

UDK 528.063.1:513.76:528.7
528.063.1:513.76:528.11
Originalni znanstveni rad

SREDNJA POGREŠKA PROIZAŠLA IZ IZJEDNAČENJA ELEMENTA HELMERTOVE TRANSFORMACIJE I PRIMJENA TE POGREŠKE U AEROFOTOGRAMetriJI

Franjo BRAUM — Zagreb*

Za Helmertovu transformaciju jednog koordinatnog sustava x, y u neki drugi nužno je poznavati u oba sustava koordinate dviju (dovoljno) razmaknutih točaka. Ako je to slučaj za više od dvije točke, omogućeno je izjednačenje elemenata transformacije. Tok tog izjednačenja vidljiv je npr. iz formulara** s unesenim numeričkim primjerom koji se nalazi na str. 110 u [4]. U tom formularu imamo i rubriku za srednju pogrešku m :

$$m = \sqrt{\frac{[v_x v_x] + [v_y v_y]}{2n - 4}}, \quad (1)$$

gdje je n broj mjerenih točaka poznatih u oba koordinatna sustava, a broj 4 u nazivniku pod korjenom predstavlja broj elemenata transformacije kao traženih nepoznanica, a to su:

- V multiplikaciona konstanta,
 ϵ zaokretanje između oba koordinatna sustava,
 c_x adicione konstante.
 c_y

U ovom članku bavit ćemo se transformacijom fotogrametrijskih modelnih koordinata x_m, y_m u koordinate x_{fg}, y_{fg} u geodetskom koordinatnom sustavu. Indeks m odnosi se na fotogrametrijski određene koordinate u sustavu fotogrametrijskog modela, indeks fg na njihove transformirane vrijednosti u geodetskom sustavu, a indeks g bi se odnosio na geodetski određene koordinate x_g, y_g . Te ćemo indekse upotrebljavati gdje se ukaže potreba razlikovanja.

U $2n$ u (1) sadržana su x_m - i y_m -mjerena zadanih n točaka. To su dakle koordinatna mjerenja, a u brojniku pod korjenom u formuli (1) nalazi se suma kvadrata v_{xfg} -popravaka i v_{yfg} -popravaka, tj. ukupna suma kvadrata koordinatnih popravka. Iz toga proizlazi da m u (1) nije položajna srednja pogreška već srednja pogreška koordinatnih mjerenja. Prema tome su m_{fg} , m_{xfg} i m_{yfg} veličine istog reda (v. npr. (4)).

* Adresa autora: Prof. dr Franjo Braum, dipl. ing., Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Kačićeva 26. Ovaj rad izrađen je u okviru istraživačkog zadatka »Fotogrametrijsko istraživanje prikaza prostora« (voditelj autor), što ga financira Samoupravna interesna zajednica za znanstveni rad (Siz III).

** Prevedeni formular Muster 246 od Bundesvermessungsdienst Wien

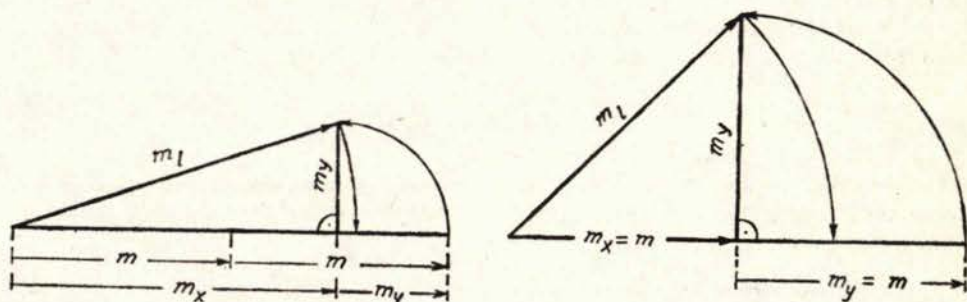
Oba mjerenja x_m i y_m kao i popravke v_{xfg} , v_{yfg} njihovih transformiranih vrijednosti su u (1) potpuno jednako tretirani, tako da bi se moglo reći

$$m = \frac{m_x + m_y}{2}, \quad (2)$$

a ne bi se moglo reći $m = (m_x^2 + m_y^2)^{\frac{1}{2}}$ jer koordinatne srednje pogreške m_x i m_y u toj kombinaciji prelaze obzirom na njihovu ortogonalnost u položajnu pogrešku m_l , pri čemu ne postoji mogućnost ni djelomične kompenzacije, već imamo neminovno povećanje u granicama (sl. 1a i b):

$$2m = m_x + m_y \geq m_l = \sqrt{m_x^2 + m_y^2} \geq m\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(m_x + m_y). \quad (3)$$

U nefotogrametrijskom geodetskom određivanju općenito nema razloga za



Sl. 1a i 1b. Velika i minimalna razlika između položajne srednje pogreške m_l i srednje koordinatne pogreške m .

razliku između srednjih pogrešaka u x_g - i y_g -smjeru, pa se u pravilu uzima:

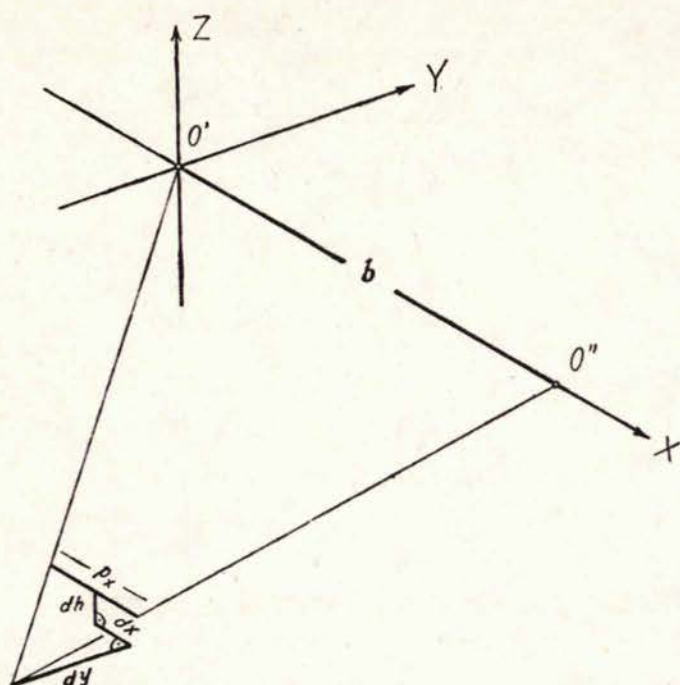
$$m_{xg} = m_{yg} = m. \quad (4)$$

To međutim nije slučaj kod aerofotogrametrijskog premjera, i to iz više razloga:

a) pogreška stereoparalakse p_x počinjena prigodom stereoskopske koincidencije prosječno više utječe na y izazivajući pogrešku dy (sl. 2) negoli na x (x -smjer se u aerofotogrametriji bar približno poklapa sa smjerom leta);

b) u aerofotogrametriji se danas gotovo isključivo upotrebljava film u namotku, pa usuh nakon fotoobrade namotka nije jednak u njegovom uzdužnom i poprečnom smjeru; to međutim ne spada u slučajne već u sistematske pogreške;

c) uslijed kutne brzine aviona iznad Zemlje $\rho : t$ na sl. 3) imat ćemo u smjeru leta, dakle u x -smjeru, linearni rasip $\partial x'$, tj. manju oštrinu preslikavanja ne-



Sl. 2. Utjecaj dy , dx , dh pogreške p_x stereoskopske koincidencije na modelne koordinate y , x , h .

goli u y -smjeru; taj rasip ne prouzrokuje sistematsku već slučajnu pogrešku u x -u.

Uzrok a) je po naravi geometrijski, uzrok b) tehnološki, a uzrok c) foto-grafski.

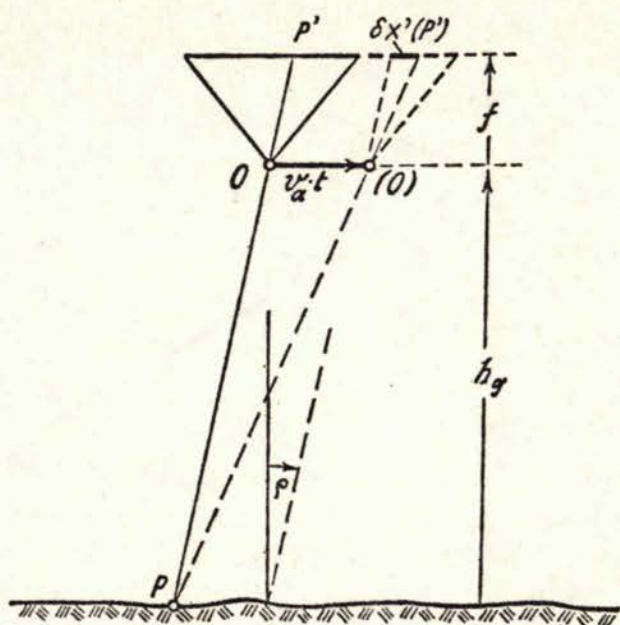
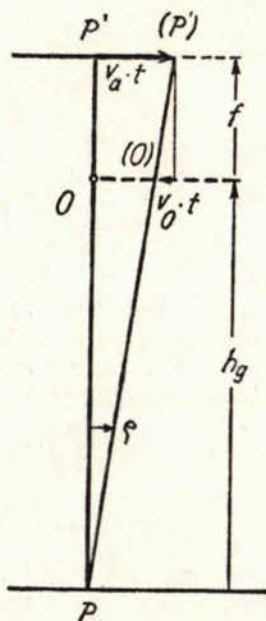
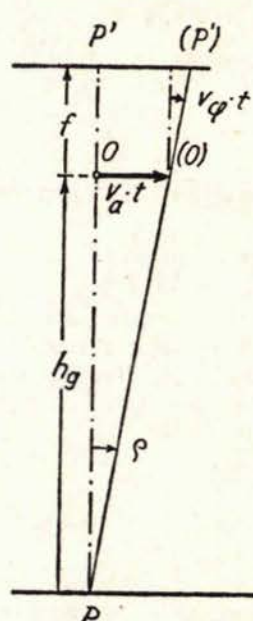
Bilo je pokušaja i u regularnoj fotogrametriji da se tehnički, još prigodom aerosnimanja, spriječi linearni rasip $\partial x'$ (Bildverwaschung, trascinamento). Santoni (Officine Galileo Firenze) je to kompenzirao prigodom eksponiranja diferencijalnim pomicanjem objektiva u smjeru protivnom od smjera leta brzinom (sl. 4):

$$v_0 = v_a \frac{f}{h_g + f} \quad (5)$$

Time nutarnja orijentacija nije više kruta. Drugi je način bio uzdužno gibanje kamere za vrijeme eksponaže u smjeru protivnom od smjera leta, i to brzinom (sl. 5):

$$v_{\text{y}} = \text{arc tg} (v_{\text{at}} : h_g) / t, \quad (6)$$

pri čemu nutarnja orijentacija kamere ostaje kruta.

Sl. 3. Linearni rasip $\delta x'$ pri aerosnimanju uslijed brzine aviona. [3]Sl. 4. Sprečavanje linearnog rasipa uslijed brzine aviona v_a pomoću diferencijalnog protusmjernog gibanja objektiva O brzinom v_0 za vrijeme eksponiranja t .Sl. 5. Sprečavanje linearnog rasipa uslijed relativne brzine v_a : h_g aviona iznad Zemlje pomoću diferencijalnog protusmjernog (uzdužnog) nagibanja čitave kamere brzinom v_φ za vrijeme eksponiranja t .

Kod obih metoda prikazanih na sl. 4 i 5 kompenzacija se sastoji u tome da zahvaljujući gibanju objektiva odnosno čitave kamere kroz vrijeme ekspoziranja svjetlosne zrake emitirane od neke točke snimane površine udaraju kroz čitavo to vrijeme u istu točku fotosloja unatoč relativne brzine aviona iznad snimane površine.

Obje metode postale su u priličnoj mjeri nepotrebne prelazom od zavora na pero na zapor s trajno rotirajućim lamelama koji omogućuju i 4 puta kraću ekspoziciju. Tome su doprinjeli i aerobjektivi jače svjetlosne jakosti (npr. Topar 1 : 4) i aerofotoslojevi jače osjetljivosti (npr. AGFA-GEAVERT Aviphot Pan 33 PE-Film). Međutim kod daljinskog snimanja upotrebljavaju se relativno nisko osjetljivi fotoslojevi i selektivni filtri. Prvo iz razloga što nisko osjetljivi fotoslojevi imaju fino fotografsko zрно, pa su oni sposobni za jako povećavanje, što je poželjno zbog sitnog mjerila daljinskih snimaka. Drugo iz razloga da bi se postignula određenija diferencijacija snimane površine prvenstveno one pokrivenne vegetacijom, jer se pojedine sastojine razlikuju po svojoj karakterističnoj remisionoj krivulji u elektromagnetskom spektru, pa se užim iskorištenim sektorom spektra postizava općenito efikasnija diferencijacija. Pogotovo prvi moment (niže osjetljivi fotoslojevi) zahtjeva produženo trajanje ekspozicije, a time i kompenzaciju, koja tako opet postaje aktualna. Dok u regularnoj aerofotogrametriji imamo već mogućnost ekspozicije $t = 1/1000$ sec, kod multispektralne kamere MSK-4 Carl Zeiss JENA [8] raspon mogućih ekspozicija ide od 7 ms do 56 ms, tj. od 1/143 do 1/18 sec. Tako duge ekspozicije zahtjevaju unatoč velike visine leta kompenzaciju, koja se izvodi nagibanjem kamere prema natrag brzinom (6), tj. ovisno o relativnoj visini leta h_g i brzini aviona v_a . Ta se brzina nagibanja može kod MSK-4 namjestiti u rasponu od 10 mrad/s do 40 mrad/s.

Zbog momenata a), b) i c) u aerofotogrametriji informacija iz formule (2) o srednjoj vrijednosti m od koordinatnih srednjih pogrešaka m_x i m_y ne zadovoljava, već je od interesa i njihov omjer.

Najvažniji od razloga nejednakosti $m_x \neq m_y$ u stereofotogrametriji je razlog a). U [7] dan je omjer

$$m_y : m_x = 1,83, \quad (7)$$

a u [2] izvedena je formula (117):

$$m_y : m_x = 2. \quad (8)$$

Razlika u vrijednostima (7) i (8) potječe od različitog dimenzioniranja modela. U [2] uzeto je $x = b$ i $y = 2b$.

Utjecaj b) je mnogo splasnuo upotrebom poliestarske baze filma umjesto acetatcelulozne. Afina deformacija snimka uslijed nejednakog usuha u x - i y -smjeru (l i q) iznosi (v. [2,11]) prema [9]:

$$\begin{array}{ll} \text{za acetatceluloznu bazu: } (s_1' : s_1') - 1 = A = - 0,333\% & (9) \\ \text{za poliestarsku bazu: } & A = + 0,040\% \end{array}$$

Kako se mjerilo modela u pravilu određuje po (većoj) $y = q$ -dimenziji, to će maksimalna pogreška u x -smjeru za takvu poliestarsku bazu iznositi

$$\delta x_{[m]} \doteq - \frac{1}{2} b_{[km]} \cdot 0,04 = - 0,02 b_{[km]}. \quad (10)$$

Zbog mnogo većeg afinog usuha kod acetatcelulozne baze bila je osporavana opravdanost Helmertove transformacije za aerofotogrametrijski premjer i preporučivalo se afinu transformaciju.

Podaci (9) i (10) govore o redu veličina, a nemaju pretenzije općenite vrijednosti za sve proizvode.

Utjecaj c) (sl. 3) prikazan je u [3,306-7]. Taj utjecaj iznosi:

$$\delta x'_{[mm]} = \frac{v_a [mm/sec]}{h_g [mm]} t_{[sec]} f_{[mm]} = \frac{1000 \cdot 1000}{60 \cdot 60} v_a [km/h] t_{[sec]} M_b, \quad (11)$$

gdje su

$\delta x'$ linearni rasip na snimku,

v_a brzina aviona,

t duljina eksponaže,

M_b mjerilo snimanja.

Vidimo da je linearni rasip linearno proporcionalan s kutnom brzinom $\text{arc tg}(v_a : h_g)$ (sl. 3) aviona iznad Zemlje, s duljinom eksponaže t i žarišnom daljinom objektiva aerokamere. On će dakle biti veći za starije zapore na pero negoli kod novih zapora s trajno rotirajućim lamelama, koji omogućuje kraće eksponaže t , nadalje bit će veći za niske letove, koje imamo kod krupnih mjerila snimanja, i veći kod veće brzine aviona v_a , koja kod današnjih za tu svrhu upotrebljivanih aviona iznosi barem 250 km/h. Iz tog razloga će kod okolnostinepovoljnih u tom pogledu omjeri (7) i (8) biti preveliki, na što sam naišao i u svojoj disertaciji [1], u kojoj sam iz testsnimaka Oberriet dobio iz 34 dvostrukih opažanja poređanih u jednom girusu:

$$|m_x| : |m_y| = 1,36. \quad (12)$$

Snimanje je izvršeno kamerom RC 7a, $f = 170$ mm sa zaporom na pero iz relativne visine $h_g = 1870$ m, mjerilo snimanja dakle $M_b = 0,17 : 1870 = 1 : 11000$, teren ravničast ($412 \leq h \leq 420$ m); za (12) upotrebljene su bile 33 kontrolne točke, dobro signalizirane, te ravnomjerno porazdjeljene diljem modela. Kako je snimano na ploče, to otpada uzrok b).

Vrijednost (12) znatno se razlikuje od vrijednosti (7) i (8), koje su međutim izvedene imajući u vidu samo geometrijske okolnosti. Pripisao sam to linearnom rasipu (11), prisjetio sam se da su kružni signali kontrolnih točaka bili na snimcima malo razvučeni, uložio sam ponovno snimke u stereokomparator i konstatirao da su svi signali bili zapravo ponešto eliptični s velikom osi u smjeru x . Minimalna eksponaža za upotrebljenu kameru iznosi za jednu vrst pera zapora 1/150, a za drugu vrst 1/250 sekunde.

U ispitivanju testsnimaka »Spitze« izvršenom na Geodetskom fakultetu u Zagrebu, Zavodu za fotogrametriju primjenjena je vanjska orijentacija pojedinačnih aerosnimaka. Kod te orijentacije otpada razlog a), jer se prethodno monokularnom viziranju visina h namješta na h -brojilu stereoinstrumenta po geodetskom podatku. Stoga (v. (4.1-2) u [5]) umjesto (7) i (8) teoretski (tj. geometrijski) važi odnos:

$$m_x = m_y. \quad (13)$$

Ni taj odnos nije potvrđen. Iz 52 i opet dvostrukih opažanja poređanih u jednom girusu dobiveno je:

$$|m_{ym}| : |m_{xm}| = 0,76. \quad (14)$$

Ovakvo određivanje iz dvostrukih opažanja podesno je utoliko što je ono neovisno o pogreškama geodetskog određivanja, koje često nisu slučajnog već sistematskog karaktera.

Testsnimci Spitze snimljeni su kamerom RMK 15/23 Opton, Oberkochen, žarišne daljine $f = 152,55$ m, zapor s trajno rotirajućim lamelama (Aerotop) minimalne eksponaže $1/1000$ sek. Teren je ravničast, mjerilo snimanja $M_b = 1 : 2100$, a relativna visina leta $h_g = f : M_b = 320,4$ m.

U pomanjkanju točnih podataka pretpostavimo vjerojatne podatke, tj. da je obzirom na zapor na pero (slučaj Oberriet) odnosno obzirom na nisku visinu leta (slučaj Spitze) bila upotrebljena minimalna duljina eksponaže, te da je bila primjenjena minimalna brzina aviona, pa imamo ove podatke za linearni rasip $\delta x'$ po formuli (11):

test	V_a [km/h]	t [sec]	M_b	$\delta x'_{[mm]}$
Oberriet	250	1/200	1 : 11000	0,032
Spitze	250	1/1000	1 : 2100	0,033

Iz slaganja vrijednosti $\delta x'$ moglo bi se naslućivati da se o toj veličini, koja se inače smatra maksimalno dozvoljenom, vodilo računa pri projektiranju aerosnimanja.

Pripišimo povećanje m_x -vrijednosti (12) odn. (14) u odnosu na teoretske vrijednosti (8) odn. (13) linearnom rasipu $\xi x'$. Time bi dobili da linearni rasip od 0,01 mm prouzrokuje povećanje m_x -vrijednosti od k -puta:

$$\text{Oberriet: } k = \left(\frac{2}{1,36} - 1 \right) \frac{1}{3,2} = \frac{0,47}{3,2} = 0,147 = 14,7\%, \quad (15)$$

$$\text{Spitze: } k = \left(\frac{1}{0,76} - 1 \right) \frac{1}{3,3} = \frac{0,316}{3,3} = 0,096 = 9,6\%. \quad (16)$$

Dakako da nam netočno poznavanje elemenata v_a i t ne dozvoljava točnu kvantitativnu ocijenu, ali postoji mogućnost da bi se iz podataka projekta snimanja i očekivanog rezultirajućeg rasipa $\xi x'$ moglo prognozirati povećanje srednje pogreške m_x . Za sigurnije određivanje vrijednosti k (15—16) sigurno već i danas postoje ispitani materijali. m_x ne smije biti prevelik ne samo zbog točnosti u x -smjeru nego i zbog točnosti visina.

Eksperimentalno određivanje iz velikog broja poznatih kontrolnih točaka koje nisu bile iskorištene za izjednačenje je moguće kod test-ispitivanja, dok se u regularnoj praksi moramo zadovoljiti s oskudnim brojem prekobrojnih orijentacionih točaka, koje iskoristimo za izjednačenje elemenata transformacije. To nam izjednačenje daje ponajprije samo vrijednost aritmetičke sredine $m = (2)$ srednjih pogrešaka m_x i m_y u geodetskom sustavu, a u aerofotogrametriji

interesiraju nas i posebno iznosi m_{y_m} i m_{x_m} kao i njihov omjer. Te vrijednosti možemo dobiti pomoću formula (66-67), u kojima $m_{x_{fg}}$ i $m_{y_{fg}}$ predstavljaju srednje pogreške m_x i m_y aerofotogrametrijskog određivanja izražene u geodetskom sistemu. Geodetski i modelni koordinatni sustav nisu identični ni paralelni. Inače ne bi bila potrebna Helmertova transformacija već bi bilo dovoljno jednostavno povećavanje s eventualnom translacijom. Za određivanje bilo x_{fg} -ova, bilo y_{fg} -ova, bezuvjetno su potrebna i x_m - i y_m -mjerjenja (transformacija polja $x, y!$)*, dakle $2n$ mjerjenja, gdje je n broj mjenjenih točaka poznatih u oba sustava (m i fg). Koordinate x_{fg} i pripadne pogreške $v_{x_{fg}}$ moguće je izračunati i bez adicione konstante c_y , pa bi za određivanje srednje pogreške $m_{x_{fg}}$ broj nepoznanica bio 3, a ne 4. Ne bi za tu svrhu uopće bilo potrebno računati y_{fg} -ove, pa se popravke $v_{y_{fg}}$ ne bi ni poznavalo. Kako međutim onda izračunati $m_{x_{fg}}$? Za okolnost $[v_{x_{fg}}v_{x_{fg}}] = [v_{y_{fg}}v_{y_{fg}}]$ potpuno bi odgovarao odnos (23), što potvrđuje i formula (38) u kojoj bi τ prema (28) bio jednak nula.

Ne bi odgovarala formula $m_{x_{fg}} = \sqrt{[v_{x_{fg}}v_{x_{fg}}] : (2n-3)}$, iako imamo $2n$ mjerjenja i samo 3 nepoznanice, jer broj kvadrata popravaka $v_{x_{fg}}$ ne bi bio jednak broju mjerjenja $2n$ (kao npr. u približnim formulama (23) i (24)) već bi bio dva puta manji. Broj mjerjenja $2n$ nije međutim samo dovoljan za određivanje x_{fg} -ova već i y_{fg} -ova uz povećanje nepoznanica za c_y (koja je kao i c_x već određena sa a, b i koordinatnim podacima), tj. broj nepoznanica se povećava od 3 na 4, pa imamo $2n-4$ u nazivniku pod korjenom u formuli (1), što jednako odgovara za $m_{x_{fg}}$ kao i za $m_{y_{fg}}$. Kako općenito važi da je srednja pogreška upravno proporcionalna sa $\sqrt{[vv]}$, a obrnuto s drugim korjenom iz broja mjerjenja umanjeno za broj nepoznanica, što je potonje jednako za $m_{x_{fg}}$ i $m_{y_{fg}}$, to će omjer srednjih pogrešaka biti jednak:

$$m_x : m_y = \sqrt{[v_x v_x]} : \sqrt{[v_y v_y]}. \quad (17)$$

To s odnosom (2) daje

$$m = \frac{m_x}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{[v_y v_y]}{[v_x v_x]}} \right), \quad (18)$$

odnosno

$$m_x = \frac{2m}{1 + \sqrt{\frac{[v_y v_y]}{[v_x v_x]}}} \quad (19)$$

i analogno:

$$m_y = \frac{2m}{1 + \sqrt{\frac{[v_x v_x]}{[v_y v_y]}}} \quad (20)$$

* Odnos $m_x = \sqrt{v_x v_x : (n-2)}$ važi za linearnu transformaciju dvaju niza točaka u pravcu, pri čemu nema mjerjenja izvan tog pravca, tj. y -mjerjenja, a kod koje su transformacije nepoznanice multiplikaciona konstanta V i korespondencija obaju ishodišta, tj. adicione c_x , pa je broj prekobrojnih mjerjenja jednak $n-2$.

Konkretan numerički primjer (Spitze):

$$[v_x v_x] = 0,000542; [v_y v_y] = 0,000344; n = 4; m = 0,01488 \text{ m}$$

$$(19) : m_x = \frac{0,0298}{1 + 0,7967} = \pm 0,0166 \text{ m}, \quad (21)$$

$$(20) : m_y = \frac{0,0298}{1 + 1,2552} = \pm 0,0132 \text{ m}. \quad (22)$$

Pri ispitivanju točnosti vanjske orijentacije pojedinačnih aerosnimaka na temelju snimaka Spitze bio sam po osjećaju (bez strogog razmatranja) upotrijebio nešto jednostavnije formule za m_x i m_y (4 zadane točke!):

$$m_x = \sqrt{\frac{2 [v_x v_x]}{2 \cdot 4 - 4}}, \quad (23)$$

i analogno:

$$m_y = \sqrt{\frac{2 [v_y v_y]}{2 \cdot 4 - 4}}. \quad (24)$$

Odnosi (23) i (24) dali su ove rezultate:

$$m_x = \sqrt{\frac{0,000542}{2}} = \pm 0,0165 \text{ m}, \quad (25)$$

$$m_y = \sqrt{\frac{0,000344}{2}} = \pm 0,0131 \text{ m}. \quad (26)$$

Postavlja se pitanje, odakle ova gotovo identičnost rezultata (21) i (25) odn. (22) i (26) dobivenih po strogim formulama (19) odn. (20) i po približnim formulama (23) i (24)? Takvo slaganje možemo očekivati za uvjet

$$[v_x v_x] \approx [v_y v_y] \quad (27)$$

odnosno

$$[v_x v_x] - [v_y v_y] = \tau \wedge \tau \approx 0. \quad (28)$$

Za (27) imamo i približenje za (19) i (20):

$$m_x \approx m \approx m_y. \quad (29)$$

Prema (19) i (28) imamo:

$$m_x = \frac{2m \sqrt{[v_x v_x]}}{\sqrt{[v_x v_x]} + \sqrt{[v_x v_x] - \tau}} = \frac{m}{\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{\tau}{[v_x v_x]}} \right)}. \quad (30)$$

Po binomnom poučku

$$(1 + x)^m = 1 + \binom{m}{1} x^1 + \binom{m}{2} x^2 + \dots + \binom{m}{n} x^n \text{ uz } x < 1$$

imamo za $m_x : m$ u (30):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{\tau}{[v_x v_x]}} \right)^{-1} &= \left(1 - \frac{\tau}{4[v_x v_x]} - \frac{\tau^2}{16[v_x v_x]^2} + \dots \right)^{-1} \doteq \\ &\doteq 1 + \frac{\tau}{4[v_x v_x]} + \frac{\tau^2}{16[v_x v_x]^2} + \left(\frac{\tau}{4[v_x v_x]} + \frac{\tau^2}{16[v_x v_x]^2} \right)^2. \end{aligned} \quad (31)$$

(31) u (30):

$$m_x \doteq m \left(1 + \frac{\tau}{4[v_x v_x]} + \frac{\tau^2}{8[v_x v_x]^2} \right). \quad (32)$$

Označimo vrijednost po formuli (23) sa m_x' , pa uz (28) imamo:

$$\begin{aligned} m_x' &= \sqrt{\frac{[v_x v_x] + [v_y v_y] + \tau}{2n - 4}} = m \sqrt{1 + \frac{\tau}{(2n - 4)m^2}} \doteq \\ &\doteq m \left(1 + \frac{\tau}{2(2n - 4)m^2} - \frac{\tau^2}{8(2n - 4)^2 m^4} \right). \end{aligned} \quad (33)$$

Razlika između približne vrijednosti po (23) i stroge po (19) iznosit će uz pretpostavke (27—28) (v. (1)):

$$\begin{aligned} \Delta_{mx} = m_x' - m_x &= (33) - (32) = \frac{\tau}{2} \left\{ \frac{1}{(2n - 4)m} - \frac{m}{2[v_x v_x]} - \right. \\ &- \tau \left[\frac{1}{4(2n - 4)^2 m^3} + \frac{m}{4[v_x v_x]^2} \right] \left. \right\} = \frac{\tau m}{2} \left\{ \frac{1}{[v_x v_x] + [v_y v_y]} - \frac{1}{2[v_x v_x]} - \right. \\ &- \tau \left[\frac{1}{4([v_x v_x] + [v_y v_y])^2} + \frac{1}{4[v_x v_x]^2} \right] \left. \right\}. \end{aligned} \quad (34)$$

Prva dva člana u vitičastim zagradama jednaka su:

$$\frac{2[v_x v_x] - 2[v_x v_x] + \tau}{(2[v_x v_x] - \tau) 2[v_x v_x]} = \frac{\tau}{2[v_x v_x] m^2 (2n - 4)}. \quad (35)$$

(35) u (34):

$$\Delta_{mx} = \frac{1}{4(2n - 4)} \frac{\tau}{m[v_x v_x]} - \frac{1}{8} \frac{\tau^2 m}{([v_x v_x] + [v_y v_y])^2} - \frac{1}{8} \frac{\tau^2 m}{[v_x v_x]^2}. \quad (36)$$

Za konkretan primjer naveden u (21—22) formula (36) daje $\Delta_{mx} = -0,0000413$ m, dok smo direktno dobili (25) - (21) = -0,0001 m. Ova razlika može potjecati zbog toga što smo u primjeni binomnog poučka ograničili se na 3. član ili zbog nedovoljnog broja upotrebljenih decimala.

Vidimo da u diferenciji (35) prvih tj. najvećih članova od m_x' i m_x dolazi do jakog dokidanja, a preostali dio u (36) je praktički zanemariv obzirom da je $n \geq 3$ i obzirom da je prema (27—28) τ manji i od $[v_x v_x]$ i od $[v_y v_y]$ i mnogo manji od m , jer se τ dobiva kao diferencija dviju prema (27) podjednakih vrijednosti $[v_x v_x]$ i $[v_y v_y]$, a m iz korjena njihove sume, tj iz $\sqrt{[v_x v_x] + [v_y v_y]}$

$\rangle [v_x v_x] + [v_y v_y]$ (v. (1)). Zahvaljujući tome će se u numeričkom primjeru, u kojem se m_x i m_y razlikuju čak za (v. (21-22))

$$\frac{|m_x| - |m_y|}{\frac{1}{2} (|m_x| + |m_y|)} = \frac{0,0166 - 0,0132}{0,0149} = 0,23 = 23\%, \quad (37)$$

rezultati m_x i m_y razlikovati samo za

$$\frac{\frac{1}{2} [(0,0166 - 0,0165) + (0,0132 - 0,0131)]}{\frac{1}{2} (0,0166 + 0,0132)} = 0,0067 \approx 0,7\%. \quad (38)$$

Budući da su u svim dosadašnjim teoretskim formulama (1), (2), (13), (19-20), (23-24), (27) y i x ravnopravni, to za Δ_{m_y} treba samo u formuli (36) njih zamijeniti s promjenjenim predznakom za τ (28), a za takvu bi formulu važio isti zaključak koji je donesen za formulu (36).

Iako izrazi (23) i (24) u prvi mah ne izgledaju opravdani, jer ne sadrže veličine $[v_y v_y]$ odnosno $[v_x v_x]$, oni su ipak praktički upotrebljivi, jer su te sume, sakrite u veličinama $2[v_x v_x]$ odnosno $2[v_y v_y]$, ipak uzete u obzir s dovoljnom približnošću obzirom na približnost (27).

Redovito ćemo imati slučaj da se modelne koordinate transformiraju u geodetski koordinatni sustav, pa će se i srednje pogreške m_x i m_y odnositi na koordinatne osi geodetskog sustava. Omjer srednjih x- i y-pogrešaka nije jednak u modelnom i geodetskom sustavu, već to ovisi o zakretaju između oba sustava.

Pretpostavljajući samo slučajne pogreške dat će izjednačenje po metodi najmanjih kvadrata optimalno rješenje za elemente transformacije a, b, c_x , c_y , s kojim vrijednostima ćemo mjerene modelne koordinate x_m , y_m prevesti u geodetske x_g , y_g :

$$x_g = a \cdot x_m + b \cdot y_m + c_x, \quad (39)$$

$$y_g = b \cdot x_m - a \cdot y_m + c_y. \quad (40)$$

Ovo rješenje ne može biti kvareno ako svim mjerenim i transformiranim vrijednostima x_m , y_m , x_g , y_g pridodamo još kao fiktivna mjerenja pridružene treba-vrijednosti:

$$\bar{x}_m = x_m + v_{xm}; \quad \bar{y}_m = y_m + v_{ym}, \quad (41)$$

$$\bar{x}_g = x_g + v_{xg}; \quad \bar{y}_g = y_g + v_{yg}. \quad (42)$$

Uz dovoljno velik broj n imat ćemo:

$$[\bar{x}_m] = [x_m] + [v_{xm}] = [x_m] \text{ i } [\bar{y}_m] = [y_m] + [v_{ym}] = [y_m] \quad (43)$$

$$[\bar{x}_g] = [x_g] + [v_{xg}] = [x_g] \text{ i } [\bar{y}_g] = [y_g] + [v_{yg}] = [y_g] \quad (44)$$

(Pretpostavku o samo slučajnim pogreškama i dovoljno velikom broju n koristit ćemo u daljnjim razlaganjima bez ponovnog upozoravanja.) Radi općenitijeg zaključka pretpostavili smo u (42) i (44) da niti geodetske vrijednosti nisu bespo-

grešne. Označimo elemente transformacije dobivene dodatkom treba-vrijednosti kao fiktivnih mjerenja sa \bar{a} , \bar{b} , \bar{c}_x , \bar{c}_y . Same treba-vrijednosti dale bi (vidi str. 107 i 108 u [4]):

$$\bar{a}_t = \frac{[(\bar{x}_g - \bar{x}_{gT})(\bar{x}_m - \bar{x}_{mT})] + [(\bar{y}_g - \bar{y}_{gT})(\bar{y}_m - \bar{y}_{mT})]}{[(\bar{x}_m - \bar{x}_{mT})^2 + (\bar{y}_m - \bar{y}_{mT})^2]} = \frac{\bar{I}_t}{\bar{III}_t} \quad (45)$$

$$\bar{b}_t = \frac{[(\bar{x}_g - \bar{x}_{gT})(\bar{y}_m - \bar{y}_{mT})] - [(\bar{y}_g - \bar{y}_{gT})(\bar{x}_m - \bar{x}_{mT})]}{\bar{III}_t} = \frac{\bar{II}_t}{\bar{III}_t} \quad (46)$$

gdje su \bar{x}_{gT} , \bar{y}_{gT} koordinate težišta hrpe točaka \bar{x}_g , \bar{y}_g . Obzirom na (43) i (44) bit će to jednako koordinatama težišta hrpe točaka x_g , y_g :

$$\bar{x}_{gT} = x_{gT}; \quad \bar{y}_{gT} = y_{gT}. \quad (47)$$

Koristeći odnose (41), (42) i (47) bit će u \bar{I}_t član u prvim uglatim zagradama jednak:

$$\begin{aligned} [x_g x_m + x_g v_{xm} - x_g x_{mT} + v_{xg} x_m + v_{xg} v_{xm} - v_{xg} x_{mT} - x_{gT} x_m - x_{gT} v_{xm} + x_{gT} x_{mT}] = \\ = [x_g x_m - x_g x_{mT} - x_{gT} x_m + x_{gT} x_{mT}] = [(x_g - x_{gT})(x_m - x_{mT})]. \end{aligned} \quad (48)$$

Analogno (zamjenom x-a i y-a) će član u drugim uglatim zagradama u \bar{I}_t biti jednak:

$$[(\bar{y}_g - \bar{y}_{gT})(\bar{y}_m - \bar{y}_{mT})] = [(y_g - y_{gT})(y_m - y_{mT})] \quad (49)$$

(48) daje sa (49):

$$\bar{I}_t = I \quad (50)$$

I, II i III odnose se samo na faktična mjerenja.

Član u prvim uglatim zagradama u \bar{II}_t bit će jednak:

$$\begin{aligned} [x_g y_m + x_g v_{ym} - x_g y_{mT} + v_{xg} y_m + v_{xg} v_{ym} - v_{xg} y_{mT} - x_{gT} y_m - x_{gT} v_{ym} + x_{gT} y_{mT}] = \\ = [x_g y_m - x_g y_{mT} - x_{gT} y_m + x_{gT} y_{mT}] = [(x_g - x_{gT})(y_m - y_{mT})]. \end{aligned} \quad (51)$$

Analogno (zamjenom x-a i y-a) će član u drugim uglatim zagradama u \bar{II}_t biti jednak:

$$[(\bar{y}_g - \bar{y}_{gT})(\bar{x}_m - \bar{x}_{mT})] = [(y_g - y_{gT})(x_m - x_{mT})]. \quad (52)$$

(51) daje se (52):

$$\bar{II}_t = II \quad (53)$$

Prvi član u uglatim zagradama u \bar{III}_t bit će jednak:

$$\begin{aligned} [x_m^2 + x_m v_{xm} - x_m x_{mT} + v_{xm} v_m + v_{xm}^2 - v_{xm} x_{mT} - x_{mT} x_m - x_{mT} v_{xm} + x_{mT}^2] = \\ = [x_m^2 - x_m x_{mT} - x_{mT} x_m + x_{mT}^2] = [(x_m - x_{mT})(x_m - x_{mT})]. \end{aligned} \quad (54)$$

Analogno (zamjenom x-a i y-a) će drugi član u uglatim zagradama u \bar{III}_t biti jednak:

$$[(\bar{y}_m - \bar{y}_{mT})^2] = [(y_m - y_{mT})^2]. \quad (55)$$

(54) sa (55) daje:

$$\overline{\text{III}}_t = \text{III} \quad (56)$$

Iz (50), (53) i (56) vidimo da će se dodatkom treba-vrijednosti k svim pridruženim mjerenim i transformiranim vrijednostima i brojnik i nazivnik od a (v.(45)) i b (v.(46)) samo podvostručiti, pa imamo:

$$\bar{a} = a \text{ i } \bar{b} = b. \quad (57)$$

Obzirom na (43), (44) i (57) imamo za adicione konstante:

$$\bar{c}_x = \frac{[x_g] - a[x_m] - b[y_m] + [\bar{x}_g] - a[\bar{x}_m] - b[\bar{y}_m]}{n + \bar{n}} = c_x \quad (58)$$

$$\bar{c}_y = \frac{[y_g] - a[y_m] + b[x_m] + [\bar{y}_g] - a[\bar{y}_m] + b[\bar{x}_m]}{n + \bar{n}} = c_y. \quad (59)$$

Odnosi (57), (58) i (59) izvedeni su u skladu s teorijom vjerojatnosti zane-marujući niz od mnogo malenih članova (s faktorom v i $v \cdot v$) kod kojih se predznaci $+$ i $-$ pojavljuju s jednakom vjerojatnosti. Prema tim odnosima smijemo jednadžbe (39) i (40) i u njima prisutne parametre upotrijebiti i za treba-vrijednosti:

$$\bar{x}_g = a \cdot \bar{x}_m + b \cdot \bar{y}_m + c_x, \quad (60)$$

$$\bar{y}_g = b \cdot \bar{x}_m - a \cdot \bar{y}_m + c_y. \quad (61)$$

Od jednadžbe (60) odbijmo jednadžbu (39), a od jednadžbe (61) jednadžbu (40):

$$\bar{x}_g - x_g = a(\bar{x}_m - x_m) + b(\bar{y}_m - y_m), \quad (62)$$

$$\bar{y}_g - y_g = b(\bar{x}_m - x_m) - a(\bar{y}_m - y_m). \quad (63)$$

Pomnožimo jedanput (62) sa a i (63) sa b , drugi puta sa b i sa $-a$, pa zbrojivši obje tako dobivene jednadžbe imamo:

$$\bar{x}_m - x_m = \frac{1}{a^2 + b^2} [a(\bar{x}_g - x_g) + b(\bar{y}_g - y_g)], \quad (64)$$

$$\bar{y}_m - y_m = \frac{1}{a^2 + b^2} [b(\bar{x}_g - x_g) - a(\bar{y}_g - y_g)]. \quad (65)$$

Kvadrirajmo jednadžbe (64) i (65), posebno ih sumirajmo, podjelimo svaku sa n , pa ćemo koristeći odnose (41) i (42) dobiti:

$$[(\bar{x}_m - x_m)^2] = \frac{1}{(a^2 + b^2)^2} \{a^2[(\bar{x}_g - x_g)^2] + 2ab[(\bar{x}_g - x_g)(\bar{y}_g - y_g)] + b^2[(\bar{y}_g - y_g)^2]\}$$

$$\frac{[v_{\bar{x}_m}^2]}{n} = \frac{1}{(a^2 + b^2)^2} \left\{ a^2 \frac{[v_{\bar{x}_g}^2]}{n} + \frac{2ab}{n} [v_{\bar{x}_g} v_{\bar{y}_g}] + b^2 \frac{[v_{\bar{y}_g}^2]}{n} \right\}$$

$$m_{x_m} = \frac{1}{a^2 + b^2} \sqrt{a^2 m_{x_{fg}}^2 + b^2 m_{y_{fg}}^2} \quad (66)$$

Analogno dobijemo:

$$m_{y_m} = \frac{1}{a^2 + b^2} \sqrt{b^2 m_{x_{fg}}^2 + a^2 m_{y_{fg}}^2} \quad (67)$$

gdje su $m_{x_{fg}}$ i $m_{y_{fg}}$ srednje pogreške fotogrametrijski određenih veličina prevedenih u geodetski sustav mjerila 1 : 1.

Uzet ćemo podatke iz jednog testispitivanja »Spitze«:

$$a = 0,619873; b = -0,556720; m_{x_{fg}} = \pm 0,0171 \text{ m}; m_{y_{fg}} = \pm 0,0092 \text{ m}$$

To uvršteno u (66) i (67) daje:

$$m_{x_m} = \pm \frac{0,011769}{0,694180} = \pm 0,0170 \text{ mm}; \quad m_{y_m} = \pm \frac{0,011095}{0,694180} = \pm 0,0160 \text{ mm}. \quad (68)$$

Jednadžbe (64) i (65) daju nam odmah i formule za inverznu transformaciju tj. geodetskih u modelne koordinate. Obzirom na odnose

$$a : (a^2 + b^2) = V \cdot \cos \varepsilon : V^2 = \cos \varepsilon : V = M_m \cos \varepsilon = a_m, \quad (69)$$

$$b : (a^2 + b^2) = V \cdot \sin \varepsilon : V^2 = \sin \varepsilon : V = M_m \sin \varepsilon = b_m, \quad (70)$$

gdje je M_m mjerilo modela, imat ćemo

$$x_m = a_m x_g + b_m y_g + c_{x_m}, \quad (71)$$

$$y_m = b_m x_g - a_m y_g + c_{y_m}. \quad (72)$$

Srednje pogreške m_{x_m} i m_{y_m} možemo dakako dobiti i inverznom transformacijskom geodetskih u modelne koordinate pomoću formula (71) i (72), koja je transformacija rezonska u aerotriangulaciji, jer je tako lakše i čišće obuhvatiti izjednačenjem sistematske pogreške stereoinstrumenta upotrebljenog za opservaciju. Ako postoje sistematske pogreške, onda će se srednje pogreške m_{x_m} i m_{y_m} dobivene pomoću jednadžbi (66) i (67) ipak približno slagati s vrijednostima dobivenim inverznom transformacijom (71) i (72) ako se m_{x_m} i m_{y_m} izračunaju iz popravaka orijentacionih točaka tj. onih točaka koje su bile upotrebljene za izjednačenje elemenata transformacije a_m , b_m , c_{x_m} i c_{y_m} . To iz razloga jer će izjednačenjem upravo na te točke sistematske pogreške u njima biti u priličnoj mjeri eliminirane transformacijom. Taj zaključak međutim ne važi za vrijednosti m_{x_m} i m_{y_m} dobivene iz popravaka u kontrolnim točkama koje nisu bile iskorištene za izjednačenje, koje prema tome nije bilo podešeno na sistematske pogreške u tim točkama.

Ako pretpostavimo bespogrešno geodetsko određivanje, kao što je to učinjeno u navedenom formularu za Helmertovu transformaciju, onda veličine $m_{x_m} = (66)$ i $m_{y_m} = (67)$ neće općenito sadržavati samo postavne pogreške, kao što je to slučaj pri određivanju veličine (12) i (14) dobivenih iz dvostrukih mjerenja, već i ostale pogreške fotogrametrijske izmjere kao one uslijed pogrešaka

orijentacije i instrumentalnih pogrešaka. Te pogreške po svojoj naravi nisu slučajnog karaktera. U zadatku »Spitze« one su eliminirane računski.

LITERATURA:

- [1] Braum F.: »Die Beseitigung der Modelldeformationen in Senkrechtaufnahmen durch die Aenderung der relativen oder der innern Orientierung«, ETH Zürich 1960.
- [2] Braum F.: »Teorija stereofotogrametrijskih pogrešaka«, Zbornik radova Geodetskog fakulteta u Zagrebu, publikacija br. 7, 1970.
- [3] Braum F.: »Fotogrametrijsko snimanje«, Sveučilište u Zagrebu, 1973.
- [4] Braum F.: »Apsolutna orijentacija i deformacija modela«, Sveučilište u Zagrebu, 1980.
- [5] Braum F.: »Teorija pogrešaka vanjske orijentacije pojedinačnih aerosnimaka«, Zbornik radova Geodetskog fakulteta u Zagrebu, Niz A — Radovi — Svezak broj 34, 1982.
- [6] Braum F.: »Ocjena točnosti aerofotogrametrijskog određivanja na osnovu preciznih geodetskih kontrolnih podataka«, Geodetski list, 1982, broj 7—9.
- [7] Brucklacher — Schirmer: »Luftphotogrammetrische Vermessung der Flurbereinigung «Bergen«, Lengerich 1955.
- [8] Carl Zeiss JENA: »Gerätekomples zur Gewinnung und Verarbeitung von Fernerkundungsdaten«, Ag 29/146/83.
- [9] Ziemann: »Untersuchungen an Reseaufnahmen«, Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Reihe C, Heft Nr. 104, München 1967.

SAŽETAK

Srednja pogreška m (1), koja proizlazi iz izjednačenja elemenata Helmer-tove transformacije, nije položajna već koordinatna pogreška i predstavlja srednju vrijednost od m_x i m_y (2). U nefotogrametrijskom geodetskom određivanju smatra se da su te pogreške jednake (4). U aerostereofotogrametriji to nije slučaj, te geometrijske (a) na str. 76, sl. 2), tehnološki (b) i fotografski (c), sl. 3) uzrok drugačije utječe na x negoli na y . Za uklanjanje fotografskog uzroka postoje dodatni dispozitivi k opremi za aerosnimanje (sl. 4 i 5), koji postaju opet aktuelni s daljinskim (»aero«) snimanjem. Kod polarnog fotogrametrijskog određivanja projiciranjem vanjski orijentiranog aerosnimka uzrok a) otpada (13).

U koordinatnom sustavu modela imamo a priori srednje pogreške (8) i (13). Za njih su u geodetskom koordinatnom sustavu izvedene stroge a posteriori formule (19) i (20). Teoretski odnosi (8) i (13), koji uzimaju u obzir samo geometrijske okolnosti, nisu u testispitivanjima (12), (14) potvrđeni zbog postojanja i c) uzroka. Pogoršanje m_{xm} -vrijednosti prema m_{ym} -vrijednosti može se prognozirati na temelju podataka projekta aerosnimanja.

Za bar približno ispunjenu okolnost $m_x \approx m_y$ (27), (29) praktički ekvivalentne rezultate (v. (37) i (38)) kao i stroge formule (19) i (20) daju nešto jednostavnije približne formule (23), (24).

Za prelaz srednjih pogrešaka fotogrametrijskog određivanja iz geodetskog u modelni koordinatni sustav dane su formule (66) i (67).

ABSTRACT

The mean square error m (1) resulted from the adjustment of the elements of the Helmert transformation is not a situation error but a coordinate error and represents a middle value for m_x and m_y (2). These errors are supposed to be equal (4) in the non photogrammetric geodetic determination. That is not the case in the aerial stereophotogrammetry, and the geometrical (a) on page 76, (fig. 2), the technological (b) and the photographic (c), (fig. 3) error cause influence in different way the x and y coordinate. There are supplementary devices to the aerial photography equipment to avoid the photographic error, which becomes actual again with the remote sensing (fig. 4 and 5). The cause a) non exists in the photogrammetric monocular determination by ray and distance.

There are a priori mean square errors (8) and (13) expressed in the model coordinate system. The corresponding exact a posteriori formulas (19) and (20) are developed. The theoretical relations (8) and (13), based only on the geometry, were not verified by the test investigations (12), (14) because the cause c) exists too. The deterioration of the m_{xm} value compared with the m_{ym} value can be foreseen on the base of the dates of the aerial photography project.

The approximative formulas (23), (24), which are a little simpler, give practically the same results (s. (37) and (38)) as the exact formulas (19) and (20) if the circumstance $m_x \approx m_y$ (27), (29) is only approximately realised.

Formulas (66) and (67) are given for the transition of the mean square errors of the photogrammetrically determined coordinates from the geodetic coordinate system to the photogrammetric one.

Primljeno: 1984 — 02 — 25