UDK 528.33:519.242.5
Originalni znanstveni rad

TAYLOR-KARMANOVA STRUKTURA KORELACIONIH MATRICA I NJIHOVA PRIMENA KOD OPTIMIZACIJE U GEODEZIJI

*Toša NINKOV — Beograd**

1. UVOD

Analizirajući do sada publikovane radove iz oblasti optimizacije težina mjerenja u geodeziji može se izvući jedan globalni zaključak da se u rešavanju ovog problema koriste uglavnom dve strategije rešavanja:

1. Iterativnim metodama matematičkog programiranja miniziraju se definisane cilj funkcije koje su invarijantne na izabrani koordinatni sistem (trag Q_x, det Q_x, λ_{max} (Q_x) itd.) [5].

2. U numerički proces se uvodi unapred definisana aproksimativna vrednost korelacione matrice nepoznatih konačnih koordinata mreže i do rešenja se dolazi u jednom koraku.

U radu [9] su obrađene metode koje se najčešće koriste za rešavanje problema određivanja optimalnog plana opažanja kako po jedoj tako i po drugoj strategiji rešavanja problema. U radu [8], koji je objavljen u »Geodetskom listu«, ukratko su prikazane najčešće korišćene metode druge strategije sa unapred definisanom korelacionom matricom oblika $Q_x = E$. U ovom radu će se dati kratak osvrt na mogućnost dobijanja matrica sa TAYLOR-KARMAN-ovom strukturom (detaljan prikaz u GRAFAREND [3]) za mreže sa usvojenom konfiguracijom i njihovo korišćenje kod rešavanja problema optimizacije po drugoj strategiji.

2. TAYLOR-KARMANOVA STRUKTURA KORELACIONIH MATRICA

Osnovna jednačina čije rešenje daje optimalne težine opažanja je sledećeg oblika

$$\underline{A}^T \underline{P} \underline{A} = \underline{Q}_x^{-1} \tag{1}$$

odnosno potrebno je odrediti nepoznate dijagonalne elemente matrice $\underline{P}$ uz pretpostavku da su matrice $\underline{A}$ i $\underline{Q}_x$ unapred poznate. Matrica $\underline{A}$ je jednoznačno definisana sa usvojenom konfiguracijom mreže. Za vrednosti korelacione ma-

* Adresa autora: Dr Toša Ninkov, dipl. inž. Građevinski fakultet, Institut za geodeziju, Beograd, Bul. revolucije 73

trice Q_x u ovakvim slučajevima koristile su se samo dve mogućnosti i to $Q_x = E$ i $Q = Q_{TK}$. U prvom slučaju za korelacionu matricu se uzima jedinična matrica odgovarajućih dimenzija koja u potpunosti zadovoljava kriterijume homogenosti i izotropije mreže koji se postavlja kao cilj rešavanja zadatka. Veliki nedostatak ovog oblika apriori usvojene korelacione matrice je što se zanemaruje korelaciona zavisnost koja postoji između novo određenih tačaka mreže. Neuzimanje u obzir te korelacione zavisnosti u numerički proces matematičke optimizacije dovodi do nepotpunog poklapanja efektivne korelacione matrice sa apriori željenom.

Druga mogućnost koja dovodi do homogeno-izotropnog rasporeda tačnosti u mreži, rezultira i interpretacije geodetske mreže kao stohastičkog procesa. Kao rezultat takve interpretacije dobija se korelaciona matrica sa takozvanom TAYLOR-KARMAN-ovom strukturom $Q_x = Q_{TK}$. Na taj način se u numerički proces određivanja optimalnih težina opažanja u mreži unose i korelacioni odnosi nepoznatih koordinata tačaka mreže. Mogućnost dobijanja aproksimativnih vrednosti elemenata disperzione matrice sa TAYLOR-KARMANOVOM strukturom teorijski i praktično je obradio GRAFAREND sa svojim saradnicima i to publikovao u nekoliko članaka [3], [10]. Praktična vrednost korelacionih matrica A određenih na taj način je kasnije potvrđena njihovim upoređivanjem sa njihovim stvarnim vrednostima kod velikog broja teorijskih i praktičnih mreža sa različitim dužinama strana, različitih oblika figura itd. Naravno, matrice sa TK-strukturom imaju samo približno iste elemente kao njihove stvarne vrednosti.

Rezultujuće formule za računanja elemenata apriori određene korelacione matrice su sledeće:

$$q_{yiyk} = \psi(r) + [\Omega(r) - \psi(r)] \frac{\Delta y^2}{r^2}$$

$$q_{xixk} = \psi(r) + [\Omega(r) - \psi(r)] \frac{\Delta x^2}{r^2}$$

$$q_{yixk} = q_{ykxi} = [\Omega(r) - \psi(r)] \frac{\Delta y \, \Delta x}{r^2} \quad \text{za } i \neq k \qquad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} q_{yiyk} &= q_{xixk} = 1 \\ q_{yixk} &= q_{ykxi} = 0 \end{aligned} \right. \quad \text{za } i = k$$

gde su — $r = (\Delta y^2 + \Delta x^2)^{1/2}$ — rastojanje između tačaka »i« i »k«

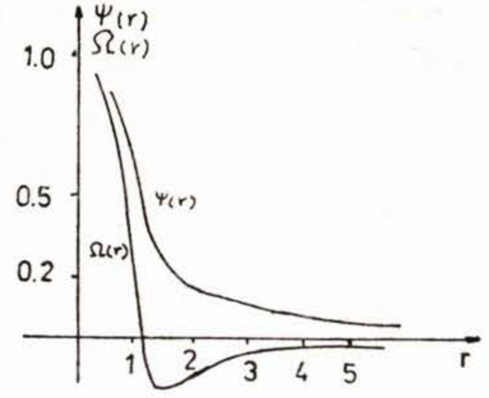
$$\Delta y = yk - yi$$

$$\Delta x = xk - xi$$

— $\psi(r)$ — funkcija korelacije malih poluosovina elipsi grešaka

— $\omega(r)$ — funkcija korelacije velikih poluosovina elipsi grešaka

Na sl. 1 su prikazane funkcije korelacije malih i velikih poluosovina elipsi grešaka čiji je oblik određen na osnovu eksperimentalnih istraživanja korelacionih matrica raznih tipova geodetskih mreža. Očigledno je da elementi ovako



Slika 1.

određenih korelacionih matrica mogu predstavljati samo njihove aproksimativne vrednosti te apriori određene korelacione matrice realnih mreža u svakom slučaju će odstupati od njene stvarne vrednosti i o tome se mora voditi računa. Do sličnog oblika korelacionih funkcija došao je i BANOV [2] iako je do rešenja išao drugim putem od GRAFAREND-a i njegovih saradnika. Ni postupak određivanja elemenata $\underline{Q}_x$, datim od BANOV-a, ne omogućuje postizanje nekih tačnijih vrednosti elemenata korelacione matrice tako da se i u ovom slučaju u numerički proces ulazi sa izvesnim aproksimacijama koje se kasnije manifestuju nepoklapanjem efektivne tačnosti sa unapred željenom.

Na osnovu gornjih formula moguće je odrediti apriornu vrednost korelacione matrice oblika $\underline{Q}_x = \underline{Q}_{TK}$ za svaku mrežu ako je poznata njena geometrija.

Za numeričku obradu primera u ovom radu za vrednost r = 1 uzeta je 1/2 prosečne strane u mreži jer se pokazalo (G. Schmitt [10]) da se time postiže bolje poklapanje efektivne i unapred željene tačnosti u mreži.

3. METODE REŠAVANJA

Za rešavanje problema određivanja optimalnih težina opažanja u jednoj mreži po drugoj strategiji potrebno je odrediti elemente dijagonalne matrice P u matričnoj jednačini (1). Matrica A je jednoznačno definisana sa usvojenom konfiguracijom mreže. Za rešavanje tog problema po drugoj strategiji koristiće se korelacione matrice sa TAYLOR-KARMAN-ovom strukturom čiji su elementi određeni na osnovu formula (2). Kao što je u radu (8) prikazano najčešće korišćene metode rešavanja ovog problema su metode direktnog, kanonskog i simpleks rešavanja koje su teorijski date od GRAFAREND-a i ostalih (3) i praktično obrađene od G. Schmitt-a (10). U ovom radu će se dati samo kratki osvrt na njih.

3. 1. Metoda direktnog rešavanja

Ovom metodom se do pojedinačnih elemenata matrice $\underline{P}$ iz matrične jednačine (1)

$$\underline{A}^T \underline{P} \underline{A} = \underline{Q}_x^{-1} \tag{1}$$

dolazi njenom dekompozicijom pomoću KHATRI-RAO proizvoda (GRAFAREND [3]) kada se dobija sistem linearnih jednačina oblika

$$(\underline{A}^T \Theta \underline{A}^T)_p = \underline{U} \underline{p} = \underline{q} \tag{3}$$

gde su:

$\underline{\Theta}$ — operator KHATRI-RAO proizvoda
$\underline{A}$ — matrica konfiguracije
$\underline{p}$ — vektor traženih težina opažanja
$\underline{q}$ — vektor sastavljen od poređanih vrsta gornje trougaone matrice $\underline{Q}_x^{-1}$ uključujući i dijagonalne elemente.

Na ovaj način dobija se sistem linearnih jednačina čije rešenje (metoda rešavanja zavisi od dimenzija tog sistema) daje pojedinačne težine planiranih opažanja. Najčešće slučaj rešavanja sistema jednačina (3) je primenom pseudoverzije (MOORE-PENROSE-ova) kao specijalnog oblika uopštene generalizovane inverzije.

3. 2. Metoda kanonskog rešenja

Ova metoda je veoma pogodna za optimizaciju slobodnih geodetskih mreža mada se može koristiti i za optimizaciju neslobodnih mreža. Metoda se bazira na mogućnosti dekompozicije apriori definisane korelacione matrice $Q_x^{-1} = N$ sa njenom modalnom i skalarnom matricom.

$$\underline{Q}_x^{-1} = \underline{N} = \underline{S} \underline{D} \underline{S}^T = \underline{A}^T \underline{P} \underline{A}. \tag{4}$$

gde je:

$D = \text{diag}\ (\lambda_1, \lambda_2 \ldots, \lambda_r, 0, \ldots, 0)$ dijagonalna matrica sopstvenih vrednosti matrice N uključujući i one jednake nuli (kod slobodnih mreža)

S — ortogonalna matrica sopstvenih vektora od N

Sada se D može predstaviti kao

$$\underline{D} = \underline{S}^T \underline{A}^T \underline{P} \underline{A} \underline{S} = (\underline{A} \underline{S})^T \underline{P} (\underline{A} \underline{S}) \tag{5}$$

Uvođenjem zamene Z = AS dobija se matrična jednačina

$$\underline{Z}^T \underline{P} \underline{Z} = \underline{D} \tag{6}$$

na koju se može primeniti KHATRI-RAO proizvod u cilju određivanja pojedinačnih elemenata matrice P odnosno

$$(\underline{Z}^T \Theta \underline{Z}^T) \underline{p} = \underline{d} \tag{7}$$

dobija se sistem jednačina koji se rešava kao i u prethodnom slučaju.. Vektor d ima sledeći oblik

$$\underline{d} = (\lambda_1, 0, \ldots, 0, \lambda_2, 0, \ldots, 0, \ldots, \lambda_r, 0, \ldots, 0) \tag{8}$$

Rešavanjem sistema jednačina (7) dobijaju se vrednosti traženih nepoznatih težina planiranih opažanja.

3. 3. Simpleks metoda

Rešavanjem postavljenog problema metodama (3.1) i (3.2) mogu se javiti rezultujući vektori $\underline{P}$ sa negativnim elementima. Obzirom da se opažanja sa negativnim težinama ne mogu realizovati takvi optimalni planovi opažanja nemaju neku veću praktičnu vrednost sem ako se (kako neki autori rade) opažanja sa negativnim težinama izbace iz geometrije mreže. U tim slučajevima polazi se od pretpostavke da je uticaj tačnosti tog merenog elementa, na homogenost i izotropiju mreže, mali i da se to merenje može izostaviti. Ovakav postupak nije naišao na potpuno priznanje od geodeteske stručne javnosti te će pitanje pojavljivanja negativnih težina dobiti odgovor tek u budućim radovima u ovoj oblasti geodezije.

Da bi se izbegla mogućnost pojavljivanja negativnih težina sistem jednačina (3) se prevodi u sistemu nejednačina uz uvođenje ograničenja negativnosti težina planiranih opažanja:

$$\begin{gathered} \underline{U} \cdot \underline{p} \geqq \underline{q} \\ p_i > 0 \end{gathered} \tag{9}$$

Jednačine (9) predstavljaju uslove ograničenja pri maksimizaciji cilj funkcije oblika

$$R = \sum_{i=1}^{m} p_i = p_1 + p_2 + \ldots + p_n \rightarrow \max \tag{10}$$

Numerički proces je iterativan i do rešenja se dolazi u konačnom broju iteracija. Nedostatak ove metode je taj što se kod velikih mreža do rezultata dolazi posle velikog broja iteracija odnosno velikog numeričkog posla.

4. PRIMERI

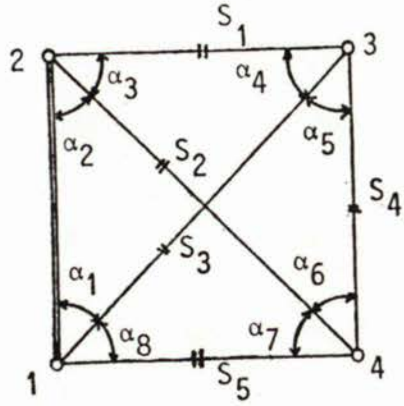
Za ilustraciju primene apriori određenih korelacionih matrica $\underline{Q}_x = \underline{Q}_{TK}$ sa TAYLOR-KARMAN-ovom strukturom urađena je optimizacija elementarnih neslobodnih geodetskih mreža po sve tri navedene metode. Za elementarnu mrežu čije se optimalne težine traže uzet je neslobodni geodetski četverougao (sl. 2) sa planiranim merenjima svih uglova (ili pravci) i svih dužina. U slučajevima kada su planirana merenja pravaca oni su podeljeni u 4 grupe opažanja (opažanja sa svake od stanica). Time se eliminiše mogućnost da se javi potreba da se pravci na jednoj stanici mere sa različitom tačnosti što je praktično neizvodljivo.

Date tačke

	y	x
1	3 100.00	5 100.00
2	3 100.00	5 600.00

Tražene tačke

3	3 600.00	5 600.00
4	3 600.00	5 100.00



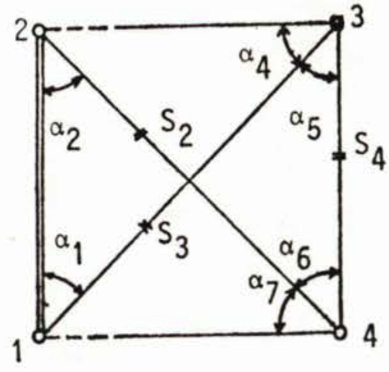
Slika 2.

Korelaciona matrica $\underline{Q}_x = \underline{Q}_{TK}$ sa TAYLOR-KARMAN-ovom strukturom ove mreže određena je po formuli (2) i po programu Instituta za geodeziju Univerziteta Karlsrue za vreme kratke autorove specijalizacije kod prof. G. Schmitt-a. Ona će u ovom slučaju biti oblika

$$\underline{Q} = \underline{Q}_{TK} = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0000 & 0.5000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 & 0.2500 \\ 0.5000 & 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.2500 & 0.0000 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

Primenjujući napred navedene metode u poglavlju 2 potrebno je naći takav raspored tačnosti koji će obezbediti tačnost tačaka mreže definisanom sa $\underline{Q}_x = \underline{Q}_{TK}$, odnosno želi se da ta mreža bude homogeno izotropna. Obzirom da je $\underline{Q}_x = \underline{Q}_T$ samo približna vrednost nepoznate korelacione matrice to se u numerički proces izračunavanja optimalnih težina opažanja ulazi sa aproksimacijama koje će prouzrokovati nepoklapanje efektivne korelacione matrice $\underline{Q}_x^{-1} = \underline{A}^T P_{opt} \underline{A}$ sa unapred usvojenom $\underline{Q}_x = \underline{Q}_{TK}$. Ta nepoklapanja nisu velika ali su vrlo često takvih dimenzija da se o tome mora voditi računa, odnosno aposteriori (efektivna) korelaciona matrica nema čisto homogeno izotropnu strukturu.

$p_{s_2} = 0.0001$ $\quad p_{\alpha_4} = 0.0076$
$p_{s_3} = 0.0001$ $\quad p_{\alpha_5} = 0.0028$
$p_{s_4} = 0.2424$ $\quad p_{\alpha_6} = 0.0028$
$p_{\alpha_1} = 0.0105$ $\quad p_{\alpha_7} = 0.0076$
$p_{\alpha_2} = 0.0105$



Slika 3.

Na slikama 3, 4 i 5 prikazani su rezultati optimizacije geodetskog četvorougla po metodi kanonskog, direktnog i simpleks rešenja.

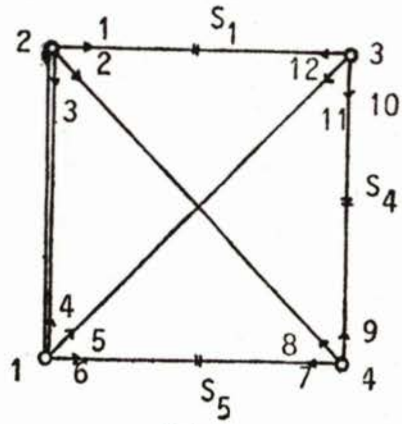
Efektivna (aposteriori) korelaciona matrica $Q_x = \underline{A}^T \underline{P}_{opt} \underline{A}$ je oblika

$$Q_x = \begin{bmatrix} 0.9112 & 0.0273 & 0.3254 & -0.1863 \\ 0.0273 & 1.0043 & 0.1863 & 0.2174 \\ 0.3254 & 0.1863 & 0.9112 & -0.273 \\ -0.1863 & 0.2174 & -0.0273 & 1.0043 \end{bmatrix}$$

te se može konstatovati njeno nepoklapanje sa unapred usvojenom $\underline{Q}_x = \underline{Q}_{TK}$.

U slučaju korišćenja direktnog rešenja u mrežu su planirana 5 linearnih merenja, merenja 12 pravaca podeljenih u 4 grupe. Dobijeni rezultati prikazani su na slici 4.

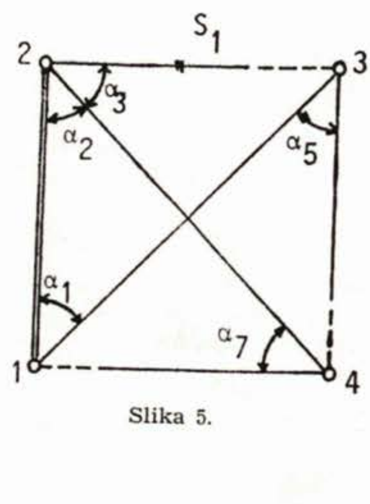
$p_{s_1} = 0.7936$
$p_{s_4} = 0.1943$
$p_{s_5} = 0.7936$
$p_{GR \cdot 1} = 0.004018$
$p_{GR \cdot 2} = 0.004018$
$p_{GR \cdot 3} = 0.002279$
$p_{GR \cdot 4} = 0.002279$



Slika 4.

Na slici 5. prikazani su rezultati optimizacije sa korišćenjem $\underline{Q}_x = \underline{Q}_{TK}$ i primnom simpleks metode rešavanja sistema jednačina oblika (3)

$p_{s_1} = 1.2$
$p\alpha_1 = 0.0016$
$p\alpha_2 = 0.0099$
$p\alpha_3 = 0.0033$
$p\alpha_5 = 0.0016$
$p\alpha_7 = 0.0132$



Slika 5.

Ukoliko se usporede ovi rezultati sa $\underline{Q}_x = \underline{Q}_{TK}$ sa rezultatima dobijenim optimizacijom istih primera sa $\underline{Q}_x = E$ (objavljeni u [8]) može se konstatovati da su geometrije optimalnih mreža u ovom slučaju veće pouzdanosti. To se može zaključiti na osnovu toga što se u optimalnim planovima opažanja nalazi veći broj prekobrojnih merenja koji doprinose povećanju pouzdanosti dobijenih rezultata.

5. ZAKLJUČAK

Metode određivanja optimalnih opažanja koje su obrađene u ovom članku naišle su na najširu primenu u geodetskoj praksi kada se radi o rešavanju problema po drugoj strategiji. Iako je na modeliranju i modifikovanju ovih metoda radilo mnogo geodeta u zadnjih nekoliko godina glavni nedostaci im ipak nisu otklonjeni. Ti nedostaci se pre svega ogledaju u mogućnosti pojavljivanja negativnih težina u optimalnom rasporedu tačnosti merenja. Drugi veliki nedostatak je taj što se u numerički proces preko $\underline{Q}_x = \underline{E}$ ili $\underline{Q}_x = \underline{Q}_{TK}$ uvode neaproksimativne vrednosti korelacionih matrica koje dovode do njihovog nepoklapanja sa aposteriornim (efektivnim) rasporedom tačnosti u mreži. Ukoliko se primenjuje simpleks metoda optimizacije kod većih mreža do rešenja problema se dolazi posle velikog broja iteracija. Obzirom da mnoge geodete i dalje veoma intenzivno rade na rešavanju ovih problema može se očekivati da će ovi nedostaci metoda biti otklonjeni i da će se dobiti nove metode veće praktične vrednosti.

6. LITERATURA

[1] Alberda, J. E.: A Rewiew of Analysis Techniques for Engineering Survey Control Schemes, Industrial and Engineering Survey Conference, London, 1980.

[2] Banov, B.: Optimisation of the Weights of Observations of Geodetic Networks FIG-Symposium, Varna Bulgaria, 1980.

[3] Grafarend, E.: Optimierung Geodätischer Messoperationen, Herbert Wichmann, Karlsruhe 1979.

[4] Mihailović, K.: Geodezija II, I i II deo, Građevinska knjiga, Beograd.

[5] Ninkov, T.: Optimizacija radova u geodetskim mrežama primenom nelinearnog programiranja, Magistarski rad, Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu.

[6] Ninkov, T.: Globalni kriteriji tačnosti geodetskih mreža kao moguće cilj funkcije kod matematičke optimizacije projektovanja II reda, Geodetski list 1981, 1—3, 15—19.

[7] Ninkov, T.: Global Accuracy Criteria of Geodetic Networks, VIII International Kurs für Ingenieurvermessung, Zürich, 1980.

[8] Ninkov, T.: Neka iskustva sa primenom optimizacije u geodeziji, Geogetski list 1982, 1—3, 19—23.

[9] Ninkov, T.: Matematička optimizacija projektovanja geodetskih mreža, Doktorska disertacija, Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu 1982.

[10] Schimitt, G.: Zur Numeric des Designs zweiter Ordnung, Habilitationsschrift DGK, Reihe C, Heft Nr. 256, München, 1979.

REZIME

U radu se obrađuje mogućnost određivanja aproksimativne vrednosti svih elemenata korelacione matrice nepoznatih u tek projektovanim mrežama. Primenjujući tako dobijene korelacione matrice (matrice sa TAYLOR-KARMAN-ovom strukturom, GRAFAREND [3]) kod određivanja optimalnog plana opažanja u mrežama do rešenja se može doći sa nekom od metoda navedenim u [8].

ZUSAMMENFASSUNG

Dieser Artikel erläuter die Möglichkeiten zur a priori-Bestimmung der Koeffizienten einer Varianz-Kovarianzmatrix der unbekannten Koordinaten in trigonometrischen Netzen. Eine solche Idealmatrix, zum Beispiel mit Taylor--Karman-Struktur, kann als Kriteriummatrix bei der Optimierung geodätischer Netze auf verschiedenen Lösungswegen eingeführt werden.

Primljeno: 1983—01—17