UDK 681.5.015
681.586
Pregledni rad

PRINCIPI FILTRACIJE I PRIPREME REGISTRACIJE KONTINUIRANIH MJERENJA ZA OBRADU I ANALIZU

*Radovan MARJANOVIĆ — Zagreb**

Primjenom električnih i elektroničkih senzora [6] u mogućnosti smo kontinuirano registrirati procese koji su funkcije vremena y(t). To mogu na pr. biti registracija zračnog pritiska, temeperature, promjena neke dimenzije uslijed opterećenja ili nekog drugog utjecaja, vibracije i sl. [5].

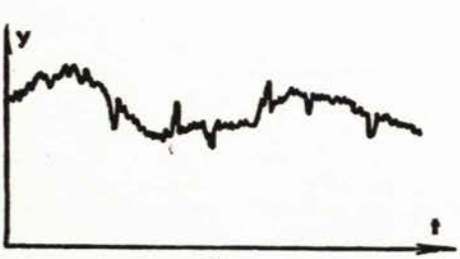
U svrhu lakše obrade podataka na kompjuteru, kontinuirane je registracije u diskretnim vremenskim intervalima potrebno digitalizirati. Taj postupak je moguće obaviti uz pomoć digitalizatora ili manuelno očitavanjem ordinata u određenom mjerilu. Ako su intervali na apscisnoj osi ekvidistantni tj. vremenske diferencije Δt konstantne, izraz:

$$f_A = \frac{1}{\Delta t}$$

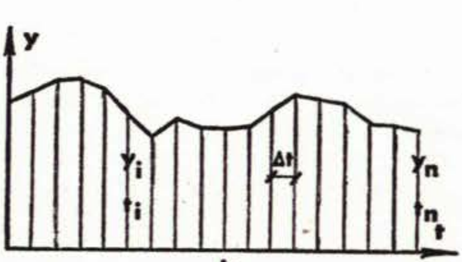
nazivamo frekvencija uzorkovanja. O ovoj frekvenciji ovisi točnost izmjerene funkcije y(t). Stoga je interval Δt potrebno odabrati prema očekivanom frekventnom sadržaju signala mjerene funkcije. Pri tome je potrebno da je ispunjen uvjet:

$$f_A \geq 2f_M$$

gdje sa f_M označavamo najvišu frekvenciju sadržanu u mjerenom signalu, sl. 1.



Kontinuirana funkcija y(t)



Funkcija y(t) predočena diskretnim vrijednostima y_i na ekvidistantnim razmacima Δt

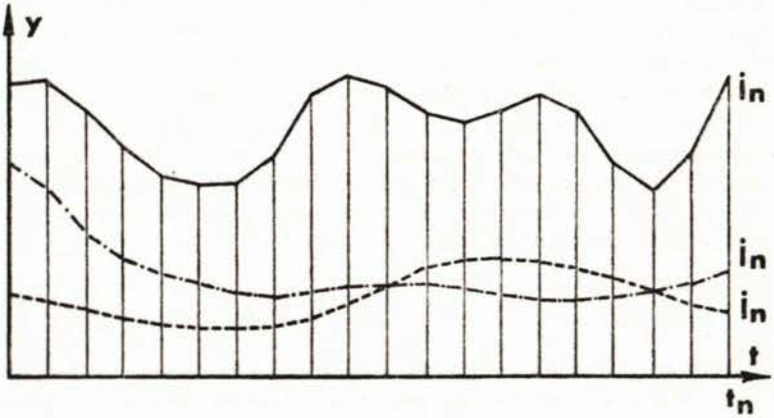
Sl. 1

* Adresa autora: Dr Radovan Marjanović dipl. inž. RGN fakultet, 41000 Zagreb, Pierottijeva br. 6.

Koristeći diskretne vrijednosti t_i možemo kontinuiranu funkciju y(t) pisati kao vektor odn. matricu s n stupaca i jednim retkom:

$$\underline{y} = [y_1 \; y_2 \; \ldots\ldots \; y_n] \,.$$

Takav vektor naziva se vremenski niz*. U praksi se međutim najčešće susrećemo s više vremenskih nizova koje registriramo istovremeno [4]. To može na pr. biti mjerenje deformacija nekog objekta pri čemu istovremeno mjerimo temperaturu sredine i zračni pritisak. Na taj način dobivamo matricu mjerenja koja se sastoji od m redaka i n stupaca. Pri tome broj m označuje broj različitih kanala ili senzora, a n broj mjerenih uzoraka. Takva matrica mjerenja naziva se multiple vremenski niz, sl. 2.



j = (1, . . . , m)

Sl. 2 Višekanalna registracija (multiple vremenski niz)

Mjerena funkcija y(t) može se predstaviti kao:

$$y(t) = d(t) + s(t)^{**}$$

Pri tom d(t) predstavlja deterministički dio, a s(t) stohastički dio. Karakteristično svojstvo determinističkog dijela je u tome što se u svakom trenutku t_i može egzaktno odrediti vrijednost funkcije d(t). Taj dio funkcije y(t) općenito označavamo nazivom trend***. Jedan od zadataka analize vremenskih nizova je odvajanje determinističkog od stohastičkog dijela funkcije y(t). Iako taj postupak nije moguće u potpunosti provesti, u praksi je dovoljno d(t) aproksimirati polinomom ili nekom trigonometrijskom funkcijom. Za razliku od determinističkog dijela, stohastički li slučajni dio s(t) nije moguće aproksimirati nekom poznatom funkcijom, iako se vrijednosti funkcije mijenjaju s vremenom.

* Engl. time series; njem. Zeitreihe.

** Kod nekih autora ova se funkcija ne predstavlja kao suma već kao produkt.

*** Deterministički dio d(t) funkcije y(t) sastavljen je od dugoperiodičnih signala — trenda, cikličkih signala i kratkoperiodičnih titraja.

Aproksimacija determinističkog dijela d(t) svodi se na određivanje koeficijenata polinoma oblika:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots\ldots + a_nx^n + v$$

koji se uz uvjet minimuma:

$$\Sigma v^2 = \min.$$

računaju po teoriji najmanjih kvadrata. Pri tome odstupanja v predstavljaju razlike mjerenih vrijednosti i diskretnih vrijednosti računatoga polinoma y na odgovarajućim mjestima x_i. Postupak je poznat pod nazivom polinomna regresija, kojim se uz slog mjerenih podataka dobivaju još dva vremenska niza trend i rezidual. Oba ova nova sloga moguće je koristiti za daljnje obrade. Kod obrade vremenskih nizova, kada želimo ustvrditi trend, najčešće koristimo linearnu regresiju ili polinome nižih redova. Za slučaj linearne regresije:

$$y = a_0 + a_1x$$

koeficijenti a_0 i a_1 dobivaju se rješenjem normalnih jednadžbi

$$\begin{aligned} \Sigma y &= a_0 n + a_1 \Sigma x \\ \Sigma xy &= a_0 \Sigma x + a_1 \Sigma x^2, \quad (n = \text{broj elemenata}), \end{aligned}$$

$$a_0 = \frac{(\Sigma y)(\Sigma x^2) - (\Sigma x)(\Sigma xy)}{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2},$$

$$a_1 = \frac{n\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}.$$

Rješenja polinomne regresije viših redova poznata su iz literature (na pr. [3], [10]) i ovdje se neće objašnjavati.

Nakon što se utvrđeni koeficijenti polinoma unaprijed odabranog stupnja računaju se razlike diskretnih vrijednosti polinoma i mjerenih vrijednosti, te se na taj način dobiva rezidual, za koji je u geodeziji uobičajen naziv popravak. Rezidual je oslobođen od niskofrekventnih signala, međutim u visokofrekventnom području u odnosu na mjerene podatke nije bitno promijenjen. Stoga je postupak regresije pogodan za oslobađanje mjerenih signala od utjecaja signala velikih amplituda koji se vrlo sporo manifestiraju. Takav utjecaj može na pr. biti promjena dnevne temperature kod mjerenja vibracija mosta i sl.

Za isključivanje određene neželjene frekvencije ili frekventnog područja iz mjerenog signala mnogo je pogodnije primijeniti filtere. Postoje: a) niskopropusni filteri, koji propuštaju samo frekvencije niže od odabrane granične frekvencije*.

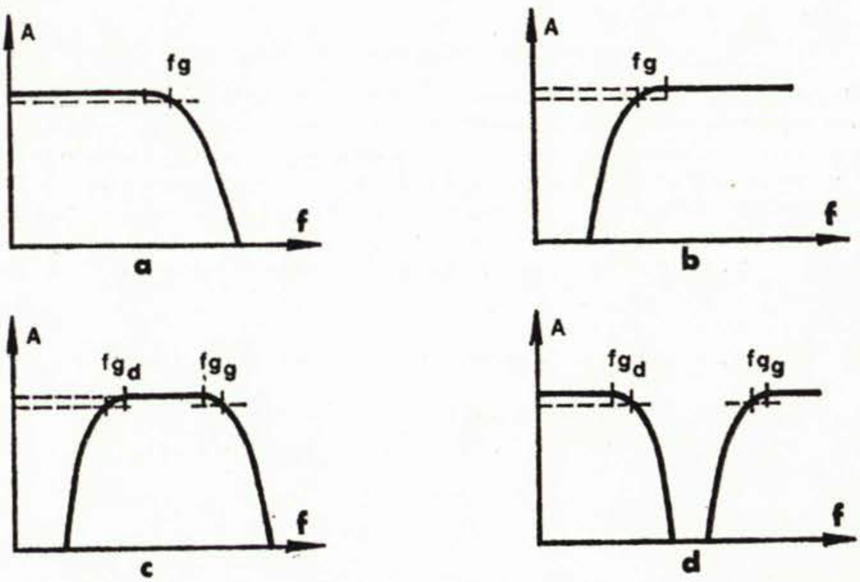
b) visokopropusni filteri, koji propuštaju samo frekvencije više od granične frekvencije, te iz prethodno navedenih filtera izvedeni filteri:

c) pojasni propusni filteri, koji propuštaju frekvencije u određenom frekventnom pojasu iznad donje granične frekvencije i ispod gornje granične frekvencije (moguće ih je dobiti serijskim spojem jednog niskopropusnog i jednog visokopropusnog filtera).

---

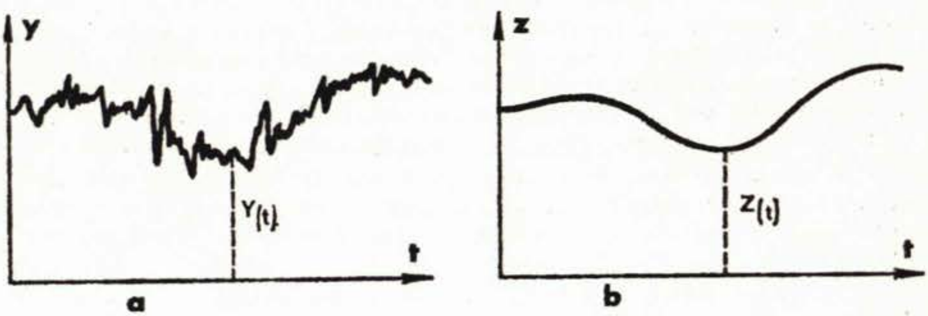
* Engl. cut — off frequency. Frekvencija kod koje pojačanje oslabi za —3 dB.

d) pojasni nepropusni filteri propuštaju sve frekvencije ispod i iznad određenog frekventnog pojasa (moguće ih je dobiti paralelnim spajanjem jednog niskopropusnog i jednog visokopropusnog filtera), sl. 3.



Sl. 3 Karakteristike osnovnih tipova filtera a) niskopropusni filter, b) visokopropusni filter, c) pojasni propusni filter, d) pojasni nepropusni filter

Filter svojom karakteristikom iz funkcije y(t) daje promijenjenu funkciju z(t), sl. 4.



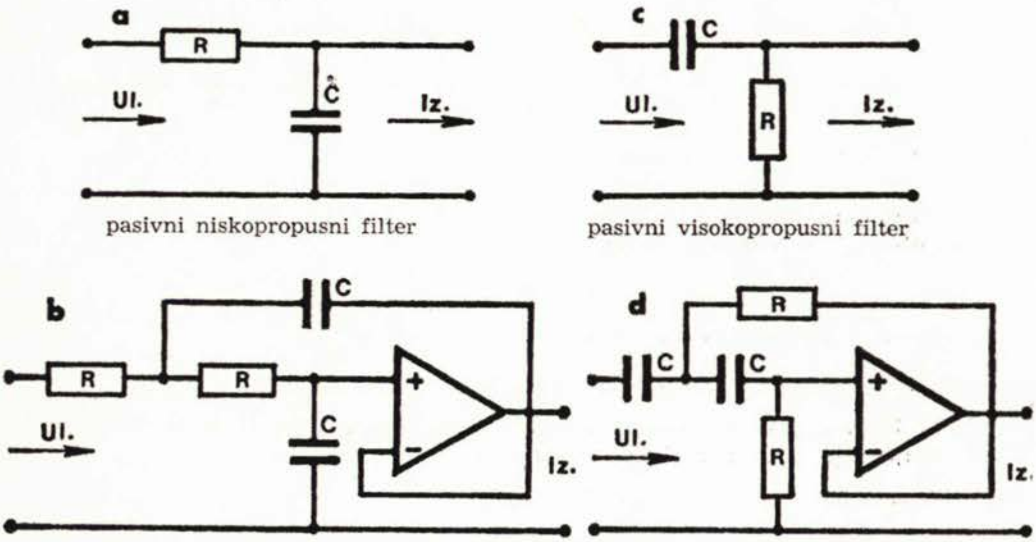
Sl. 4 Kontinuirana funkcija y(t) Niskopropusnim filterom promijenjena funkcija /y(t)/, z(t)

Općenito vrijedi izraz:

$$z(t) = L\,y(t)$$

gdje L predstavlja linearni operator [7].

Razlikujemo različite tipove filtera. Kod obrade električnih signala moguće je koristiti pasivne i aktivne filtere koji se priključuju na izvor analognog mjernog signala, sl. 5, [1].



aktivni niskopropusni filter

aktivni visokopropusni filter

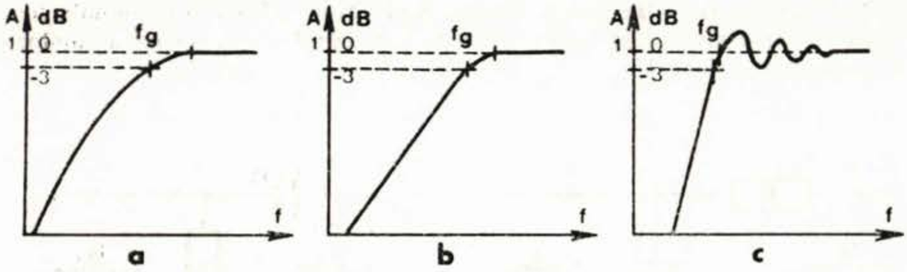
Sl. 5 Pasivni i aktivni filteri

Pasivni filteri oslabljuju određene frekvencije dok aktivni filteri mogu uz to i pojačati neke druge frekvencije. Bitna razlika između pasivnih i aktivnih filtera je u tome što aktivni filteri sadrže aktivni element (pojačalo), a frekventna karakeristika aktivnih filtera je redovito mnogo strmija. Pod pojmom frekventna karakteristika filtera podrazumjeva se grafički prikaz frekvencija koje filter propušta i koje ne propušta, sl. 3. Područja u kojima filter ne propušta u potpunosti, ali još nije dostigao svoj maksimum oslabljivanja, grafički prikazano čine blažu ili strmiju krivulju. Stoga i naziv strmiji ili blaži filteri. Mjera strmine filtera izražava se u dB po oktavi. Pri tome oktava predstavlja 2f ili f/2 u odnosu na frekvenciju f. Granična frekvencija filtera određena je vrijednostima pasivnih elemenata R i C, koji određuju vremensku konstantu. Vremenska konstanta dana je kao produkt kapaciteta C (u faradima) i otpora R (u ohmima). Taj produkt jednak je vremenu (u sekundama) koje je potrebno da napon na kondenzatoru U_c dostigne vrijednost:

$$U_c = U_n - U_n/e$$

gdje U_n predstavlja napon napajanja, što odgovara oko 63% napona napajanja (e = baza prirodnog logaritma) [1].

Prema obliku funkcije frekventne karakteristike nazvani su najpoznatiji filteri: a) Bessel, b) Butterworth i c) Čebišev, sl. 6.



Sl. 6 Tipične frekventne karakteristike najpoznatijih visokopropusnih filtera.

Snimanje karakteristika filtera vrši se uz pomoć sinusnih signala frekvencije f i amplitude A pa ulazna funkcija

$$y(t) = A_f \sin 2\pi ft$$

na izlazu iz filtera poprima oblik

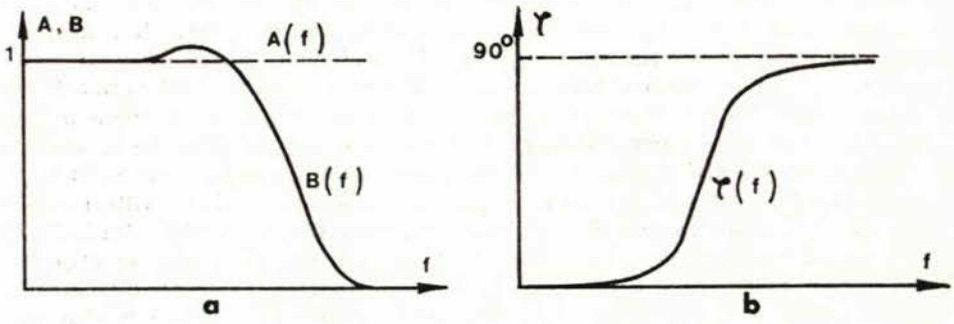
$$z(t) = B_f \sin 2\pi f(t - \varphi(f)) ,$$

gdje je B amplituda, a φ pomak u fazi izlaznog impulsa, [9]. Karakteristika filtera ocijenjuje se uz pomoć dva parametra:

a) odnosom izlazne i ulazne amplitude;

$$U(f) = \frac{B_f}{A_f}$$

b) pomakom u fazi $\varphi(f)$ izlaznog u odnosu na ulazni signal, sl. 7.



Sl. 7 Frekventna i fazna karakteristika niskopropusnog filtera

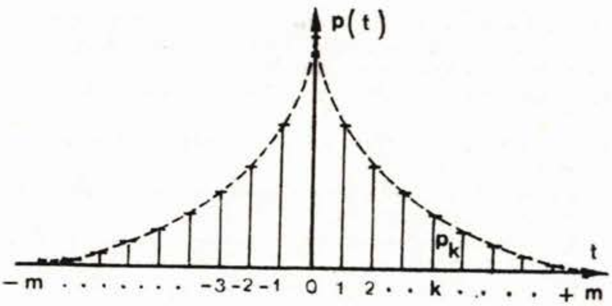
Filteri idealnih karakteristika za graničnu frekvenciju f_g mijenjaju skokovito svoju frekventnu propusnu karakteristiku, uz jedinično pojačanje u propusnom području:

$$U(f) = 1,$$

a pomak u fazi (f) ne postoji. Filteri idealnih karakteristika, međutim, ne postoje. Tako na pr. filteri po Čebiševu imaju izvanrednu strminu. Međutim, u početku propusne krivulje na pojedinim mjestima imaju promjenjivo pojačanje, koje je mjestimice veće od nominalnog (odn. 1), sl. 6.

U pravilu je strmina filtera proporcionalna s pomakom u fazi što često ograničava primjenu filtera vrlo strmih karakteristika. Osim filtracije električnih mjernih signala moguće je koristiti tzv. numeričke filtere koji se primijenjuju u obradi vremenskih nizova na kompjuteru. Realizacija numeričkih filtera unaprijed odabranih karakteristika vrlo je kompleksan zadatak, [2].

Najčešće se numerički filteri konstruiraju kao transverzalni [7] i to tako da se uzduž vremenskog niza primijenjuju težinske funkcije dane određenim težinskim koeficijentima. Težinski koeficijenti predstavljaju diskretne vrijednosti težinske funkcije u određenim intervalima Δt, [8], sl. 8.



Sl. 8 Težinski koeficijenti nekog numeričkog filtera

$$Z_i = \sum_{-m}^{+m} p_k \, y_{i-k},$$

gdje je: p_k — težinski koeficijent, y — mjerena veličina.
Kako su težinske funkcije najčešće simetrične u odnosu na promatrani podatak Z_i, gornji izraz poprima oblik:

$$Z_i = \sum_{k=0}^{m} p_k \, (y_{i-k} + y_{i+k}).$$

Najveći nedostatak numeričke filtracije je uz promjenu amplituda i faze, gubitak 2m mjerenih podataka, koji odgovaraju broju koeficijenata filtera. Taj nedostatak je zanemariv u dugim vremenskim nizovima kod kojih je broj elemenata n mnogo veći od broja koeficijenata filtera m. Nasuprot tome vremenski nizovi kraći od m ne mogu se uopće obrađivati, a u vremenskim nizovima kod kojih je n za mali broj elemenata veći od m nastupaju velika izobličenja u faznom i frekventnom spektru.

Vrlo pojednostavljeni numerički filter*, u kojem su težinski koeficijenti

$$p_k = \frac{1}{2m + 1},$$

* Takav je postupak u literaturi poznat kao »pomični prosjek« odn. engl.« (not weighted) moving average«.

moguće je konstruirati koristeći slog mjerenih podataka dužine m, iz kojeg se računa aritmetička sredina za mjesta Z_i [10]. Nakon što je izračunata aritmetička sredina za mjesto Z_i računa se aritmetička sredina za mjesto Z_{i+1} itd. Za taj slučaj možemo pisati

$$Z_i = \frac{1}{2m+1}(y_{i-m} + y_{i-m-1} + \ldots + y_i + \ldots + y_{i+m-1} + y_{i+m}).$$

Iako filtracija ovakvim filterom nema unaprijed poznatu karakteristiku ipak u stanovitim prilikama može dati zadovoljavajuća rješenja. Najveća mana takve filtracije je velika osjetljivost na pojavu ekstremnih vrijednosti.

LITERATURA

[1] Beckwith, T. G., Buck, N. L.: Mechanical Measurements (second edition), Addison — Wesley Pubishing Company Reading, Massachusetts — Menlo Park, California — London — Sydney — Manila.

[2] Demirel, H.: Statistische Analyse von Erdgezeitenbeobachtungen, Dissertation, Darmstadt, 1978.

[3] Ivanović, B.: Teorijska statistika, Jugoslovenski institut za ekonomska istraživanja, Beograd, 1966.

[4] Marjanović, R.: Beiträge zur Deformationsmessung mit mechanischen Extensometern, Dissertation, Darmstadt, 1982.

[5] Marjanović, R.: Mjerenje deformacija ekstenzometrima i tiltmetrima, Geodetski list, Zagreb 1984, 1—3, 15—24.

[6] Marjanović, R.: Senzori za određivanje linearnih pomaka, Geodetski list, Zagreb 1984, 4—6.

[7] Niemeier, W.: Zur Auswertung geodätischer Messreihen, Allgemeine Vermessungs — Nachrichten, Karlsruhe, Januar 1980 Heft 1.

[8] Pelzer, H.: Zur Analyse von permanent registrierten Deformationen, VII. Internationaler Kurs für Ingenieurmessungen hoher Präzision, TH Darmstadt, 29. September — 8. Oktober 1976 Band II.

[9] Pelzer, H.: Besonderheiten der Auswertung kontinuierlicher Messungen und Probeme ihrer Interpretation, Kontinuierliche Messungen in der Ingenieurgeodäsie, RWTH Aachen, 1980.

[10] Serdar, V.: Udžbenik statistike, Školska knjiga Zagreb, 1961.

SAŽETAK

U ovom radu je prikazan postupak odabiranja diskretnih vrijednosti kontinuirane registracije. Opisan je deterministički dio vremenskog niza koji se može aproksimirati poznatim funkcijama i polinomima. Objašnjen je postupak polinomne regresije i njena zadaća pri obradi vremenskih nizova. Dane su osnove električne i numeričke filtracije kao i konstrukcija filtera, koji mogu poslužiti pri obradi vremenskih nizova.

ABSTRACT

In this work the rule for sampling discreet values of a continuated registration is given. The deterministic part of time series which can be aproximated with known functions and polynoms is described. The polynomial regression and its role in time series analysis is explained. The principles of electrical and numerical filtering and constructions of filters which could be used for time series analysis are given.

Primljeno: 1984-04-10