^B - H^A = 56,13562 \text{ m}$, te sa sračunatim korekcijama i mjenom visinskom razlikom sračunati normalnu visinsku razliku $\Delta h_N^{A,B}$ točaka A i B. Računanje prvog člana u (37) objašnjeno je u primjeru 1. tj. $K_\gamma^{A,B} = -0,297 \text{ mm}$. Drugi član se dobije iz tablice 2 i to u retku 40 mgala:

za 50 m 2.040 mm

za 60/10 m 0.245 mm

za 0,1 m 0,004 mm

za 0,03 m 0,001 mm

2.290 mm

$$\begin{aligned} \Delta h_N^{A,B} &= 56,13562 + K_\gamma^{A,B} + K_{(g-\gamma)_s}^{A,B} = 56,13562 - 0,00030 + 0,00229 = \\ &= 56,13761 \text{ m} \end{aligned}$$

LITERATURA

- [1] Helmert, F. K.: Die Mathematischen und Physikalischen Theorien der Höheren Geodäsie, zweite Auflage, Leipzig 1962.
- [2] Klak, S.: Gravimetrija, Zagreb 1974.
- [3] Klak, S., Bilajbegović A.: Zbornik radova Geodetskog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu, Niz D Svezak broj 1, Zagreb 1981.
- [4] Vykutíl, I.: Vyšší Geodézie, Praha 1982.
- [5] Moritz, H.: Zbornik radova Geodetskog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu, Niz C, Svezak broj 2, Zagreb 1981.

Tablica 2

(g- γ) [mgal]	Δh_{mjer} [m]									
	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
1	.010	.020	.031	.041	.051	.061	.071	.082	.092	.102
2	.020	.041	.061	.082	.102	.122	.143	.163	.184	.204
3	.031	.061	.092	.122	.153	.184	.214	.245	.275	.306
4	.041	.082	.122	.163	.204	.245	.286	.326	.367	.408
5	.051	.102	.153	.204	.255	.306	.357	.408	.459	.510
6	.061	.122	.184	.245	.306	.367	.428	.490	.551	.612
7	.071	.143	.214	.286	.357	.428	.500	.571	.643	.714
8	.082	.163	.245	.326	.408	.490	.571	.653	.734	.816
9	.092	.184	.275	.367	.459	.551	.643	.734	.826	.918
10	.102	.204	.306	.408	.510	.612	.714	.816	.918	1.020
11	.112	.224	.337	.449	.561	.673	.785	.898	1.010	1.122
12	.122	.245	.367	.490	.612	.734	.857	.979	1.101	1.224
13	.133	.265	.398	.530	.663	.796	.928	1.061	1.193	1.326
14	.143	.286	.428	.571	.714	.857	1.000	1.142	1.285	1.428
15	.153	.306	.459	.612	.765	.918	1.071	1.224	1.377	1.530
16	.163	.326	.490	.653	.816	.970	1.142	1.305	1.469	1.632
17	.173	.347	.520	.694	.867	1.040	1.214	1.387	1.560	1.734
18	.184	.367	.551	.734	.918	1.101	1.285	1.469	1.652	1.836
19	.194	.388	.581	.775	.969	1.163	1.356	1.550	1.744	1.938
20	.204	.408	.612	.816	1.020	1.224	1.428	1.632	1.836	2.040
21	.214	.428	.643	.857	1.071	1.285	1.499	1.713	1.928	2.142
22	.224	.449	.673	.898	1.122	1.346	1.571	1.795	2.019	2.244
23	.235	.469	.704	.938	1.173	1.407	1.642	1.877	2.111	2.346
24	.245	.490	.734	.970	1.224	1.469	1.713	1.958	2.203	2.448
25	.255	.510	.765	1.020	1.275	1.530	1.785	2.040	2.295	2.550
26	.265	.530	.796	1.061	1.326	1.591	1.856	2.121	2.387	2.652
27	.275	.551	.826	1.101	1.377	1.652	1.928	2.203	2.478	2.754
28	.286	.571	.857	1.142	1.428	1.713	1.999	2.285	2.570	2.856
29	.296	.592	.887	1.183	1.479	1.775	2.070	2.366	2.662	2.958
30	.306	.612	.918	1.224	1.530	1.836	2.142	2.447	2.754	3.060
31	.316	.632	.949	1.265	1.581	1.897	2.213	2.529	2.846	3.162
32	.326	.653	.979	1.305	1.632	1.958	2.285	2.611	2.937	3.264
33	.337	.673	1.010	1.346	1.683	2.019	2.356	2.693	3.029	3.366
34	.347	.694	1.040	1.387	1.734	2.081	2.427	2.774	3.121	3.468
35	.357	.714	1.071	1.428	1.785	2.142	2.499	2.856	3.213	3.570
36	.367	.734	1.101	1.469	1.836	2.203	2.570	2.937	3.304	3.672
37	.377	.755	1.132	1.509	1.887	2.264	2.642	3.019	3.396	3.774
38	.388	.775	1.163	1.550	1.938	2.325	2.713	3.100	3.488	3.876
39	.398	.796	1.193	1.591	1.989	2.387	2.784	3.182	3.580	3.978
40	.408	.816	1.224	1.632	2.040	2.442	2.856	3.264	3.672	4.080
41	.418	.836	1.254	1.673	2.091	2.509	2.927	3.345	3.763	4.182
42	.428	.857	1.285	1.713	2.142	2.570	2.999	3.427	3.855	4.284
43	.439	.877	1.316	1.754	2.193	2.631	3.070	3.508	3.947	4.386
44	.449	.898	1.346	1.795	2.244	2.693	3.141	3.590	4.039	4.488
45	.459	.918	1.377	1.836	2.295	2.754	3.213	3.672	4.131	4.590
46	.469	.938	1.407	1.877	2.346	2.815	3.284	3.753	4.222	4.692
47	.479	.959	1.438	1.917	2.397	2.876	3.355	3.835	4.314	4.794
48	.490	.979	1.469	1.958	2.448	2.937	3.427	3.916	4.406	4.896
49	.500	1.000	1.499	1.999	2.499	2.999	3.498	3.998	4.498	4.998
50	.510	1.020	1.530	2.040	2.550	3.060	3.570	4.080	4.590	5.099

Tablica 2 (nastavak)

(g- γ) [mgal]	Δh_{mjer} [m]									
	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
51	.520	1.040	1.560	2.081	2.601	3.121	3.641	4.161	4.681	5.201
52	.530	1.061	1.591	2.121	2.652	3.182	3.712	4.243	4.773	5.303
53	.541	1.081	1.622	2.162	2.703	3.243	3.784	4.324	4.865	5.405
54	.551	1.101	1.652	2.203	2.754	3.304	3.855	4.406	4.957	5.507
55	.561	1.122	1.683	2.244	2.805	3.366	3.927	4.488	5.049	5.609
56	.571	1.142	1.713	2.285	2.856	3.427	3.998	4.569	5.140	5.711
57	.581	1.163	1.744	2.325	2.907	3.488	4.069	4.651	5.232	5.813
58	.592	1.183	1.775	2.366	2.958	3.549	4.141	4.732	5.324	5.915
59	.602	1.203	1.805	2.407	3.009	3.610	4.212	4.814	5.416	6.017
60	.612	1.224	1.836	2.448	3.060	3.672	4.284	4.896	5.507	6.119
61	.622	1.244	1.866	2.489	3.111	3.733	4.355	4.977	5.599	6.221
62	.632	1.265	1.897	2.529	3.162	3.794	4.426	5.059	5.691	6.323
63	.643	1.285	1.928	2.570	3.213	3.855	4.498	5.140	5.783	6.425
64	.653	1.305	1.958	2.611	3.264	3.916	4.569	5.222	5.875	6.527
65	.663	1.326	1.989	2.652	3.315	3.978	4.641	5.303	5.966	6.629
66	.673	1.346	2.019	2.693	3.366	4.039	4.712	5.385	6.058	6.731
67	.683	1.367	2.050	2.733	3.417	4.100	4.783	5.467	6.150	6.833
68	.694	1.387	2.081	2.774	3.468	4.161	4.855	5.548	6.242	6.935
69	.704	1.407	2.111	2.815	3.519	4.222	4.926	5.630	6.334	7.037
70	.714	1.428	2.142	2.856	3.570	4.284	4.998	5.711	6.425	7.139
71	.724	1.448	2.172	2.897	3.621	4.345	5.069	5.793	6.517	7.241
72	.734	1.469	2.203	2.937	3.672	4.406	5.140	5.875	6.609	7.343
73	.745	1.489	2.234	2.978	3.723	4.467	5.212	5.956	6.701	7.445
74	.755	1.509	2.264	3.019	3.774	4.528	5.283	6.038	6.793	7.547
75	.765	1.530	2.295	3.060	3.825	4.590	5.354	6.119	6.884	7.649
76	.775	1.550	2.325	3.100	3.876	4.651	5.426	6.201	6.976	7.751
77	.785	1.571	2.356	3.141	3.927	4.712	5.497	6.283	7.068	7.853
78	.796	1.591	2.387	3.182	3.978	4.773	5.569	6.364	7.160	7.955
79	.806	1.611	2.417	3.223	4.029	4.834	5.640	6.446	7.251	8.057
80	.816	1.632	2.448	3.264	4.080	4.896	5.711	6.527	7.343	8.149
81	.826	1.652	2.478	3.304	4.131	4.957	5.783	6.609	7.435	8.261
82	.836	1.673	2.509	3.345	4.182	5.018	5.854	6.691	7.527	8.363
83	.847	1.693	2.540	3.386	4.233	5.079	5.926	6.772	7.619	8.465
84	.857	1.713	2.570	3.427	4.284	5.140	5.997	6.854	7.710	8.567
85	.867	1.734	2.601	3.468	4.335	5.201	6.068	6.935	7.802	8.669
86	.877	1.754	2.631	3.508	4.386	5.263	6.140	7.017	7.894	8.771
87	.887	1.775	2.662	3.549	4.437	5.324	6.211	7.099	7.986	8.873
88	.898	1.795	2.693	3.590	4.488	5.385	6.283	7.180	8.078	8.975
89	.908	1.815	2.723	3.631	4.539	5.446	6.354	7.262	8.169	9.077
90	.918	1.836	2.754	3.672	4.590	5.507	6.425	7.343	8.261	9.170
91	.928	1.856	2.784	3.712	4.641	5.569	6.497	7.425	8.353	9.281
92	.938	1.877	2.815	3.753	4.692	5.630	6.568	7.506	8.445	9.383
93	.949	1.897	2.846	3.794	4.743	5.691	6.640	7.588	8.537	9.485
94	.959	1.917	2.876	3.835	4.794	5.752	6.711	7.670	8.628	9.587
95	.969	1.938	2.907	3.876	4.845	5.813	6.782	7.751	8.720	9.689
96	.979	1.958	2.937	3.916	4.896	5.875	6.854	7.833	8.812	9.791
97	.989	1.979	2.968	3.957	4.947	5.936	6.925	7.914	8.904	9.893
98	1.000	1.999	2.999	3.998	4.998	5.997	6.997	7.996	8.996	9.995
99	1.010	2.019	3.029	4.039	5.049	6.058	7.068	8.078	9.087	10.097
100	1.020	2.040	3.060	4.080	5.099	6.119	7.139	8.159	9.179	10.199

SAŽETAK

Međunarodna asocijacija za geodeziju i geofiziku na svom zasjedanju u Canberri 1979 godine donijela je novi sistem geodetskih parametara tzv. »Geodetski sistem 1980.« Između ostalog data je i formula za računanje normalnog ubrzanja sile teže. Uzimajući u obzir navedenu formulu i raspoloživi materijal mjerenja II. NVT na području naše zemlje, razmatrani su prikladni visinski sustavi, te izvedene formule i sračunate tablice za računanje normalnih ortometrijskih i normalnih visina ili visina Molodenskog.

ZUSAMMENFASSUNG

Diese Arbeit umfast die Formeln und die Tafeln für die Berechnung den normalen und normalen orthometrischen Höhen die sich auf das Gebiet von Jugoslawien beziehen, auf Grunde vom Gedätischen System 1980.

Primljeno: 1984—05—30