UDK [528.4+528.022.3+528.486]:528.1
Originalni znanstveni rad

UTICAJ GREŠAKA KOORDINATA DATIH TAČAKA NA TAČNOST ODREĐIVANJA KOORDINATA PRESECANJEM, RAČUNANJA KOORDINATA DETALJNIH TAČAKA I OBELEŽAVANJA TAČAKA

*Jovan STEVANOVIĆ — Beograd**

Pri određivanju koordinata tačaka presecanjem napred, sa jedne tačke s poznatim koordinatama, viziraju se nove tačke i više tačaka sa poznatim koordinatama, radi orijentacije pravaca. Koordinate datih tačaka nisu potpuno tačne. Greške datih koordinata svakako utiču na tačnost određivanja nove tačke. Obično se smatra da su date tačke znatno tačnije određene u odnosu na merenja za određivanje nove tačke, pa se samim tim može smatrati da su one bezpogrešne. Međutim, u praksi često nije tako a naročito zbog toga što se sva sadašnja merenja obavljaju savremenim instrumentima znatno veće tačnosti od instrumenata s kojima se nekad radilo. Jedan od razloga zašto se greške datih koordinata manje uzimaju u obzir je i korelativnost koordinata datih tačaka koje redovno nisu međusobno nezavisno određivane, a voditi računa o korelativnosti je, najblaže rečeno, komplikovano i time praktički neizvodljivo. U daljem izlaganju korelativnost koordinata se neće uzimati u obzir.

Međutim, ako će se korelativnost koordinata datih tačaka zanemariti, korelativnost izvedenih veličina, odnosno veličina sračunatih na osnovi koordinata, koja je posledica činjenice da se dve odnosne veličine dobivaju na osnovu istih koordinata, može da bude vrlo interesantna sa značajnim efektima, zbog čega ne bi trebalo i nju zanemarivati. U konkretnom slučaju stanica, sa koje se opažaju pravci prema datim tačkama i pravac prema novoj tački, je zajednička za sve pravce, pa su i njene koordinate zajedničke pri računanju svih direkcionih uglova od stanice prema ostalim tačkama. Zbog ovoga rezultuje korelativnost između ovih izvedenih veličina, koju nije teško ni teorijski obraditi a ni praktično je uzimati u obzir, naročito kod radova veće tačnosti.

Korelativnost ove vrste jeste interesantna kod:

— određivanja koordinata trigonometrijskih tačaka presecanjem;

— računanja koordinata detaljnih tačaka snimljenih polarnom metodom;

— obeležavanja tačaka polarnom metodom i sličnih poslova.

* Adresa autora: dr Jovan Stevanović, »Geopremer« — Beograd.

TAČNOST ORIJENTACIONOG UGLA PRI ORIJENTISANJU PRAVACA

Za određivanje tačaka presecanjem potrebno je orijentisati pravce. U postupku orijentacije pravaca jedne stanice računa se orijentacioni ugao. Premda je orijentacioni ugao samo jedan međurezultat, interesantno je analizirati tačnost sa kojom se određuje orijentacioni ugao. Ako su sa tačke A vizirane poznate tačke 1, 2 .. i .. n i dobiveni pravci $\alpha_1, \alpha_2 .. \alpha_i .. \alpha_n$, tada je orijentacioni ugao:

$$O_i = \nu_A^i - \alpha_i, \tag{1}$$

odnosno:

$$O = \frac{\Sigma O_i}{n} = \frac{\Sigma (\nu_A^i - \alpha_i)}{n} \tag{2}$$

a priraštaj bi bio:

$$dO = \frac{\Sigma d \nu_A^i}{n} - \frac{\Sigma d \alpha_i}{n}. \tag{3}$$

Pošto je:

$$d\nu_A^i = b_{Ai}\, dy_i - b_{Ai}\, dy_A + a_{Ai}\, dx_i - a_{Ai}\, dx_A \tag{4}$$

gde su:

$$\begin{aligned} b_{Ai} &= \rho \frac{\Delta x_{Ai}}{S_{Ai}^2} = \rho \frac{\cos \nu_A^i}{S_{Ai}} \\ a_{Ai} &= -\rho \frac{\Delta y_{Ai}}{S_{Ai}^2} = -\rho \frac{\sin \nu_A^i}{S_{Ai}} \end{aligned} \tag{5}$$

biće:

$$d0 = \rho \sum \frac{\Delta x_{Ai}}{nS_{Ai}^2} dy_i - \rho dy_A \sum \frac{\Delta x_{Ai}}{nS_{Ai}^2} - \rho \sum \frac{\Delta y_{Ai}}{nS_{Ai}^2} dx_i + \rho\, dx_A \sum \frac{\Delta y_{Ai}}{nS_{Ai}^2} - \frac{\Sigma d \alpha_i}{n}. \tag{6}$$

Možemo uočiti u jednačini (6) da pored ostalog priraštaj dO zavisi od izraza $\sum \frac{\Delta x_{Ai}}{nS_{Ai}^2}$ i $\sum \frac{\Delta y_{Ai}}{nS_{Ai}^2}$, a ovi izrazi zavise i od rasporeda viziranih tačaka sa tačke A. Ako se radi pojednostavljivanja razmatranja pođe od pretpostavke da se dužine od tačke A do datih tačaka ne razlikuju mnogo i ako ih zamenimo srednjom dužinom S, tj. ako je:

$$S_{A1} \approx S_{A2} \approx \ldots \approx S_{An} = \frac{\Sigma S_{Ai}}{n} = S, \tag{7}$$

gore navedene izraze možemo da pišemo u vidu:

$$\sum \frac{\Delta x_{Ai}}{nS^2_{Ai}} = \frac{1}{S^2} \sum \frac{\Delta x_{Ai}}{n} = \frac{1}{S^2} \Delta x_{AT}, \tag{8}$$

$$\sum \frac{\Delta y_{Ai}}{nS^2_{Ai}} = \frac{1}{S^2} \sum \frac{\Delta y_{Ai}}{n} = \frac{1}{S^2} \Delta y_{AT}, \tag{9}$$

gde su Δx_{AT} i Δy_{AT} koordinatne razlike od tačke A do tačke težišta svih viziranih tačaka sa tačke A koja je obeležena sa T. S obzirom na ovo, jednačina (6) bi postala:

$$d0 = \rho \frac{\Sigma \Delta x_{Ai} dy_i}{nS^2} - \rho dy_A \frac{\Delta x_{AT}}{S^2} - \rho \frac{\Sigma \Delta y_{Ai} dx_i}{nS^2} + \rho\, dx_A \frac{\Delta y_{AT}}{S^2} - \frac{d\alpha_i}{n}. \tag{10}$$

Srednja greška orijentacionog ugla bi bila:

$$m_0^2 = \rho^2 \frac{\Sigma \Delta x^2_{Ai} m^2_{yi}}{n^2S^4} + \rho^2 \frac{\Sigma \Delta x^2_{AT} m^2_{yA}}{S^4} + \rho^2 \frac{\Sigma \Delta y^2_{Ai} m^2_{xi}}{n^2S^4} + \rho^2 \frac{\Sigma \Delta y^2_{AT} m^2_{xA}}{S^4} + \\ + \frac{\Sigma m^2 \alpha_i}{n^2}. \tag{11}$$

Na osnovi zadnjih dveju jednačina može se posebno uočiti da tačnost orijentacionog ugla zavisi od koordinatnih razlika Δx_{AT} i Δy_{AT}, odnosno od položaja tačke težišta viziranih datih tačaka u odnosu na tačku A.

Ako su vizirane date tačke ravnomerno raspoređene po horizontu oko točke 4, njihovo težište poklopiće se sa tačkom A, pa će Δx_{AT} i Δy_{AT} da budu jednaki nuli, čime se eliminiše uticaj pogrešnosti koordinata tačke A na tačnost orijentacionog ugla.

Ako se vizirane date tačke nalaze u užem sektoru, odnosno u jednom kvadrantu ili polukrugu, njihovo težište biće udaljeno od tačke A, a što je ono udaljenjije, dolaziće više do izražaja uticaj pogrešnosti koordinata tačke A na tačnost orijentacionog ugla.

Posledica ovih konstatacija može da bude zaključak da će pri praktičnom orijentisanju pravaca, za datu tačnost koordinata i merenja, popravke »V« u trig. obr. br. 5, da budu u masi veće ako su date tačke ravnomerno raspoređene po horizontu, nego za slučaj ako su smeštene u užem sektoru. Na popravke V ako su tačke raspoređene u užem sektoru, ne dolaze do punog izražaja greške koordinata, a ako su tačke raspoređene ravnomerno po horizontu, posebno ako se radi o 3 ili više tačaka, greške koordinata se u punom iznosu odražavaju na veličinu popravaka V. Ovo će biti izraženije ako je tačnost merenja, relativno u odnosu na tačnost koordinata, velika.

UTICAJ GREŠAKA DATIH TAČAKA NA TAČNOST KOORDINATA ODREĐENIH PRESECANJEM

Analiza tačnosti koordinata određenih presecanjem obavlja se posredstvom elipse pogrešaka koju uslovljavaju raspored i broj pravaca kojima se određuje nova tačka i tačnost merenja. Netačnost koordinata datih tačaka dolazi do izražaja kroz popravke V koje nisu posledica samo grešaka merenja. Netačnost koordinata ima karakter ekscentričnosti instrumenata i signala, što prividno povećava greške merenja pa i popravke izravnavanja, a samim tim i srednju grešku merenja dobivenu nakon izravnavanja. Međutim, pri nekoj tačnosti koordinata datih tačaka, uticaj te tačnosti na tačnost određivanja koordinata nove tačke zavisi i od rasporeda datih tačaka na kojima se stoji pri opažanju i na koje se vizira, u odnosu na novoodređenu tačku.

Neka je sa date tačke A vizirano na niz datih tačaka i novu tačku »p«, na osnovu čega je dobiven orijentisan pravac

$$\varphi = 0 + \alpha. \tag{12}$$

Ovde se orijentacioni ugao O određuje jednačinom (2). Dužina od tačke A do tačke p biće određena korišćenjem orijentisanih pravaca sa ostalih tačaka. Neka je dužina obeležena sa S_p. Koordinate tačke p bi bile:

$$\begin{aligned} y &= y_A + S_p \sin \varphi, \\ x &= x_A + S_p \cos \varphi. \end{aligned} \tag{13}$$

Priraštaji koordinata bi bili:

$$dy = dy_A + dS_p \sin\varphi + S_p \cos \varphi \frac{d\varphi}{\rho}, \tag{14}$$

$$dx = dx_A + dS_p \cos\varphi - S_p \sin \varphi \frac{d\varphi}{\rho}. \tag{15}$$

Da bi se došlo do zaključka kako tačnost koordinata tačke A preko orijentisanog pravca utiče na tačnost određivanja koordinata nove tačke, treba analizirati poprečnu grešku koja je posledica pogrešnosti orijentisanog pravca, u konkretnom slučaju od A do p. Zbog ovoga bi bilo celishodno analizu obaviti u koordinatnom sistemu čija bi se jedna od osa, na primer osa X, poklopila sa pravcem Ap. Da bi se ovo postiglo, treba obaviti rotaciju sistema oko tačke A za ugao φ. U tom slučaju interesantna je analiza ordinate Y. Poznate su jednačine za koordinate u novom sistemu koji je rotiran za odgovarajući ugao. Ordinata novog sistema Y bi bila:

$$Y = y \cos \varphi - x \sin \varphi. \tag{16}$$

Jednačina za priraštaj, ako se smatra da je u ovom slučaju ugao rotacije φ = const., bi bila:

$$dY = dy \cos \varphi - dx \sin \varphi. \tag{17}$$

Zamenom d_x u d_y iz jednačina (14) i (15) dobija se:

$$dY = dy_A \cos \varphi + dS_p \cos \varphi \sin \varphi + S_p \cos^2 \varphi \frac{d\varphi}{\rho} - dx_A \sin\varphi - dS_p \cos\varphi \sin\varphi + $$
$$+ S_p \sin^2 \varphi \frac{d\varphi}{\rho} \tag{18}$$

Iz ove jednačine sledi:

$$dY = dy_A \cos\varphi - dx_A \sin\varphi + S_p \frac{d\varphi}{\rho}. \tag{19}$$

S obzirom na jednačinu (12) biće:

$$d\varphi = d0 + d\alpha \tag{20}$$

Na osnovu jednačine (10), biće:

$$d\varphi = \rho \left(\frac{\Sigma \Delta x_{Ai}\, dy_i}{nS^2} - dy_A \frac{\Delta x_{AT}}{S^2} - \frac{\Sigma \Delta y_{Ai}\, dx_i}{nS^2} + dx_A \frac{\Delta y_{AT}}{S^2} \right) - \frac{d\alpha_i}{n} + d\alpha. \tag{21}$$

Zamenom ovog izraza u (19), dobijamo:

$$dY = dy_A \cos\varphi - dx_A \sin\varphi + S_p \left(\frac{\Sigma \Delta x_{Ai}\, dy_i}{nS^2} - dy_A \frac{\Delta x_{AT}}{S^2} - \frac{\Sigma \Delta y_{Ai}\, dx_i}{nS^2} + \right.$$
$$\left. + dx_A \frac{\Delta y_{AT}}{S^2} \right) - \frac{d\alpha_i\, S_p}{n\ \rho} + \frac{S_p}{\rho} d\alpha. \tag{22}$$

Nakon množenja i sređivanja ovaj izraz postaje:

$$dY = dy_A \left(\cos\varphi - S_p \frac{\Delta x_{AT}}{S^2} \right) - dx_A \left(\sin\varphi - S_p \frac{\Delta y_{AT}}{S^2} \right) + S_p \frac{\Sigma \Delta x_{Ai}\, dy_i}{nS^2} -$$
$$- S_p \frac{\Sigma \Delta y_{Ai}\, dx_i}{nS^2} - \frac{S_p\, \Sigma d\alpha_i}{\rho} + \frac{S_p}{\rho} d\,\alpha. \tag{23}$$

U prethodnom razmatranju definisana je tačka T kao težište svih opažanih datih tačaka sa tačke A. Ako se sa ν_A^T i S_T označe direkcioni ugao i dužina od tačke A do tačke T, može da se napiše da je:

$$\Delta y_{AT} = S_T \sin \nu_A^T, \tag{24}$$

$$\Delta x_{AT} = S_T \cos \nu_A^T. \tag{25}$$

Uvođenjem ovih izraza u jednačinu (23), biće:

$$dY = dy_A \left(\cos\varphi - \frac{S_p\, S_T \cos \nu_A^T}{S^2} \right) - dx_A \left(\sin\varphi - \frac{S_p\, S_T \sin \nu_A^T}{S^2} \right) +$$
$$+ S_p \frac{\Sigma \Delta x_{Ai}\, dy_i}{nS^2} - S_p \frac{\Sigma \Delta y_{Ai}\, dx_i}{nS^2} - \frac{S_p\, \Sigma d\alpha_i}{n} + \frac{S_p}{\rho} d\alpha. \tag{26}$$

Prelaskom na srednju grešku biće:

$$m_Y^2 = m_{yA}^2 \cos^2\varphi - 2m_{yA}^2 \frac{S_p S_T}{S^2} \cos\varphi \cos \nu_A^T + m_{yA}^2 \frac{S_p^2 S_T^2}{S^4} \cos^2 \nu_A^T + m_{xA}^2 \sin^2\varphi -$$
$$- 2m_{xA}^2 \frac{S_p S_T}{S^2} \sin\varphi \sin \nu_A^T + m_{xA}^2 \frac{S_p^2 S_T^2}{S^4} \sin^2 \nu_A^T + \frac{S_p^2\, \Sigma \Delta x_{Ai}^2\, m_{yi}^2}{n^2 S^4} +$$
$$+ \frac{S_p^2\, \Sigma \Delta y_{Ai}^2\, m_{xi}^2}{n^2 S^4} + \frac{S_p^2\, \Sigma m^2 \alpha_i}{\rho^2 n^2} + \frac{S_p^2}{\rho^2} m_\alpha^2. \tag{27}$$

Ako se dužine S_P i S_T izraze preko količnika q i q_T:

$$S_p = qS,$$
$$S_T = q_T S, \tag{28}$$

gde q izražava kolika je dužina od A do nove tačke manja od prosečne dužine između datih tačaka, a q_T izražava kolika je dužina od A do tačke težišta opažanih datih tačaka manja od prosečne dužine između datih tačaka i ako se predpostavi da je:

$$m_{xA} \approx m_{yA} \approx m_{xi} \approx m_{yi} = m_k,$$
$$m_1 \approx m_2 \approx m_3 \approx \ldots \approx m_n = m_\alpha = m, \tag{29}$$

jednačina (27) postaje:

$$m_Y^2 = m_k^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) - 2m_k^2 \frac{qS\, q_T S}{S^2} (\cos \varphi \cos \nu_A^T + \sin \varphi \sin \nu_A^T) +$$
$$+ m_k^2 \frac{q^2 S^2 q_T^2 S^2}{S^4} (\sin^2 \nu_A^T + \cos^2 \nu_A^T) + m_k^2 \frac{q^2 S^2}{S^4} \frac{\Sigma \Delta x_{Ai}^2 + \Sigma \Delta y_{Ai}^2}{n^2} +$$
$$+ m^2 \frac{q^2 S^2}{\rho^2} \frac{n+1}{n}. \tag{30}$$

Pošto je:

$$\Delta x_{Ai}^2 + \Delta y_{Ai}^2 = S_i^2, \tag{31}$$

a

$$\Sigma \Delta x_{Ai}^2 + \Sigma \Delta y_{Ai}^2 = \Sigma S_i^2 = n\, S^2, \tag{32}$$

kao i:

$$\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1, \tag{33}$$

$$\sin^2 \nu_A^T + \cos^2 \nu_A^T = 1, \tag{34}$$

$$\cos \varphi \cos \nu_A^T + \sin \varphi \sin \nu_A^T = \cos (\varphi - \nu_A^T), \tag{35}$$

jednačina (30), uzimajući u obzir sve ovo, postaje:

$$m_Y^2 = m_k^2 - 2m_k^2\, q\, q_T \cos (\varphi - \nu_A^T) + m_k^2\, q^2\, q_T^2 + \frac{m_k^2}{n} q^2 + m^2\, q^2 \frac{S^2}{\rho^2} \left(\frac{n+1}{n}\right). \tag{36}$$

Na osnovu jednačine (36) se mogu izvesti zaključci o tome kako pojedini faktori utiču na poprečnu grešku:

1. Što je rastojanje od date do tražene tačke veće, veće je q, pa će biti veća i poprečna greška.

2. Zadnji član jednačine (36) izražava uticaj grešaka merenja. Ako je *m* relativno veliko, odnosno ako su koordinate izrazito tačnije u odnosu na tačnost merenja, tada je ovaj član dominantan, a diskusija ostalih članova je bez značaja.

Ako je pak srednja greška merenja relativno mala, tada poprečna greška značajno zavisi od ostalih faktora jednačine (36).

3. Predzadnji član odražava uticaj pogrešnosti koordinata viziranih tačaka. Pri datoj tačnosti koordinata, ovaj uticaj se smanjuje ako se broj viziranih tačaka povećava.

4. Prva tri člana jednačine (36) predstavljaju uticaj pogrešnosti koordinata tačke A na poprečnu grešku. Ovaj uticaj zavisi i od grešaka koordinata tačke A ali mnogo više zavisi od položaja težišta viziranih tačaka sa tačke A i to od udaljenja tog težišta od tačke A preko — q_T i od ugla koga zaklapaju pravac prema težištu i pravac prema novoj tački.

4.1. Ako su vizirane date tačke ravnomerno raspoređene po horizontu, težište će pasti približno u tačku A, q_T biće približno jednako nuli, pa će drugi i treći član biti zanemarljivi.

4.2. Ako su vizirane date tačke jednostrano raspoređene, tj. ako su u jednom kvadrantu ili u polukrugu, tada će njihovo težište biti više ili manje udaljeno od tačke A, pa je tada bitno u kom pravcu se nalazi težište:

— Ako je težište u pravcu novoodređene tačke, odnosno ako se vizirane date tačke nalaze približno u pravcu novoodređene tačke, ili kratko, ako se tačka određuje presecanjem napred nakon orijentacije na osnovu »prednjih pravaca«, tada je $\varphi - \nu_A^T$ mali ugao, čiji je cosinus blizak jedinici, zbog čega će drugi član biti negativan i usloviće smanjenje položajne greške.

— Ako težište pada u suprotnom pravcu u odnosu na novoodređenu tačku, odnosno ako se nova tačka određuje presecanjem nakon orijentacije na osnovu »zadnjih pravaca«, biće ugao $\varphi - \nu_A^T$ približno 180°, cosinus približno minus jedan, a drugi član pozitivan. Ovo će da uslovi povećanje poprečne greške.

— Ako težište pada pod uglom od 90° u odnosu na pravac prema novoodređenoj tački, biće cosinus jednak nuli, pa će da otpadne drugi član.

Kakav je i koliki uticaj neravnomerne raspoređenosti viziranih datih tačaka po horizontu, najbolje se može sagledati ako se pođe od retko zastupljene ali ne i nemoguće pretpostavke da je $q = 1$ i $q_T = 1$, tj. neka se težište ili poklapa sa novoodređenom tačkom, ili neka se nalazi na istom rastojanju ali sa suprotne strane tačke A. Za prvu mogućnost biće $\varphi - \nu_A^T = 0$, a za drugu biće $\varphi - \nu_A^T = 180°$. Ako se zbir prva tri člana jednačine (36) obeleži sa M^2, biće:

— za slučaj orijentacije na osnovu prednjih pravaca:

$$M_0^2 = m_K^2 (1 - 2qq_T + q^2 q_T^2) = m_K^2 (1 - qq_T)^2; \tag{37}$$

— za slučaj orijentacije na osnovu zadnjih pravaca:

$$M_{180}^2 = m_K^2 (1 + 2qq_T + q^2 q_T^2) = m_K^2 (1 + qq_T)^2. \tag{38}$$

Specijalno, za $q = 1$ i $q_T = 1$, biće:

$$M_0^2 = 0; \qquad M_{180}^2 = 4m_k^2. \tag{39}$$

Ako je, pod istim uslovima, $\varphi - \nu_A^T = 90^\circ$ biće:

$$M_{90}^2 = 2m_k^2. \tag{40}$$

Za navedene pretpostavke, u prvom slučaju se potpuno eliminiše uticaj netačnosti koordinata tačke A, a u drugom slučaju na kvadrat ukupne poprečne greške, uticaj se manifestuje preko četvorostruke vrednosti srednjih grešaka koordinata tačke A. U ostalim slučajevima uticaj pogrešnosti koordinata tačke A je negde između ovih ekstremnih mogućih vrednosti.

Međutim, ukazivanje na sve ove okolnosti ne treba shvatiti i kao preporuku da se u praktičnom postupku teži da se tačke određuju samo na osnovu pravaca orijentisanih prednjim vizurama. To bi eventualno bilo moguće ako se određuje samo jedna tačka. Pošto se praktično uvek određuje više tačaka na jednom kompleksu, zbog čega se sa jedne date tačke opaža više novoodređenih tačaka, preporuka bi bila da se na svaki način izbegava određivanje tačke na osnovu pravaca koji su orijentisani preko zadnjih pravaca. Pravce treba orijentisati i tačke određivati viziranjem na dovoljan broj datih tačaka pravilno raspoređenih po horizontu oko stanice. Ako se orijentisanje pravaca obavlja samo na osnovu dva pravca prema datim tačkama, treba nastojati da oni budu dijametralno suprotni jedan u odnosu na drugi.

TAČNOST KOORDINATA SRAČUNATIH NA OSNOVU PODATAKA SNIMLJENIH POLARNOM METODOM

Ako je sa tačke A sa poznatim koordinatama vizirano na drugu tačku B, a zatim na detaljne tačke 1, 2 . . . j, čije koordinate treba sračunati, greške koordinata tačaka A i B imaće odraza na tačnost koordinata detaljnih tačaka,

Za jednu detaljnu tačku ovaj slučaj je sličan napred razmatranom slučaju određivanja koordinata presecanjem, s tim što se orijentacija obavlja viziranjem samo na jednu poznatu tačku, a dužina je direktno izmerena. Zbog ovoga se poprečna greška za ovaj slučaj može dobiti direktno na osnovu jednačine (36), ako se imaju u vidu sledeće okolnosti:

— Vizirana je samo jedna tačka B, zbog čega je $n = 1$.

— Tačka težišta — T se poklapa sa tačkom B, zbog čega je $q^T = 1$.

— Novoodređena tačka p je u ovom slučaju bilo koja tačka j.

S obzirom na ovo jednačina 36 postaje:

$$m_Y^2 = m_k^2 - 2m_k\, q \cos(\varphi_j - \nu_A^B) + 2m_k^2\, q^2 + 2m^2\, q^2 \frac{S^2}{\rho^2}. \tag{41}$$

U ovoj jednačini zadnji član je posledica grešaka merenja. Ako su greške merenja relativno u odnosu na tačnost koordinata tačaka A i B velike, ovaj član je dominantan, pa je analiza ostalih članova bez efekta. Ako su greške merenja male, odnosno ako su za odnosni slučaj one zanemarljive, možemo u jednačini (41) da stavimo da je $m \approx 0$, čime dobijamo:

$$m_Y^2 = m_k^2 \left[1 - 2q \cos(\varphi_j - \nu_A^B) + 2q^2\right] \tag{42}$$

Izraz u uglastoj zagradi za pojedine tačke j, u zavisnosti od q i φj, imaće različite vrednosti. Analiza ovog izraza je svakako interesantna, a jedno od mogućih pitanja može da bude: Kada će ovaj izraz biti manji od jedan, upravo kada će uticaj srednjih grešaka koordinata datih tačaka A i B, na poprečnu grešku tačke j biti manji od samih srednjih grešaka koordinata? Kada će, ako je greška procesa merenja nula, tačnost sračunatih koordinata u pravcu upravnom na pravac viziranja biti veća od tačnosti koordinata datih tačaka? Ovo će biti ako je zadovoljen uslov:

$$1 - 2q \cos(\varphi_j - \nu_A^B) + 2q^2 \leq 1. \tag{43}$$

Ova nejednačina biće zadovoljena ako je

$$q \leq \cos(\varphi_j - \nu_A^B). \tag{44}$$

Specijalno za $q = \cos(\varphi - \nu_A^B)$ biće definisana kontura koja predstavlja geometrijsko mesto tačaka za koje bi poprečna greška bila jednaka srednjoj grešci koordinata datih tačaka. Sve tačke unutar ove konture bi imale manju poprečnu grešku, a sve tačke izvan ove konture bi imale veću poprečnu grešku, od srednjih grešaka koordinata datih tačaka.

Neka se, u specijalno za ove potrebe definisanom koordinatnom sistemu, tačka A poklapa sa početkom koordinatnog sistema, a tačka B neka je na X-osi, kako je prikazano na sl. 1. Pošto će za ovakav sistem da bude $\nu_A^B = 0$, biće:

$$\varphi - \nu_A^B = \varphi$$

Neka je tačka j u proizvoljnom pravcu φ. Ako se po pravcu φ nanese dužina $\overline{AB} = S$ dobiće se tačka C. Projektovanjem tačke C na pravac AB dobiće se tačka D.

Ako se dužina $\overline{AD}$ nanese na pravai AC dobiće se tačka j. Za ovakvu situaciju biće:

$$\cos\varphi = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{Aj}}{\overline{AC}} = \frac{S_j}{S} = q, \tag{45}$$

čime se dokazuje da bi tačka j bila na konturi koja je napred objašnjena.

U ovom sistemu neka su koordinate tačke j: X i Y. S obzirom na sliku mogu se napisati jednačine

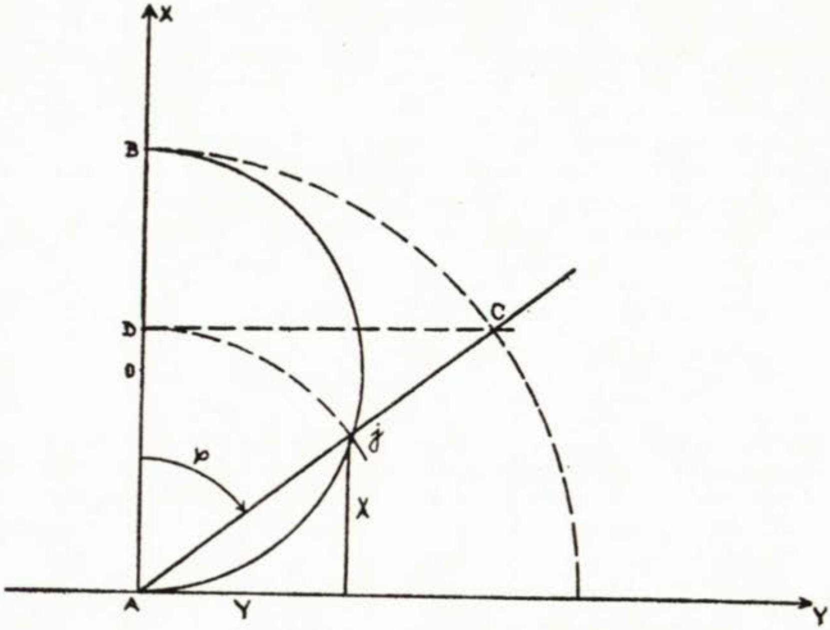
$$X^2 + Y^2 = \overline{A_j^2} = S_j^2, \tag{46}$$

$$\cos\varphi = \frac{S_j}{S} = \frac{X}{S_j}. \tag{47}$$

Iz druge jednačine sledi:

$$S_j^2 = XS, \tag{48}$$

a zamenom u prvu dobijemo:



Sl. 1

$$X^2 + Y^2 = XS. \qquad (49)$$

Možemo da konstatujemo da jednačina (49) definiše krug čiji je centar na osi X, a na polovini rastojanja između A i B, sa poluprečnikom $\frac{S}{2}$.

Zbog toga što je poprečna greška za sve tačke unutar ovog kruga manja od srednjih grešaka koordinata, ovaj krug je nazvan »krug veće tačnosti«.

Ako se nađu parcijalni izvodi jednačine (42) po q i $\varphi - \nu_A^B$ i izjednače sa nulom dobiće se da m_y ima apsolutni minimum za

$$\varphi_j - \nu_A^B = 0, \qquad (50)$$

$$q = \frac{1}{2}.$$

Poprečna greška biće najmanja ako se snimi tačka koja se nalazi na pravcu AB a na sredini između tačaka A i B, odnosno u centru »kruga veće tačnosti«. Zamenom vrednosti (50) u jednačinu (42), dobiće se minimalna poprečna greška:

$$m_Y = m_k \sqrt{\frac{1}{2}} = m_k \cdot 0{,}71.$$

Što je ugao između pravca AB i tačke koja se snima veći, veća je i poprečna greška. Za veće uglove, što je q veće, veća je i poprečna greška. Ako se izraz u uglastoj zagradi jednačine (42) obeleži sa Q^2, mogu se sračunati vrednosti za Q za više karakterističnih vrednosti za q i $\varphi j - \nu_A^B$, kako je navedeno u tabeli 1.

Tabela 1. vrednosti za Q

q	0,3	0,5	1,0	2,0	3,0
	Q				
0°	0,76	0,71	1,00	2,24	3,61
45°	0,87	0,89	1,26	2,48	3,84
90°	1,09	1,22	1,73	3,00	4,36
135°	1,27	1,49	2,10	3,44	4,82
180°	1,33	1,58	2,24	3,61	5,00
225°	1,27	1,49	2,10	3,44	4,82
270°	1,09	1,22	1,73	3,00	4,36
315°	0,87	0,89	1,26	2,48	3,84

Poprečna greška je:

$$m_Y = m_k Q$$

Vrednosti u tabeli 1 najbolje ilustriraju karakter uticaja grešaka datih koordinata na poprečnu grešku određivanja detaljne tačke. Ako bi tačnost koordinata tačaka A i B karakterisala srednja greška $\pm$ 3 cm, poprečna greška bi za q = 3 i $\varphi - \nu_A^B = 180°$ iznosila $\pm$ 15 cm, ne uzimajući u obzir greške merenja, dok bi za q=1 i $\varphi - \nu_A^B = 45°$, pod istim uslovima, ona iznosila samo oko $\pm$ 4 cm.

Ako se pri snimanju detaljnih tačaka zahteva tačnost koja nije mnogo manja od tačnosti koordinata datih tačaka, treba uzimati u obzir sve navedene okolnosti, a mrežu osnovnih tačaka tako projektovati da se sve detaljne tačke nalaze u »krugu veće tačnosti« neke od stanica.

Pri snimanju tahimetrijskom metodom retko se dešava da je, za dužinu do detaljne tačke, q = 1. Međutim, u zadnje vreme, naročito u komasaciji, ako se merenje dužina obavlja elektrooptičkim daljinomerima i ako preglednost dozvoljava, koriste se pri snimanju vizure dugačke i po nekoliko stotina metara. Ako se u ovim slučajevima ne vodi računa o svemu navedenom, tačnost koordinata snimljenih tačaka može da bude znatno smanjena. Mogućnost da se ovo izbegne leži u činjenici da je poprečna greška mala ako su uglovi od početnog pravca prema detaljnim tačkama mali i ako q nije veliko. Polazeći od ovoga treba pri snimanju težiti:

— Da se sa stanice uzima orijentacija prema što udaljenijoj poznatoj tački. Najbolje je da to bude lako vidljiva udaljenija trigonometrijska tačka. na primer crkva i slično.

— Da se, sa odnosne stanice, ne snimaju detaljne tačke za koje je q veliko a ugao od početnog pravca od odnosne tačke blizak 180°. Da bi se ovo postiglo treba pri projektovanju i stabilizaciji poligonske mređe o ovome voditi računa.

UTICAJ GREŠAKA DATIH TAČAKA NA TAČNOST OBELEŽAVANJA POLARNOM METODOM

Obeležavanje polarnom metodom se obavlja nanošenjem uglova i dužina. Ovi elementi se određuju na osnovu poznatih koordinata osnovnih geodetskih tačaka i koordinata tačke koja se obeležava, koje mogu biti ili skinute sa plana ili određene računskim putem. Neka sa poznate tačke A, vizirajući na drugu poznatu B, treba obeležiti tačku j. Na osnovu poznatih koordinata mogu se sračunati direkcioni uglovi i ugao »v_j« koga treba naneti. Ovaj problem je detaljnije tretiran u [2], a ovde će da bude ukratko obrađen.

Ugao v_j je:

$$v_j = \nu_A^j - \nu_A^B. \tag{51}$$

Ako se nađe priraštaj ugla, na osnovu jednačine (4) može direktno da se napiše:

$$dv = b_{Aj}\, dy_j - b_{AB}\, dy_B + (b_{AB} - b_{Aj})\, dy_A + a_{Aj}\, dx_j - a_{AB}\, dx_B + (a_{AB} - a_{Aj})\, dx_A. \tag{52}$$

Ako se na uobičajen način pređe na srednju grešku biće:

$$m_v^2 = b_{Aj}^2 m_{yj}^2 + b_{AB}^2 m_{yB}^2 + b_{AB}^2 m_{yA}^2 - 2b_{AB}\, b_{Aj}\, m_{yA}^2 + b_{Aj}^2 m_{yA}^2 + a_{Aj}^2 m_{xj}^2 + a_{AB}^2 m_{xB}^2 + a_{AB}^2 m_{xA}^2 - 2a_{AB}\, a_{Aj}\, m_{xA}^2 + a_{Aj}^2 m_{xA}^2 \tag{53}$$

Za tačku j u trenutku obeležavanja raspolažemo samo brojnim izrazima za koordinate. zbog čega se može smatrati da su one bezpogrešne. Zbog ovoga može da se stavi da je:

$$m_{yj} = m_{xj} = 0. \tag{54}$$

Ako se kao i do sada pretpostavi da su elipse pogrešaka koordinata A i B približno kružnog oblika i međusobno jednake: može da se stavi da je:

$$m_{xA} \approx m_{yA} \approx m_{xB} \approx m_{yB} = m_k. \tag{55}$$

Uzimajući u obzir (54) i (55) jednačina (53) postaje:

$$m_v^2 = m_k^2 (2b_{AB}^2 + 2a_{AB}^2 - 2b_{AB}\, b_{Aj} - 2a_{AB}\, a_{Aj} + b_{Aj}^2 + a_{Aj}^2). \tag{56}$$

Ako se u ovoj jednačini zamene izrazi za a i b na osnovu jednačina (5) biće:

$$m_v^2 = m_k^2 \rho^2 \left[\frac{2}{S_{AB}^2} \sin^2 \nu_A^B + \cos^2 \nu_A^B - \frac{2}{S_{AB}\, S_{Aj}} \cos \nu_A^B \cos \nu_A^j + \sin \nu_A^B \sin \nu_A^j + \frac{1}{S_{Aj}^2} \sin^2 \nu_A^B + \cos^2 \nu_A^B\right] \tag{57}$$

Primenjujući izraze (33), (34) i (35) na ovu jednačinu, a ako se uzme u obzir i jednačina (51), gornja jednačina (57) može da se napiše u obliku:

$$m_v^2 = m_k^2 \rho^2 \left[\frac{2}{S_{AB}^2} + \frac{1}{S_{Aj}^2} - \frac{2}{S_{AB}\, S_{Aj}} \cos v_j\right]. \tag{58}$$

Da bi se dobila poprečna greška obeležavanja koja je posledica pogrešnosti sračunatog ugla v, treba m_v pomnožiti sa $\frac{S_{AJ}}{\rho}$ čime se dobija:

$$m_p^2 = m_v^2 \frac{S_{AJ}^2}{\rho^2} = m_k^2 \left(2 \frac{S_{AJ}^2}{S_{AB}^2} + 1 - 2 \frac{S_{AJ}}{S_{AB}} \cos v_J\right) \tag{59}$$

Ako se i ovde uvede oznaka q za odnos:

$$\frac{S_{AJ}}{S_{AB}} = q \tag{60}$$

jednačina (59) dobija oblik:

$$m_p^2 = m_k^2 (2q^2 + 1 - 2q \cos v) \tag{61}$$

Ova jednačina se samo u oznakama za ugao razlikuje od jednačine (42), pa sve što je rečeno u okviru analize i komentara slučaja snimanja i računanja koordinata detaljnih tačaka, odnosi se i na ovaj slučaj obeležavanja tačaka. I ovde, ako se tačka nalazi u »krugu veće tečnosti« poprečna greška obeležavanja koja je posledica pogrešnosti koordinata biće manja od srednje veličine greške koordinata.

Zahtevi u smislu tačnosti kod obeležavanja su različiti. Nekad su tolerancije jako velike, ali ima slučajeva pri obeležavanju industrijskih objekata kada se zahteva izrazito velika tačnost. Tačnost obeležavanja je limitirana tačnošću osnove sa koje se vrši obeležavanje. Izuzetno tačna osnova se ne obezbeđuje lako. Zbog svega ovoga iskorišćavanje osnove na najcelishodniji način postaje neophodnost. Ne bi bilo prihvatljivo ulagati ogroman napor da bi se postigao odgovarajući kvalitet osnove, a zatim, neumešnošću korišćenja osnove, dozvoliti da taj hvalitet ne dođe do izražaja. Zbog svega ovoga napred navedeni zaključci dobivaju veći značaj.

LITERATURA:

[1] J. Stevanović: Tačnost obeležavanja osovine tunela. Spoj Severnog i Bučarskog potkopa u Resavsko-Moravskom ugljenom bazenu. »Tehnika — Građevinarstvo«, br. 5, 6, 7 i 8, Beograd, 1962.

[2] J. Stevanović: Uticaj grešaka datih tačaka na tačnost obeležavanja objekata. Savetovanje: Uloga geodetske nauke i prakse u projektovanju i izgradnji gradskih kompleksa i naselja — Zbornik radova, Malinska, 1981.

REZIME

Svi direkcioni uglovi od jedne prema ostalim tačkama zavise od koordinata zajedničke tačke zbog čega su oni u korelaciji. Ta korelativnost je analizirana i izvedeni su zaključci:

1. Kod određivanja koordinata tačaka presecanjem:

— Orijentacioni ugao koji se računa pri orijentisanju pravaca jeste oslobođen uticaja pogrešnosti koordinata stanice, ako su date tačke preko kojih se vrši orijentacija ravnomerno raspoređene po horizontu oko stanice, odnosno ako se težište viziranih tačaka poklapa sa stanicom.

— Poprečna greška orijentisanog pravca zavisi od rasporeda pravaca koji su korišćeni za orijentaciju u odnosu na pravac prema odgovarajućoj tački. Ako se težište tačaka korišćenih za orijentaciju poklapa sa novoodređenom tačkom, eliminišu se greške koordinata stanice na kojoj je orijentisan pravac, a poprečna greška jeste najmanja. Ako se težište tačaka korišćenih za orijentaciju nalazi na istom rastojanju ali sa suprotne strane od tražene tačke, uticaj grešaka koordinata stanice je najveći, pa je i poprečna greška najveća. Ako su pravci na osnovu kojih se vrši orijentisanje stanice raspoređeni ravnomerno po horizontu, odnosno ako se težište tačaka korišćenih za orijentaciju poklapa sa stanicom, eliminiše se uticaj korelativnosti.

2. Kod snimanja i računanja koordinata detaljnih tačaka:

— Greške koordinata detaljne tačke u pravcu upravnom na vizuru, koje su posledica pogrešnosti koordinata datih tačaka, zavise od ugla između pravca sa stanice prema datoj tački i vizure, kao i od dužine vizure. Ako je ovaj ugao blizak nuli poprečna greška je najmanja. Ako je ovaj ugao blizak 180° poprečna greška je najveća.

— Ako se detaljne tačke nalaze u okviru »kruga veće tačnosti«, poprečna greška koja je posledica samo pogrešnosti koordinata jeste manja od srednjih grešaka koordinata. Ako se detaljna tačka nalazi izvan »kruga veće tačnosti« poprečna greška je veća od grešaka koordinata datih tačaka.

— Centar »kruga veće tačnosti« je na polovini rastojanja na pravcu između datih tačaka, a prečnik je jednak rastojanju između datih tačaka.

3. Kod obeležavanja tačaka zaključci su isti kao i kod snimanja tačaka.

ABSTRACT

All the direction angels of one point to the other points depend on the coordinates of the common point, therefore they are in correlation. On the basis of analyse of this correlativness the folowing conclusions are made:

1. While determining the point coordinates by the method of crossing:
   - The angle of orientation to be found out at the orientation of directions is free from influences of wrong station coordinates, in the case that the points given for orientation are evenly distributed on the horizon around the station, namely im the gravity center of the sighted points coincides with the station.
   - The cross error of the oriented direction depends on distribution of directions used for orientation relating to the direction towards the corresponding point. In the case that the gravity center of the points used for orientation coincides with the new determined point, the errors in the coordinates of the station with the direction orientation are eliminated, resulting in minimum cross error. In the case that the

gravity center of the points used for orientation is at the same distance or at the opposite side from the requested point, the maximum influence of the station coordinates is obtained resulting in maximum cross error. In the case that the directions, which are the basis for orientation of the station are evenly distributed on the horizon, i. e. if the gravity center of points used for orientation coincides with the station, the influence of correlativeness is eliminated.

2. While surveying and calculating the coordinates of detailed points:
   - Errors of the coordinates of the detailed point in vertical direction to the line of sight, resulting from the wrong coordinates of given points, depend on the angle between the direction leading from the station to the given point and the line of sight as well as from the line of sight length. The minimum cross error is obtained if this angle is near to the value of 0°. The maximum cross error is obtained if this angle is near to the value of 180°.
   - In the case that detailed points are within »the cyrcle of higher exactness«, the cross error resulting only from the wrong coordinates is lower than the medium error of coordinates. If the detailed point is out of »the cyrcle of higher exactness« the cross error is greater than the errors of the coordinates of given points.
   - The center of »the cyrcle of higher exactness« is located at the half of the distance between the given points on the direction and the radius is equal to the distance between the given points.

3. Conclusions relating to the marking of points are the same as the conclusions relating to the surveying of the points.

Primljeno: 1982-11-01