UDK 528.33:528.14
Originalni znanstveni rad

JEDNA METODA IZRAVNANJA SLOBODNE TRIANGULACIONE MREŽE

*Smail PAŠALIĆ — Sarajevo**

1. UVOD

Pri izravnanju slobodnih triangulacionih mreža (bez obzira jesu li to mreže u kojima su mjereni samo uglovi, samo dužine ili i uglovi i dužine) imamo tri stepena slobode, te možemo po želji birati tri elementa za orijentaciju mreže (tri koordinate, dvije koordinate i jedan direkcioni ugao itd).

Pogrešno je uvoditi različite stepene slobode u triangulacione mreže kao što to čini dr Kovačević u radu [3]. Naime, on tvrdi da čisto triangulacione mreže imaju 4 stepena slobode, trilateracione 3, a kombinovane 2, što je netačno i stvara zbrku kod čitaoca.

Treba odmah reći da ono što je bitno u jednoj slobodnoj mreži izborom elemenata orijentacije ili izborom metode (standardna, Mittermayerova ili u ovom radu prikazana) nemijenja se, a to su izravnati elementi mreže (uglovi, dužine itd), srednje greške ovih elemenata i sve iz njih izvedene veličine. Vjerovatno radi toga ovom problemu ranije i nije posvećivana skoro nikakva pažnja.

To ne znači da problem nije interesantan i da njegovo razmatranje ne unosi više svjetla u teoriju izravnanja geodetskih mreža.

U novije vrijeme, standardnoj metodi za izravnanje slobodnih mreža, zamjera se, što ne daje srednje greške za sve tačke mreže. Naime, ovom metodom proizvoljno odabrana tačka mreže dobija greške koordinata nula, a najudaljenija tačka od nje maksimalne greške — pa se stiče utisak o nerealnosti ovih grešaka. E. Mittermayer je riješio ovaj problem tako što sve tačke mreže smatra traženim, te uz dodatne uslove dobija srednje greške koordinata sviju tačaka u mreži. Rad Mittermayera [1] je zaistao korektno prikazan, te na primjer od 57 nepoznatih testiran, tako da nema mjesta tvrdnji dr Kovačevića (u radu [3]), da je primjena Mittermayerove metode na mreže veće od 10 tačaka (20 nepoznatih) neupotrebljiva (vjerovatno se tu radilo o neadekvatnom odabiranju zavisnih jednačina ili je bila u pitanju neka omaška u programiranju zadataka).

Međutim, autor ovog rada zamjera Mittermayerovoj metodi i drugim iz nje izvedenim metodama, druge dvije stvari:

* Adresa autora: Prof. dr Smail Pašalić, Građevinski fakultet Sarajevo, ul. Hasana Brkića 24

1) Neuporedivo je složenija i teža za numeričku obradu od standardne metode. Tako se, pored ostalog, moraju pronalaziti za visine normalne jednačine, što nije baš lak posao, pa računati korelaciona matrica nepoznatih koja prema [L. 2, str. 52] iznosi:

$$Q_x = B\,(B^*\,B)^{-1}\,A_1^*\,Q_l^{-1}\,A_1\,(B^*\,B)^{-1}\,B^*$$

Dok odgovarajuća korelaciona matrica za standardnu metodu iznosi:

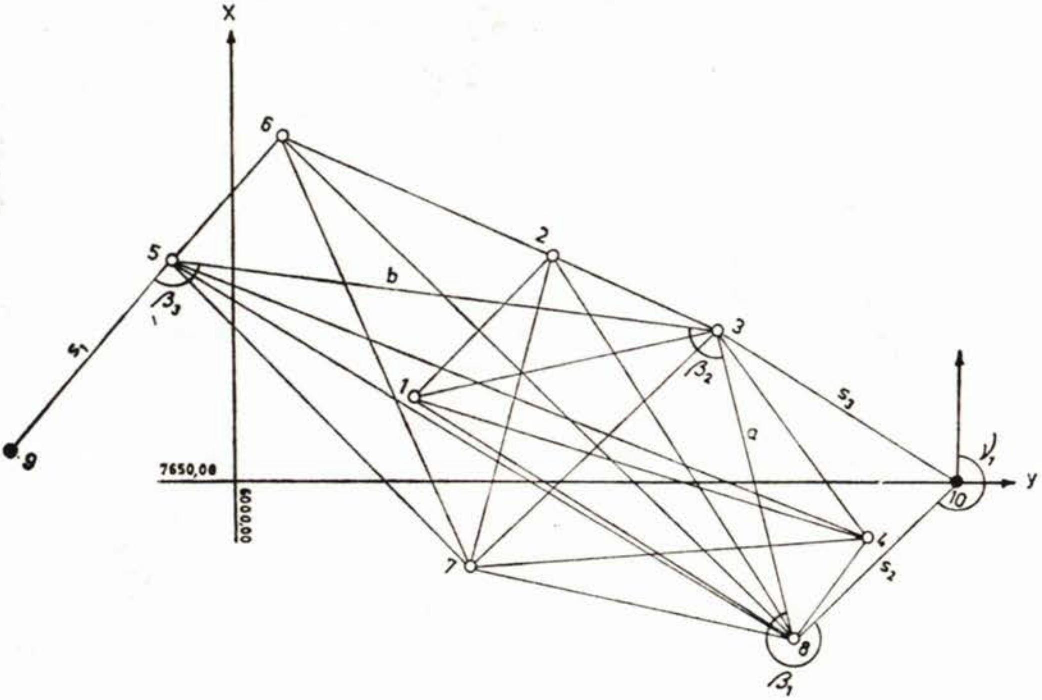
$$Q_x = (A_1^*\,Q_l^{-1}\,A_1)^{-1}$$

2) Metoda ne daje odgovor u odnosu na što su srednje greške koordinata baš takve i tolike. Nije odgovor ako se kaže to su relativne greške, jer i relativnost mora biti nekako definisana.

Radi toga, ako neko baš želi greške koordinata sviju tačaka u slobodnoj mreži, autor predlaže jednu svoju metodu, koja je jednostavna za primjenu kao i standardna metoda, a daje greške sviju tačaka kao i metoda Mittermayera.

2. SUŠTINA METODE

Metoda se satoji u tome da se slobodna mreža prevede u neslobodnu, da pri tome suma [PVV] ostane neovisna i da sve koordinate tačaka mreže dobiju srednje greške m_x i m_y u odnosu na neko zadato (polazno) stanje.



Slika 1.

Ovo polazno stanje neka budu dvije čvrste tačke, koje ćemo na dogovoreno mjesto pridodati slobodnoj mreži i vezati ih pomoću tri sračunate dužine, koje se u toku izravnanja neće mijenjati. Na taj način mreža više neće biti slobodna. Ona će u toku izravnanja dobiti popravke, a samim tim i srednje greške za svaku tačku mreže.

Sračunate dužine neće uticati na ocjenu tačnosti, jer ćemo ih tretirati kao date (čvrste) veličine ili ćemo im pripisati dovoljno velike težine (pogodno pri programskom rješenju zadatka). Neka te čvrste tačke budu 9 i 10, a sračunate dužine S_1, S_2 i S_3, slika 1.

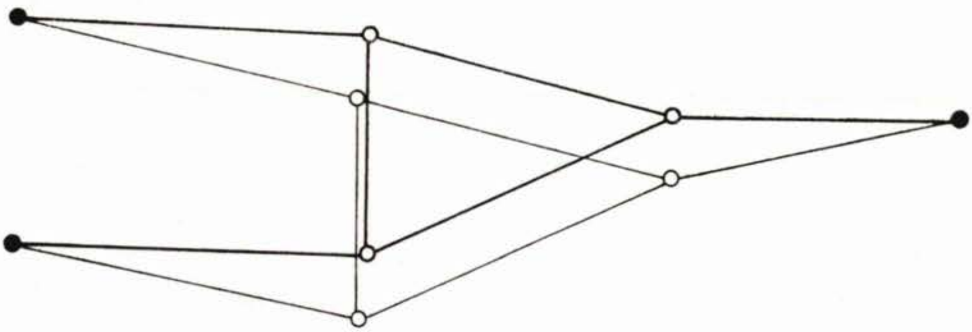
3. OPIS METODE

Grafički sa skice pročitamo koordinate tačaka $9(y_9, x_9)$, $10\,(y_{10}, x_{10})$. Zatim pomoću približnih koordinata tačaka mreže $(3\,(y_3^0, x_3^0)$, $5\,(y_5^0, x_5^0)$ i $8\,(y_8^0, x_8^0)$ i koordinata tačaka 9 i 10 računamo dužine

$$S_1 = \sqrt{(y_5^0 - y_9)^2 + (x_5^0 - x_9)^2}, \qquad S_2 = \sqrt{(y_8^0 - y_{10})^2 + (x_8^0 - x_{10})^2}$$

$$S_3 = \sqrt{(y_3^0 - y_{10})^2 + (x_3^0 - x_3)^2}.$$

Moguće je uzeti i tri čvrste tačke pa od njih računati 3 dužine, pomoću kojih mreža postaje neslobodna. Bitno je da ove dužine ne budu blizu paralelnosti, jer kako slika 2 pokazuje onda će sistem biti labilan pa se mogu pojaviti veće srednje greške koordinata. Inače na ostale veličine mreže ovo neće imati uticaja.



Slika 2.

Date(čvrste) tačke mogu se dogovorno uzimati na dva najudaljenija kraja mreže, s tim da strane S_1, S_2, S_3 budu približno jednake prosječnoj dužini strana mreže i da strana S_1, s obzirom na sliku 2, bude približno upravna, na visinu trougla 8, 3, $\overline{10}$. Na taj način kvalitet različitih triangulacijskih mreža bio bi uporediv prema veličini položajnih grešaka svojih tačaka. Sračunate dužine mogu se zamijeniti sa sračunatim direkcionim uglovima. Recimo sa:

$$\nu_{9,5} = \text{arc tg}\left(\frac{y_5^0 - y_9}{x_5^0 - x_9}\right), \qquad \nu_{10,8} = \text{arc tg}\left(\frac{y_8^0 - y_{10}}{x_8^0 - x_{10}}\right)$$

$$\nu_{10,3} = \text{arc tg}\left(\frac{y_3^0 - y_{10}}{x_3^0 - x_{10}}\right),$$

koje smatramo datim (čvrstim) veličinama ili im pripišemo dovoljno velike težine (pogodno za programsko rješenje zadatka).

Nakon ovako postavljenog zadatka izravnanje se provodi kao za svaku neslobodnu mrežu, s tim da treba znati da su srednje greške koordinata m_x i m_y dobijene u odnosu na date (čvrste) tačke.

Da je ovaj zadatak rješiv, vidi se iz donjih formula, a koje su napisane pomoću slike 1.

β_1 se dobije rješenjem trougla 3, 8,10 (strana a je dobijena iz mjerenja), β_2 se dobije iz mjerenja, a ν_1 i β_3 su nepoznate veličine.

$$y_{10} + S_2 \sin \nu_1 + a \sin(\nu_1 + \beta_1 + 180°) + b \sin(\nu_1 + \beta_1 + \beta_2) + \\ + S_1 \sin(\nu_1 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + 180°) = y_9,$$

$$x_{10} + S_2 \cos \nu_1 + a \cos(\nu_1 + \beta_1 + 180°) + b \cdot \cos(\nu_1 + \beta_1 + \beta_2) + \\ + S_1 \cos(\nu_1 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + 180°) = x_9.$$

Rješenjem ove dvije jednačine dobiju se dvije nepoznate ν_1 i β_3 koje na taj način postaju funkcije mjerenih veličina a, b itd, preko kojih se srednje greške koordinata tačaka dobijaju kao greške funkcije mjerenih veličina, što je sasvim u skladu sa teorijom grešaka.

Metodologija prevođenja slobodne mreže u neslobodnu, može korisno poslužiti i u drugim situacijama, naročito pri programskom (automatskom) rješavanju zadataka.

Recimo, ako u slobodnoj mreži hoćemo da jedna tačka ostane čvrsta, dovoljno je od dvije date (čvrste) tačke sračunati dužine do tačke u mreži koju hoćemo da ostane nepomična a zatim od čvrste do bilo koje tačke mreže sračunati treću dužinu, te mrežu izravnati kao neslobodnu. U tom slučaju imamo rezultate kao da smo slobodnu mrežu izravnavali standardnom metodom. Na ovaj način sačinjen program za neslobodne mreže, može se koristiti i za slobodne mreže. Naravno, sračunate dužine moraju biti tretirane kao date ili im treba pripisati dovoljno velike težine.

4. PRIMJER

Na slici 1. data je skica slobodne trangulacione mreže u kojoj su mjereni pravci i dužine, razvijene za potrebe projekta (HADITHA-IRAQ). Mreža je izravnata po predložnoj i standardnoj metodi na računaru IBM 4331. Podaci su nešto pokvareni da bi dobijeni rezultati bolje ilustrovali metode izravnanja.

Ulazni podaci i rezultati koji su isti za obje metode:

1. Približne koordinate:

Tačka	x	y
1.	7738,292 m	6183,301 m
2.	7879,041	6324,019
3.	7801,260	6490,242
4.	5797,521	6643,670
5.	7872,523	5935,394
6.	8001,914	6052,696
7.	7561,770	6247,367
8.	7489,799	6564,715
	čvrste tačke	
9.	7640,000	5750,000
10.	7650,000	6750,000

2. Pravci i njihove najvjerovatnije greške:

St. 1

	°	'	"	v"
4.	0	00	00	7,67
8.	16	05	12,2	—19,09
2.	297	59	33,3	4,14
3.	331	23	59,4	7,29

St. 2

	°	'	"	v"
8.	0	00	00	1,37
7.	45	18	06,4	11,98
1.	76	44	01,2	— 9,39
6.	146	05	51,8	0,97
3.	326	47	52,6	— 4,94

St. 3

5.	0	00	00	10,44
6.	17	18	56,2	—24,07
2.	17	44	27,2	1,17
4.	225	42	11,6	7,47
8.	249	13	57,4	8,76
7.	308	04	31,2	— 5,43
1.	341	05	00,1	1,67

St. 4

5.	0	00	00	10,06
3.	31	48	34,0	—20,34
8.	285	01	16,2	3,53
7.	333	37	28,8	2,10
1.	355	46	52,7	4,65

St. 5

4.	0	00	00	9,62
8.	10	05	32,2	—20,29
7.	23	39	47,8	— 3,62
6.	290	58	23,7	1,99
3.	346	05	52,3	12,30

St. 6

8.	0	00	00	— 1,98
7.	21	07	16,2	6,91
5.	87	11	48,9	— 7,33
2.	339	21	39,8	3,73
3.	339	37	43,5	— 1,33

St. 7

5.	0	00	00	— 4,76
6.	21	14	04,0	14,28
2.	58	41	14,7	—10,39
3.	90	30	37,5	— 6,51
4.	129	57	43,2	— 1,68
8.	147	53	30,6	9,05

St. 8

6.	0	00	00	— 5,38
2.	13	15	31,8	16,92
3.	31	33	10,1	2,70
4.	81	14	39,8	— 8,03
7.	327	46	41,8	— 0,73
1.	348	04	56,7	— 1,87
5.	346	18	28,0	— 3,67

3. Dužine i njihove najvjerovatnije greške:

od—do	dužine	v_i
8.—6.	724,251 m	—0,016 m
8.—4.	133,532	0,007
6.—5.	174,523	0,044
4.—5.	759,826	0,027
3.—7.	341.080	—0,015
1.—2.	199,059	—0,056
7.—2.	326,362	—0,006

Srednja greška jedinice težine

$$m_0 = 11,516$$

Podaci i rezultati koji se odnose na novu metodu

od—do	dužina	v_i
9—5	297,385 m	0,000
10—8	244,908	0,000
10—3	300,589	0,000

Izravnate koordinate i njihove srednje greške

	x	y	M_x	M_y
1.	7738,276	6183,306	0,020	0,023
2.	7879,013	6324,002	0,022	0,015
3.	7801,285	6490,257	0,014	0,008
4.	7597,523	6643,683	0,016	0,020
5.	7872,557	5935,352	0,024	0,030
6.	8001,894	6052,593	0,033	0,027
7.	7561,762	6247,451	0,013	0,018
8.	7489,817	6564,739	0,015	0,013

Podaci i rezultati koji se odnose na standardnu metodu:

od—do	dužine	v_i
9—3	757,603 m	0,000
10—3	300,589	0,000
10—8	244,908	0,000

Izravnate koordinate i njihove srednje greške

Tačka	x	y	M_x	M_y
1.	7738,222	6183,297	0,023	0,026
2.	7878,972	6323,980	0,011	0,021
3.	7801,260	4490,242	0,000	0,000
4.	7597,513	6463,688	0,017	0,022
5.	7872,478	5935,330	0,034	0,040
6.	8001,827	6052,559	0,025	0,038
7.	7561,713	6247,460	0,027	0,016
8.	7489,800	6564,755	0,021	0,018

5. ZAKLJUČAK

Nova metoda sastoji se u tome, da se slobodna mreža prevodi u neslobodnu i tako metodologija izravnanja vrijedi ista za obe mreže. Naročito je ovo značajno kod programskog (automatskog) rješavanja zadatka.

Što se tiče traženih rezultata, oni su, izuzev srednjih grešaka koordinata, isti bilo kojom metodom vršili izravnanje. Greške koordinata su ustvari greške funkcija mjerenih veličina u odnosu na usvojene elemente orijentacije. Ovi elementi za standardnu metodu su npr. koordinate jedne tačke ($m_x = 0$, $m_y = 0$) i direkcioni ugao jedne strane. Za novopredloženu metodu to su npr. dvije čvrste tačke. Za metodu Mittermajera i iz nje izvedene slične metode nije jasno u odnosu na što su greške koordinate baš takve i tolike. Međutim, ove greške i nisu za praksu naročito značajne, jer praksa koristi elemente mreže i njihovu tačnost, a što je kod svih metoda isto. Na osnovu tačnosti ovih elemenata cijeni se i pravi kvalitet mreže.

Ovo se naročito podvlači, jer su se u našoj tekućoj geodetskoj praksi, neki uhvatili za rad Mittermayera, te nameću radnim organizacijama kao obavezu da slobodne mreže izravnavaju po toj ili nekoj ekvivalentnoj metodi, inače ne primaju radove kao ispravne.

S obzirom na sve širu primjenu geodezije u industriji, ove mreže se sve češće koriste, te da ne bi bilo lutanja pa i zloupotreba, trebalo bi (po mišljenju autora) da i drugi koji se bave ovom problematikom, na ovom mjestu, kažu svoje mišljenje.

Na taj način bi se praksa oslobodila ovako štetnih zahtjeva

LITERATURA:

[1] Mittermayer, E.: A generalisation of the leastsquares method for the adjusment of free networks.

[2] Mihailović, K.: Apsolutne i reelativne greške traženih veličina u lokalnim mrežama, Zbornik Geodetskog instituta br. 14, Beograd, 1973.

[3] Kovačević, D.: Prilog istraživanju praktične primjene unutarnje teorije grešaka kod izravnanja slobodnih geodetskih mreža, Savjetovanje o naučno-istraživačkom radu, Jajce, 1979.

REZIME

U radu je prikazana nova metoda izravnanja slobodnih triangulacionih mreža. Metoda se temelji na principu da se slobodna mreža prevodi u neslobodnu. Pored toga, daje se kritički osvrt na postojeće metode izravnanja slobodnih mreža.

ZUSAMMENFASSUNG

In dieser Arbeit ist ein neues Verfahren der Ausgleichung der freien Dreiecknetze dargestellt. Das Verfahren gründet sich auf dem Prinzip daß das fraie Netz in das unfreie überführt wird. Ausserdem, in der Arbeit ist ein kritischer Rückblick auf die bisherigen Methoden der Ausgleichung der freien Dreiecknetze gegeben.

Primljeno: 1983—01—28