UDK 528.38:519.242.5
Originalni znanstveni rad

OPTIMIZACIJA I NJENA PRIMENA KOD NIVELMANSKIH MREŽA

Günter SCHMITT-Karlsruhe, Toša NINKOV-Beograd*

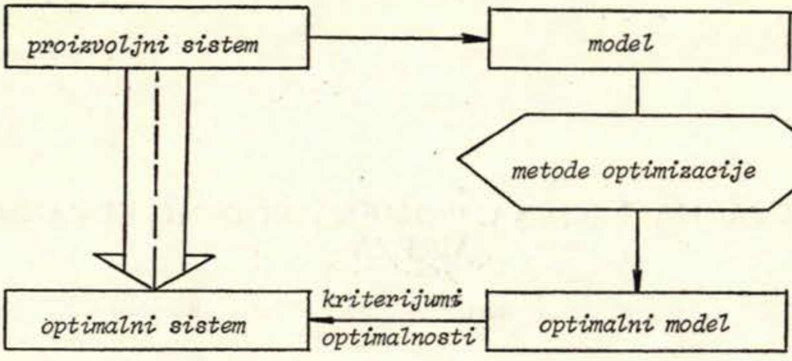
0. UVODNA RAZMATRANJA

Kao što je poznato problemima optimizacije se geodete bave već više od 100 godina (Schreiber, 1882 »Određivanje optimalnih težina merenja u osnovičkim mrežama«), ali su praktično vredniji rezultati počeli da se javljaju tek zadnjih 10—15 godina. Intenzivniji razvoj ove oblasti geodezije omogućen je razvijanjem novih metoda numeričko-matematičke obrade podataka uz pomoć velikih kompjuterskih sistema. Zbog velikog broja razvijenih metoda optimizacija projektovanja geodetskih mreža je podeljena na redove (Grafarend [1]) i ta podela je za sada opšte prihvaćena. Projekat nultog reda predstavlja izbor optimalnog koordinatnog sistema, projekat I reda predstavlja izbor optimalne konfiguracije mreže, projekat II reda predstavlja određivanje optimalnih težina u mreži a projekat III reda predstavlja određivanje optimalnih količina i tačnosti dopunskih merenja u postojećim mrežama kako bi se popravio određeni kvalitet mreža. Najveći broj publikovanih radova vezan je za određivanje optimalnog projekta II reda (u zadnje vreme i III reda), jer su mogućnosti za njegovu praktičnu primenu najveće.

U rešavanju problema optimizacije bilo kog reda mora se koristiti neka od metoda matematičke optimizacije kojom se od proizvoljnog sistema dobija optimalni sistem. Algoritam operacione strategije matematičke optimizacije mogao bi se šematski prikazati kao na sl. 1. Algoritam prikazuje da se prilikom optimizacije polazi od proizvoljnog sistema od kojeg se za projektovanje formira odgovarajući model. Primenjujući metode matematičke optimizacije na taj model može se dobiti optimalni model koji zadovoljava iste kriterijume optimalnosti koje treba da zadovolji željeni optimalni sistem.

Pitanje kriterijuma kvaliteta koje treba da zadovolji optimalni sistem nije ni do danas u potpunosti rešeno. Po mišljenju mnogih geodeta, koji se bave ovom problematikom, kriterijumi kvaliteta geodetskih mreža publikovanih u [2] i [3] imaju dosta veliku praktičnu vrednost pa se mogu koristiti za rešavanje mnogih praktičnih problema.

* Prof. Dr Günter Schmitt, Geodätisches Institut, Universität Karlsruhe, Englerstrasse 7, Karlsruhe; Dr. Toša Ninkov, Građevinski fakultet, Institut za geodeziju, Beograd Bulevar Revolucije 73/I



Sl. 1.

Za rešavanje problema optimizacije geodetskih mreža II reda globalno se može reći da se koriste uglavnom dve strategije rešavanja u kojima se kao izvor iscrpnih informacija upotrebljava varijanc — kovarijaciona matrica $\sigma^2 Q_x$ izravnatih parametara geodetskih mreža.

Po prvoj strategiji se matematičkim metodama minimiziraju napred definisane kriterijum funkcije koje su invarijantne na izabrani koordinatni sistem. Funkcije su obično oblika trag Q_x, det Q_x, $\lambda_{max}(Q_x)$ itd. Najveći nedostatak ovih metoda, koji im i onemogućava praktičnu primenu, je što se do optimalnog rešenja dolazi posle velikog broja iteracija (u redu [4] se spominje rešenje posle oko 25 000 iteracija).

Rešavanje problema po drugoj strategiji iziskuje uvođenje aproksimativnih vrednosti kriterijum matrica u numeričke procese optimizacije (primenjuje se generalizovana inverzija, KRONEKER-ov proizvod, KHATRI-RAO proizvod) što neizostavno dovodi do odstupanja numeričkog rešenja od unapred željenog i pretpostavljenog kvaliteta mreže. Najveći nedostaci ovih metoda, pored navedenog odstupanja numeričkog rešenja od unapred pretpostavljenog, su i ti što se kao rezultat u optimalnom planu može javiti i negativna vrednost ili pak takva vrednost koja se sa sada raspoloživim instrumentarijem ne može realizovati u praksi. Ovi nedostaci za sada onemogućuju neku veću praktičnu primenu ovih metoda u praksi ali se može smatrati da je pred optimizacijom u geodeziji svetla budućnost obzirom da se i dalje intenzivno radi na otkrivanju novih metoda i postupaka koji eliminišu navedene nedostatke (vidi ANDERSON [5], B. SCHAFRIN [6]).

U radu [8] je učinjen pokušaj razvijanja jednog novog postupka određivanja optimalnog projekta II reda kojim se eliminiše većina nedostataka do sada publikovanih metoda. U nastavku rada će se dati kraći pregled teorijskih postavki (detaljno u [7]) kao i praktične primene novo razvijene metode.

1. DEFINISANJE KRITERIJUMA KVALITETA GEODETSKIH MREŽA

Kao što je već rečeno, pitanje izbora podesnih kriterijum funkcija koje bi trebalo da zadovolji optimalni sistem (optimalni projekat II reda) nije u potpunosti rešeno. Pitanje izbora kriterijuma kvaliteta geodetskih mreža je veoma kompleksno jer ovi mogu biti veoma različiti pošto zavise uglavnom od oblasti geodezije u kojoj se oni određuju. U većini geodetskih zadataka se kao kriterijum kvaliteta može uzeti kriterijum tačnosti parametara mreže jer on svakako ima veću težinu od kriterijuma minimalnog vremena, rada ili sredstava potrebnih za rešavanje nekog zadatka.

U radovima [2] i [3] obrađeni su kriterijumi kvaliteta geodetskih mreža izraženih pomoću sopstvenih vrednosti korelacione matrice Q_x. Ovi kriterijumi se baziraju na matematičkoj vezi poluprečnika elipsi grešaka i sopstvenih vrednosti koja za $m_0 = 1$ glasi

$$A_i^2 = \lambda_i \tag{1}$$

Kao kriterijum tačnosti jedne mreže uzima se vrednost maksimalne sopstvene vrednosti λ_{max} korelacione matrice Q_x. Po tom kriterijumu ona varijanta koja da manju vrednost maksimalnoj sopstvenoj vrednosti se može smatrati tačnije određenom. Drugim rečima kao globalni kriterijum tačnosti jedne mreže može se koristiti izraz

$$\lambda\ max \rightarrow min \tag{2}$$

U radu [10] je predloženo korišćenje ovog kriterijuma kvaliteta geodetske mreže kao cilj funkcije matematičke optimizacije II reda. U tom slučaju se želeo naći takav raspored tačnosti merenja u geodetskim mrežama koji će dati minimalnu mogućnost izraza (2). Najveći problem koji se tu javljao je taj što se problem rešava po prvoj strategiji rešavanja problema, odnosno primenom iterativnih matematičkih metoda minimizacije cilj funkcije.

2. NOVA METODA ODREĐIVANJA OPTIMALNOG PROJEKTA II REDA

Kao što je napomenuto za rešavanje problema optimalnog projekta drugog reda u novoj metodi koristi se prva strategija rešavanja, odnosno potrebno je naći minimalnu vrednost cilj funkcije menjajući promenljive u mogućim granicama. Na taj način formiran je model takozvanog nelinearnog matematičkog programiranja sa nelinearnom cilj funkcijom i linearnim uslovima ograničenja. To se u opštem obliku može predstaviti kao

$$\begin{array}{lll} F(x) \leftrightarrow \text{EXTREMUM} & & \leftarrow \text{cilj funkcija} \\ G(x) \lesseqgtr & \text{Bi} & \text{uslovi ograničenja} \end{array} \tag{3}$$

U slučaju određivanja optimalnog projekta drugog reda problem se svodi na određivanje takvih vrednosti srednjih grešaka m_i planiranih opažanja l_i koje će biti u unapred definisanim granicama, a sa kojima će se postići unapred definisana vrednost maksimalne sopstvene vrednosti λ_{max} korelacione matrice Q_x. Obzirom da se kod određivanja optimalnog projekta II reda smatra da je optimalni projekat I reda već određen (jednoznačno definisana konfiguraciona matrica A) tada je u izrazu za korelacionu matricu Q_x

$$Q_x = (A^T P A)^{-1} \tag{4}$$

jedina promenljiva vrednost dijagonalna matrica P

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & & & & \\ & \cdot & & & \\ & & p_i & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & p_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/m_1^2 & & & & \\ & \cdot & & & \\ & & 1/m_i^2 & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & 1/m_n^2 \end{bmatrix} \tag{5}$$

odnosno srednje greške merenja m_i merenih veličina.

Menjajući m_i u granicama (m_{min}, m_{max}) menjaće se i vrednost λ_{max} (Q_x). U tom slučaju λ_{max} predstavlja jednu nelinearnu funkciju čija se ekstremna ili željena vrednost može postići menjajući vrednosti m_i. U ovom slučaju cilj funkcija i uslovi ograničenja (3) se mogu pretstaviti izrazima

$$\begin{aligned} &\lambda_{max}(m_1, m_2, \ldots, m_n) \rightarrow \text{EXTREMUM} \\ &m_{min} < m_i < m_{max} \end{aligned} \tag{6}$$

Sada je potrebno rešiti problem kako i za koliko menjati vrednosti m_i, kako bi se u konačnom broju iteracija dobila željena vrednost λ_{max} odnosno željena tačnost u mreži. U rešavanju tog zadatka polazi se od činjenice da će opažanja sa $m_i = m_{min}$ (početno rješenje) dati $\lambda_{max} = (\lambda_{max})_{min}$ odnosno dobiće se minimalno moguća vrednost maksimalne sopstvene vrednosti korelacione matrice mreže te konfiguracije. Drugim rečima ni jedan drugi raspored tačnosti merenja u mreži ne može dati manju vrednost za λ_{max}.

Sada se mogu kod rješavanja ovakvih problema javiti dva slučaja:

a) Prvi slučaj

$$(\lambda_{max})_{min} = [(Ai^2)\max]^2 \leqslant \lambda_K = A_K^2 \tag{7}$$

gdje su

— (Ai)max — maksimalna srednja greška tačke mreže (za $m_0 = 1$) u jednodimenzionalnoj mreži (maksimalni poluprečnik elipse grešaka u dodimenzionalnoj mreži) koju će dati početno rešenje.

— $\lambda_K = A_K^2$ — vrednost koja definiše željenu tačnost u mreži

Drugim rečima tačnost koja se postiže početnim rešenjem je daleko veća nego što je to potrebno za primenu te mreže (većina mreža inženjerske geodezije). U tom slučaju je potrebno naći takav raspored tačnosti merenja koji će dati $\lambda_{max} = \lambda_K$.

b) Drugi slučaj

$$(\lambda_{max})_{min} = [(Ai)_{min}]^2 = \lambda_K = A_K^2 \tag{8}$$

Drugim rečima potrebno je u mreži postići maksimalno moguću tačnost parametara mreže kao da su sva merenja realizovana sa maksimalno mogućom tačnosti. Tu se javlja problem određivanja koja merenja, a ona sigurno postoje, se ne moraju izmeriti sa maksimalno mogućom tačnosti a tu se kriju moguće uštede u vremenu, radu ili sredstvima koja opravdavaju primenu optimizacije.

Za rešavanje oba slučaja postavljenog problema u ovoj metodi se polazi od pretpostavke da je moguće odrediti uticaj promene tačnosti merenja m_i za priraštaj $\triangle m$ na vrednost cilj funkcije. Poslije određivanja tog uticaja jednim iterativnim postupkom, menjajući srednje greške (ne ravnomerno kao u dosadašnjim prethodnim ocenama tačnosti u mrežama) obrnuto proporcionalno njihovom uticaju na vrednost cilj funkcije može se postići da λ_{max} bude približno jednako unapred definisanoj vrednosti λ_K, tj

$$\underset{j-\text{ta iteracija}}{(\lambda_{max})} \approx \lambda_K \tag{9}$$

Drugim rečima, može se reći da se vrednost m_i onih elemenata mreže, koji imaju mali uticaj na vrednost cilj funkcije $\lambda_{max} \rightarrow \lambda_K$ mogu više povećavati.

Vrednost $(\lambda max)_{min} = \lambda_{max}$ dobija se za početno rešenje Q_x^o gde matrica P ima oblik

$$P_0 = \begin{bmatrix} 1/m^2_{min} & & & & \\ & 1/m^2_{min} & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ & & & & 1/m^2_{min} \end{bmatrix} \tag{10}$$

U cilju određivanja uticaja tačnosti pojedinih merenih veličina na vrednost cilj funkcije potrebno je odrediti prvi izvod cilj funkcije po promenljivim m_i

$$\frac{\partial \lambda_{max}}{\partial m_i} = \frac{\partial \lambda_{max}(m_{min}, m_{min}, \ldots m_{min})}{\partial m_i} \tag{11}$$

odnosno to se numerički postiže pomoću izraza

$$\frac{\partial \lambda_{max}}{\partial m_i} = \lim_{\Delta m \rightarrow o} \frac{\lambda_{max}(m_{min}, m_{min}, \ldots m_{min} + \Delta m, \ldots m_{min}) - \lambda_{max}(m_{min}, m_{min}, \ldots m_{min})}{\Delta m} \tag{12}$$

Za svaki mereni elemenat određuje se priraštaj $\Delta \lambda^i_{max}$ koji izaziva priraštaj svakog merenog elementa m_i za isti m.

$$\Delta \lambda^i_{max} = \lambda^i_{max} - \lambda^o_{max} \tag{13}$$

Sada je potrebno naći ovaj elemenat koji je izazvao najmanji priraštaj $\Delta\lambda^i_{max}$ jer taj elemenat ima najmanji uticaj na vrednost λ_{max} tj. njegova vrednost m_i se najviše može menjati u narednom iterativnom postupku. Sada se

nost m_i se najviše može menjati u narodnom iterativnom postupku. Sada se

mogu sračunati koeficijenti obrnute proporcionalnosti tačnosti merenja m_i na vrednost λ_{max} po formuli:

$$K_i = \sqrt{\frac{(\Delta \lambda_{max})_{min}}{\Delta \lambda^i_{max}}} \tag{14}$$

Menjajući vrednosti m_i pojedinih merenja proporcionalno koeficijentima K_i iterativnim putem se može postići da vrednost λ_{max} bude praktično jednaka unapred definisanoj vrednosti λ_K.

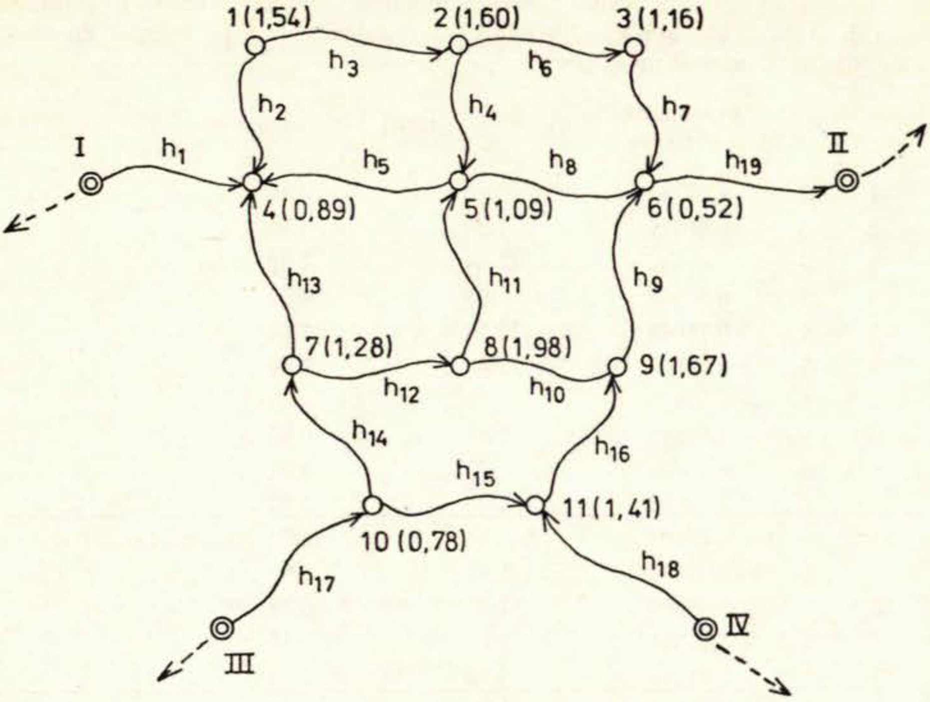
Na osnovu napred navedenih teorijskih razmatranja (detaljno obrađeni u radu [7]) autori ovog članka su, u okviru rada specijalne studijske grupe 4.71 »Optimizacija u geodeziji pri IAG (Internacionalna asocijacija za geodeziju«), uradili program za automatsko rešavanje ovog problema. Veliki doprinos i izgradnji ovog programa dao je prof. dr. G. Schmitt svojim angažovanjem u formiranju potprograma za izračunavanje spostvenih vrednosti kvadratnih matrica. Tim potprogramom je elimisan jedan od mogućih nedostataka napred navedene metode a koji se sastojao u velikoj količini računarskog rada na računaru. Ovaj razvijeni potprogram na računaru UNIVAC serije 11 000 Instituta za geodeziju Univerziteta Karlsruhe, gde je ceo program i realizovan, izračunava sopstvene vrednosti matrice dimenzija 20 $\times$ 20 za manje od 1 sec rada centralne memorije računara. Zahvaljujući tome napred izložena metoda određivanja optimalnog projekta II reda je dobila veliku mogućnost primene u rešavanju praktičnih zadataka.

3. PRIMER

Za ilustraciju napred navedene metode izvršena je optimizacija neslobodne nivelmanske mreže prikazane na sl. 2. U radu [8], gde je prvi put obrađena ova metoda, za ilustraciju je obrađen primer jedne elementarne nivelmanske mreže sa ciljem da se izbegnu problemi numeričke prirode koji su bili vezani za izračunavanje sopstvenih vrednosti korelacione matrice.

Cilj optimizacije je bio da se nađe takav plan opažanja u mreži koji će dati maksimalnu grešku visine repera od $\pm$ 2 mm. Kao početno rešenje uzima se ono koje se postiže nivelanjem sa tačnosti od $\pm$ 0.4 mm/km. U tom slučaju je dobijena vrednost $(m_H)_{max} \approx 0.8$ mm što je ispod željene tačnosti. Maksimalna sopstvena vrednost u ovom slučaju je iznosila $\lambda_{max} = 0.66$. Primenjujući napred navedeni postupak određeni su koeficijenti obrnute proporcionalnosti K_i tačnosti merenja m_i pojedinih vlakova na vrednost cilj funkcije $\lambda_{max} \rightarrow \lambda_K$.

$K_1 = 0.003683$	$K_8 = 0.006606$	$K_{14} = 0.006226$
$K_2 = 0.005688$	$K_9 = 0.014747$	$K_{15} = 0.031693$
$K_3 = 0.154169$	$K_{10} = 0.019824$	$K_{16} = 0.010653$
$K_4 = 0.007983$	$K_{11} = 1.000000$	$K_{17} = 0.004668$
$K_5 = 0.022515$	$K_{12} = 0.015126$	$K_{18} = 0.007502$
$K_6 = 0.017314$	$K_{13} = 0.119323$	$K_{19} = 0.002905$
$K_7 = 0.004388$		



Sl. 2 Skica nivelmanske mreže

Sada su jednim iterativnim postupkom menjane vrednosti tačnosti merenja m_i sve dok se nije zadovoljio postavljen uslov (24 iteracije za manje od 5 sec. rada računara)

$$\lambda_{max}^{(j)} \approx \lambda_K = m_H^2 = m_0^2 (Q_x)_{max} = 4 \tag{15}$$

(j) — broj iteracija
$(Q_x)_{max}$ — najveći dijagonalni elemenat Q_x

tačnosti repera u mreži. Kada je zadovoljen taj uslov (u j-toj iteraciji) dobijaju se optimalne težine merenja koje će davati optimalnu korelacionu matricu Q_x. Tada se iz (15) može sračunati vrednost m_o koja je potrebna za izračunavanje tačnosti repera nivelmanske mreže. U ovom slučaju dobijene su sledeće vrednosti

R_i	$m_{Hi} = m_o \sqrt{Q_{Hi}}$	R_i	$m_{Hi} = m_o \sqrt{Q_{Hi}}$
1	1.54	7	1.28
2	1.60	8	1.98 ≈ 2 mm
3	1.16	9	1.67
4	0.89	10	0.78
5	1.09	11	1.41
6	0.52		

Iz dobijenih optimalnih težina merenja mogu se odrediti vrednosti optimalnih srednjih grešaka vlakova kao i vrednosti tačnosti merenja po jednom kilometru sa kojima se ta tačnost može postići

	$S_{[km]}$	optimalne težine p_i	$m_{hi} = \frac{m_o}{\sqrt{p_i}}$ [mm]	$m_{1km} = \frac{m_{hi}}{\sqrt{S_{[km]}}}$	
1	5	1.52562	0.96	0.43	
2	6	0.86526	1.27	0.52	
3	3	0.00748	13.64	7.88	
4	6	0.58164	1.55	0.63	
5	4	0.19048	2.70	1.35	
6	5	0.23265	2.45	1.10	
7	6	1.12846	1.11	0.45	
8	4	1.09672	1.24	0.62	
9	8	0.18619	2.73	0.97	
10	6	0.15631	2.98	1.22	
11	8	0.00007	141.04	49.87	minimalna tačnost
12	4	0.35833	1.97	0.99	
13	8	0.00460	17.40	6.15	
14	4	1.17391	1.09	0.55	
15	6	0.07110	4.43	1.81	
16	6	0.39763	1.87	0.76	
17	3	2.12502	1.72	0.99	
18	8	0.47111	1.72	0.61	
19	2	4.82161	0.54	0.41	maksimalna tačnost

Iz dobijenih rezultata se može dobiti uvid u različiti uticaj tačnosti vlakova na željenu tačnost repera nivelmanske mreže. U ovom primeru se može konstatovati veliki raspon potrebe tačnosti merenja 0,41—49.9 mm/km a koja obezbeđuje unapred željenu tačnost u mreži. Time je pokazano da dosadašnje stanovište o jednakom uticaju tačnosti elemenata mreže na njenu tačnost nije ispravno i potrebno je promeniti taj stav kod rešavanja praktičnih problema. Ekonomski nije opravdano zanemarivati moguće uštede u vremenu, radu ili sredstvima koje pruža optimalni projekat II reda. Na osnovu podataka optimalnog projekta II reda moguće je izabrati, za svaki vlak, optimalnu metodu merenja (prethodnom ocenom tačnosti svakog vlaka) odnosno moguće je izvršiti optimizaciju i procesa merenja. Time bi se dobila jedna tehnološka celina koja bi omogućila znatne uštede pri realizaciji geodetskih mreža, naročito ako su one većeg obima.

4. ZAKLJUČAK

Kao što se iz izloženog članka vidi ova nova metoda određivanja optimalnog projekta II reda ima dosta veliku upotrebnu vrednost. Rešavajući probleme optimizacije navedenom metodom ne javljaju se oni nedostaci koji su onemogućavali primenu do sada publikovanih metoda (veliki broj iteracija, negativne težine, nerealne vrednosti težina) te se može preporučiti geodetskoj praksi kod rešavanja (za sada) jednodimenzionalnih mreža naročito ako su one većeg obima. Buduća istraživanja ove oblasti geodezije će sigurno dati praktično vredne metode i za višedimenzionalne mreže u geodeziji. Za uspešnu primenu ove metode u praksi od velikog bi značaja bilo formirati jednu tehnološku celinu ove metode i metoda optimizacija procesa geodetskih merenja.

LITERATURA:

[1] Grafarend. E.: »Optimierung geodätischen Messoperationen« Konrad Witwer, 1979, München

[2] Pelzer. H.: »Genauigkeit und Zuverlässigkeit geodatischen Netze« Tagung »Mathematische Probleme der Geodäsie« Oberwolfach 1976.

[3] Van Mierlo J.: »Second order design: precision and reliability aspects« AVN 8:81

[4] Wenzel: »Zur Optimierung von Schwerennetzen« ZFV 102/1977

[5] Anderson. E.: »Towards total optimisation of surweing and mapping sistems« Meeting of study Group 5B on Survey Control Notworks, Aalborg, Denmark, 1982

[6] Schaffrin. B: »On same recent modifications regardings the optimal design of geodetic networks« (članak pripremljen za objavljivanje u 1983. godini)

[7] Ninkov. T.: »Matematička optimizacija projektovanja geodetskih mreža« Disertacija Građevinski fakultet, Beograd, 1982

[8] Ninkov. T.: »A New method of land surveying networks optimisation« Meeting of Fig-Study Group 5B on Survey Control Networks Aalbort Juli 1982

[9] Ninkov. T.: »Experiences in applying geodetic networks and computations Symposium on geodetic networks and computations, Munich 1983

[10] Ninkov. T.: »Global accurasy criteria of geodetic networks as possible objective functions for mathematic optimisation of design second order« VIII Intern. kurs für Ingenieurvermmessung. Zürich 1980

[11] Schmitt. G.: »Zur Numerik des Design zweiter Ordung« Habilitionsschrift, Karlsruhe 1978

[12] Schmitt. G.: »Zur Numerik der Gewichtsoptimierung in geodätischen Netzen« DGK Reihe C, Heft No 256, München

[13] Schmitt. G.: »Second order design of geodetic networks« FIG-symp »Automated Proccesing of Surveying Data, Varna, Bulgaria 1981

SIŽE

U radu je prikazan jedan novi postupak određivanja optimalnog projekta drugog reda. Metod se bazira na određivanju optimalnih težina planiranih opažanja u projektovanim mrežama čije su pozicije tačaka nepromenljive. Optimalne težine su proporcionalne njihovom uticaju na cilj funkciju oblika $\lambda_{max} \rightarrow min$. Metod je ilustrovan optimizacijom neslobodne nivelmanske mreže.

ABSTRACT

The work illustrates a new method of determination of optimum second order design. This method is based of defining optimum weights for the obserwations which are projekted in geodetic networks with given point positions. Optimal weights are in proportion to their inpackt on relevant aim function in form $\lambda_{max} \rightarrow min$. The method is illustrated through optimisation leweling network.