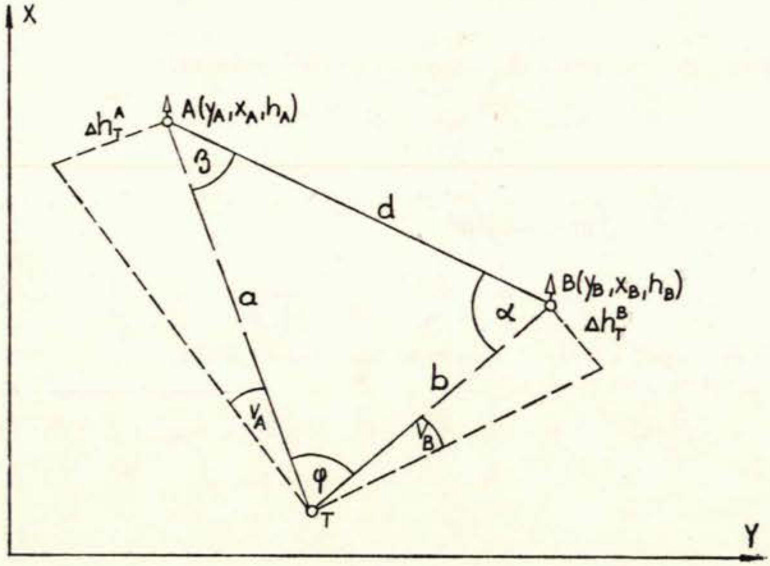
UDK 528.412
Originalni znanstveni rad

ODREĐIVANJE KOORDINATA TRIGONOMETRIJSKE TOČKE MJERENJEM UNUTRAŠNJIH PRAVACA I VERTIKALNIH KUTOVA NA DVIJE DATE TOČKE

Ferdinand DEŽELAK — Savudrija*

Ako s mjesta, gdje treba odrediti novu trigonometrijsku točku, vidimo dvije točke zadane po svojim koordinatama i visinama, onda možemo odrediti koordinate nove točke samo na osnovu kutnih mjerenja sa te točke. Zbog jednostavnosti bit će izostavljen utjecaj refrakcije i zakrivljenosti Zemlje koji se javlja kod mjerenja visinskih kutova. Ova metoda najpogodnija je za teritorije gdje je mreža datih točaka slabo razvijena a treba što brže odrediti približne koordinate neke točke. Upotrebiti se može i za grube kontrole kod preciznih geodetskih mjerenja. Najveća prednost ipak je u tome, da se koordinate nove točke mogu odrediti samo sa jednog stajališta, a mjerenje se obavlja na dvije date točke, dok kod presijecanja natrag treba poznati koordinate triju točaka.



Sl. 1

* Adresa autora: Ferdinand Deželak, dipl. inž, Ravna dolina 11, 51475 Savudrija.

Uzmimo primjer, da smo sa tražene točke T izmjerili horizontalni kut φ i vertikalne kutove v_A i v_B prema datim točkama A i B.

Ako s i označimo visinu instrumenta, s l_A visinu signala na točki A i sa l_B visinu signala na točki B, onda važe slijedeći odnosi:

$$\Delta h_T^A = a \cdot \operatorname{tg} v_A + i - l_A,$$
$$\Delta h_T^B = b \cdot \operatorname{tg} v_B + i - l_B.$$

Donju jednadžbu oduzmimo od gornje pa dobijemo za razliku visina signala smanjenu visinsku razliku između točaka A i B koja je data. Tako smanjenu visinsku razliku označimo sa ΔH.

$$a \cdot \operatorname{tg} v_A - b \cdot \operatorname{tg} v_B = \Delta h_T^A + l_A - \Delta h_T^B - l_B = \Delta H. \tag{1}$$

Iz koordinata točaka A i B možemo odrediti dužinu d. Primenom sinusove teoreme dobijemo:

$$\frac{d}{\sin \varphi} = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin(\alpha + \varphi)} = k. \tag{2}$$

Pri tome je k poznata konstantna veličina. Zadatak se sada svodi na određivanje kuta α.

$$\begin{aligned} a &= k \cdot \sin \alpha, \\ b &= k \sin(\alpha + \varphi) = k(\sin \alpha \cdot \cos \varphi + \cos \alpha \cdot \sin \varphi). \end{aligned} \tag{3}$$

Stavimo (3) u (1):

$$k \sin \alpha (\operatorname{tg} v_A - \cos \varphi \cdot \operatorname{tg} v_B) - k \cos \alpha \sin \varphi \cdot \operatorname{tg} v_B = \Delta H. \tag{4}$$

Dobili smo trigonometrijsku jednadžbu u kojoj je nepoznanica kut α. Trigonometrijskom supstitucijom za konstantne članove dobivamo:

$$\begin{aligned} k(\operatorname{tg} v_A - \cos \varphi \cdot \operatorname{tg} v_B) &= q \cdot \cos \tau, \\ k \sin \varphi \operatorname{tg} v_B &= q \cdot \sin \tau. \end{aligned} \tag{5}$$

Pri tome je q pozitivna konstantna veličina, a kut τ možemo odrediti ako donju jednadžbu dijelimo gornjom:

$$\operatorname{tg} \tau = \frac{\sin \varphi \cdot \operatorname{tg} v_B}{\operatorname{tg} v_A - \cos \varphi \cdot \operatorname{tg} v_B},$$

a relacijama (5) je i kvadrant kuta τ jednoznačno određen.

Ako sad stavimo (5) u (4) dobijemo:

$$q \cdot \sin \alpha \cdot \cos \tau - q \cos \alpha \cdot \sin \tau = q \sin(\alpha - \tau) = \Delta H \tag{7}$$

i konačno

$$\alpha = (\alpha - \tau) + \tau,$$

odnosno

$$\alpha = \arcsin \frac{\Delta H \cdot \sin \tau}{d \cdot \operatorname{tg} v_B} + \tau. \tag{8}$$

Prvi član u gornjoj jednadžbi daje dvoznačno rješenje, tako da α može zauzeti dvije veličine. Ako prvi član u (8) leži u prvom kvadrantu, dobijemo kao rješenje α. Drugo rješenje za drugi kvadrant je:

$$180^\circ - \alpha + 2\tau.$$

Koje je od ovih rješenja pravo možemo u većini slučajeva vidjeti već iz same situacije na terenu. U svakom slučaju α ne smije prelaziti 180°. Osim toga ako je φ veći od 90°, onda treba da bude α obavezno u prvom kvadrantu.

Možemo još postaviti pitanje o rješivosti zadatka. Jednadžbu (4) možemo napisati u općem obliku:

$$A \sin \alpha + B \cos \alpha = C.$$

Uvedimo supstituciju $x = \sin\alpha$, $y = \cos\alpha$ pa dobijemo dvije jednadžbe:

$$Ax + By = C,$$

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Time smo došli do zorne geometrijske slike. Radi se naime o presjeku pravca i jedinične kružnice. Rješenje uvijek postoji uz uvjete koji praktično redovito postoje. Naime:

$$v_A \neq v_B \neq 0^\circ, \; 0^\circ < \varphi < 180^\circ, \; -90^\circ < v_A < 90^\circ, \; -90^\circ < v_B < 90^\circ.$$

Pri tome smo sa v_A označili apsolutno veći visniski kut a sa v_B manji.

Treba pokazati da jednadžba (7) $\sin(\alpha - \tau) = \frac{\Delta H}{q}$ ima rješenje pod navedenim uslovima. Uzimanjem u obzir relacije (5) dobivamo

$$\left|\sin(\alpha - \tau)\right| = \left|\frac{\Delta H}{q}\right| = \left|\frac{\Delta H}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right| = \left|\frac{\Delta H}{k \cdot \sqrt{tg^2 v_A + tg^2 v_B - 2 \cos\varphi \, tg v_A \cdot tg v_B}}\right| < 1$$

Ovaj izraz treba da bude po svojoj apsolutnoj vrijednosti manji ili jednak jedan. U tom slučaju uvijek postoje dva ili barem jedno rješenje. Ako uzmemo u obzir da važi:

$$\Delta H = \Delta h_T^A - i + l_A - \Delta h_T^B + i - l_B,$$

$$tg\, v_A = \frac{\Delta h_T^A - i + l_A}{a} = \frac{(\Delta h_T^A - i + l_A)\sin\varphi}{d \cdot \sin\alpha},$$

$$tg\, v_B = \frac{\Delta h_T^B - i + l_B}{b} = \frac{(\Delta h_T^B - i + l_B)\sin\varphi}{d \cdot \sin\beta} \quad i$$

$$\cos\varphi = \cos(180^\circ - (\alpha + \beta)) = -\cos(\alpha + \beta)$$

onda možemo pisati:

$$\frac{(\Delta h_T^A - i + l_A - \Delta h_T^B + i - l_B)^2}{\frac{(\Delta h_T^A - i + l_A)^2}{\sin^2\alpha} + \frac{(\Delta h_T^B - i + l_B)}{\sin^2\beta} + 2\cos(\alpha + \beta)\frac{(\Delta h_T^A - i + l_A)(\Delta h_T^B - i + l_B)}{\sin\alpha \cdot \sin\beta}} < 1$$

Da bi gornja relacija bila zadovoljena treba da bude:

$$(\Delta h_T^A - i + l_A - \Delta h_T^B + i - l_B)^2 \sin^2\alpha \cdot \sin^2\beta < (\Delta h_T^A - i + l_A)^2 \sin^2\beta +$$
$$+ (\Delta h_T^B - i + l_B)^2 \sin^2\alpha + 2\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot (\Delta h_T^A - i + l_A)(\Delta h_T^B - i + l_B)$$

ili

$$(\Delta h_T^A - i + l_A)^2 \sin^2\beta(1 - \sin^2\alpha) + (\Delta h_T^B - i + l_B)^2 \sin^2\alpha(1 - \sin^2\beta) +$$
$$+ 2(\Delta h_T^A - i + l_A)(\Delta h_T^B - i + l_B)\sin\alpha \cdot \sin\beta\,[\cos(\alpha+\beta) + \sin\alpha \cdot \sin\beta] > 0$$

a pošto važi:

$$\cos(\alpha+\beta) + \sin\alpha \cdot \sin\beta = \cos\alpha \cdot \cos\beta$$

možemo pisati:

$$[(\Delta h_T^A - i + l_A) \cdot \sin\beta \cdot \cos\alpha + (\Delta h_T^B - i + l_B)\sin\alpha \cdot \cos\beta]^2 > 0$$

Gornja je nejednadžba uvijek zadovoljena, pošto su kvadrati realnih brojeva uvijek pozitivni. Rješenja neće biti jedino u slučaju ako su oba visinska kuta jednaka nuli. U tom slučaju su i konstante A i B nula. pa nema pravca. Rješenjem kuta α možemo jednostavno dobiti sve elemente u trokutu TAB:

$$\beta = 180^\circ - (\alpha + \varphi), \quad a = k \cdot \sin\alpha, \quad b = k \cdot \sin\beta. \tag{9}$$

te možemo izračunati smjerne kutove iz datih točaka na novu:

$$\nu_A^T = \nu_A^B + \beta, \quad \nu_B^T = \nu_B^A - \alpha. \tag{10}$$

Pomoću (9) i (10) možemo izračunati koordinate nepoznate točke:

$$\begin{aligned} y_T &= y_A + a \cdot \sin\nu_A^T = y_B + b \cdot \sin\nu_B^T, \\ x_T &= x_A + a \cdot \cos\nu_A^T = x_B + b \cdot \cos\nu_B^T, \\ h_T &= h_A - a\,\mathrm{tg}\,\nu_A - i + l_A = h_B - b \cdot \mathrm{tg}\,\nu_B - i + l_B. \end{aligned} \tag{11}$$

SREDNJA POLOŽAJNA POGREŠKA NOVE TOČKE

Interesira nas još srednja položajna greška M točke T. Pošto smatramo koordinate datih točaka A i B kao bespogrešne veličine možemo pisati:

$$M^2 = m_x^2 + m_y^2 = m_{\Delta x}^2 + m_{\Delta y}^2. \tag{12}$$

Iz slike vidimo da je

$$\Delta y = \frac{d \cdot \sin(\alpha+\varphi)}{\sin\varphi}\sin(\nu_B^A - \alpha),$$

$$\Delta x = \frac{d \cdot \sin(\alpha+\varphi)}{\sin\varphi}\cos(\nu_B^A - \alpha). \tag{13}$$

Gornje izraze diferenciramo pa pređemo na izraz za srednje kvadratne pogreške. Ako to uvrstimo u (12) dobivamo

$$M^2 = \left[\left(\frac{\partial\,\Delta y}{\partial\,\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial\,\Delta y}{\partial\,\alpha}\frac{\partial\,\alpha}{\partial\,\varphi}\right)^2 + 2\frac{\partial\,\Delta y}{\partial\,\varphi}\frac{\partial\,\Delta y}{\partial\,\alpha}\frac{\partial\,\alpha}{\partial\,\varphi} + \left(\frac{\partial\,\Delta x}{\partial\,\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial\,\Delta x}{\partial\,\alpha}\frac{\partial\,\alpha}{\partial\,\varphi}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + 2\frac{\partial\,\Delta x}{\partial\,\alpha}\frac{\partial\,\alpha}{\partial\,\varphi}\frac{\partial\,\Delta x}{\partial\,\varphi}\right] m_\varphi^2 + \left[\left(\frac{\partial\,\Delta y}{\partial\,\alpha}\frac{\partial\,\alpha}{\partial\,v_A}\right)^2 + \left(\frac{\partial\,\Delta x}{\partial\,\alpha}\frac{\partial\,\alpha}{\partial\,v_A}\right)^2\right] m^2\,v_A +$$
$$+ \left[\left(\frac{\partial\,\Delta y}{\partial\,\alpha}\frac{\partial\,\alpha}{\partial\,v_B}\right) + \left(\frac{\partial\,\Delta x}{\partial\,\alpha}\frac{\partial\,\alpha}{\partial\,v_B}\right)^2\right] m^2\,v_B. \tag{14}$$

Parcijalne derivacije $\frac{\partial\,\Delta y}{\partial\,\varphi}$, $\frac{\partial\,\Delta y}{\partial\,\alpha}$, $\frac{\partial\,\Delta x}{\partial\,\varphi}$ i $\frac{\partial\,\Delta x}{\partial\,\alpha}$ možemo odrediti direktno iz (13), dok ćemo parcijalne derivacije $\frac{\partial\,\alpha}{\partial\,\varphi}$, $\frac{\partial\,\alpha}{\partial\,v_A}$ i $\frac{\partial\,\alpha}{\partial\,v_B}$ odrediti deriviranjem implicitne funkcije $F(\alpha, \varphi, v_A, v_B) = 0$. Ovu implicitnu funkciju možemo odrediti na osnovu jednadžbe (4) koju pomnožimo sa $\sin\varphi$. Dakle:

$$d \sin\alpha \cdot \operatorname{tg} v_A - d \sin(\alpha + \beta) \cdot \operatorname{tg} v_B - \Delta H \sin\varphi = F(\alpha, \varphi, v_A, v_B) = 0 \tag{15}$$

pa će biti:

$$\frac{\partial\,\alpha}{\partial\,\varphi} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial\,\varphi}}{\dfrac{\partial F}{\partial\,\alpha}}, \quad \frac{\partial\,\alpha}{\partial\,v_A} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial\,v_A}}{\dfrac{\partial F}{\partial\,\alpha}}, \quad \frac{\partial\,\alpha}{\partial\,v_B} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial\,v_B}}{\dfrac{\partial F}{\partial\,\alpha}}$$

Uvrštavanje ovih parcijalnih derivacija u (14) daje nam posle kraćeg sređivanja izraz za srednju položajnu pogrešku:

$$M^2 = \left[\frac{d^2}{\sin^4\varphi}\sin^2\alpha + \frac{1}{\sin^2\varphi}\left(\frac{d \operatorname{tg} v_B \cdot \cos(\alpha+\varphi) + \Delta H \cdot \cos\varphi}{\operatorname{tg} v_A \cdot \cos\alpha - \operatorname{tg} v_B \cdot \cos(\alpha+\varphi)}\right)^2 - \right.$$
$$\left. - 2\frac{\sin\alpha \cdot \cos(\alpha+\varphi)}{\sin^3\varphi} \cdot \frac{d^2 \operatorname{tg} v_B \cdot \cos(\alpha+\varphi) + \Delta H d \cdot \cos\varphi}{\operatorname{tg} v_A \cdot \cos\alpha - \operatorname{tg} v_B \cdot \cos(\alpha+\varphi)}\right] m^2\,\varphi +$$
$$+ \left[\frac{d \cdot \sin\alpha}{\sin\varphi \cdot \cos^2 v_A (\operatorname{tg} v_A \cdot \cos\alpha - \operatorname{tg} v_B \cdot \cos(\alpha+\varphi))}\right]^2 m^2\,v_A +$$
$$+ \left[\frac{d \cdot \sin(\alpha+\varphi)}{\sin\varphi \cdot \cos^2 v_B (\operatorname{tg} v_A \cdot \cos\alpha - \operatorname{tg} v_B \cdot \cos(\alpha+\varphi))}\right]^2 m^2\,v_B \tag{16}$$

Primjer:

	y (m)	x (m)	h (m)
A	5 413 000	5 040 000	300
B	5 413 000	5 041 000	150

$\varphi = 85°$, $v_A = 8°$, $v_B = 3°$, $l_A = l_B$

$m_\varphi = \pm 6''$, $m\,v_A = m\,v_B = \pm 10''$

$\nu_A^B = 45°$, $d = 1411{,}21$ m

$\tau = 21°\,0{,}3'$

$$\alpha - \tau = 46°30{,}3'$$

$$\alpha = 67°30{,}6' \quad \beta = 27°29{,}4'$$

$$a = 1311{,}66\,\text{m} \quad b = 655{,}27\,\text{m}$$

$$\nu_A^T = 72°29{,}3' \quad \nu_B^T = 157°29{,}4'$$

$$y_T = 5414\,250{,}87\,\text{m} \quad x_T = 5040\,394{,}66\,\text{m}$$

$$M^2 = 0{,}52\,\text{m}^2 \quad M = \pm\,0{,}72\,\text{m}$$

LITERATURA

[1] Čubranić N. — Teorija pogrešaka s računom izjednačenja, Tehnička knjiga, Zagreb 1967

[2] Mihailović K. — Geodezija II, Naučna knjiga, Beograd 1978

[3] Natanson I. P. — Teorija funkcij veščestvennoj peremennoj, Gostehizdat, Moskva 1957

SAŽETAK

Opisana metoda razmatra određivanje koordinata nove točke pomoću mjerenja vertikalnih kutova na dvije poznate točke i horizontalnog kuta između njih. Razmatrana je i srednja položajna pogreška tako određene nove točke.

RÉSUMÉ

Cet article propose une méthode de détermination des coordonnées d'un point a l'aide de deux points données. Si nous connaissons leurs coordonnées de situation et la différence de leurs altitudes, et si nous mesurons un angle horizontal et deux angles verticaux vers ces deux points, nous pouvons calculer les coordonnées du point inconnu. On a aussi traité l'erreur du point déterminé par ce procédé.