

UDK 522.2.089.6
Originalni znanstveni rad

OPTIMALNA DEKLINACIJA ZVIJEZDA KOD ODREĐIVANJA RAZMAKA KONACA U VIDNOM POLJU DURBINA*

Nikola SOLARIĆ — Zagreb**

1. UVOD

Vrijednost razmaka konaca obično se određuje iz razlike vremena prolaza slike zvijezde preko odgovarajućih konaca u vidnom polju durbina. Za takova mjerenja povoljno je, ako je deklinacija zvijezde pomoću koje se izvodi mjerenje što veća***, jer se tada postiže veća točnost jednog mjerenja. Nezgodno je, što su takve zvijezde veoma »spore« i potroši se puno vremena dok slika zvijezde prođe kroz vidno polje. Uzme li se zvijezda s manjom deklinacijom postiže se manja točnost jednog mjerenja, ali zvijezda prođe brže, te možemo izopažati više takvih zvijezda. Zbog tog, ako se prikladno izabere neka manja deklinacija (optimalna), moguće je upravo s njom postići neku unaprijed zadanu točnost aritmetičke sredine vrijednosti razmaka konaca uz minimalni utrošak vremena.

Cinger [2] navodi da su najpovoljnije zvijezde za određivanje razmaka konaca s deklinacijom od 50° do 70°. Blaško [1], međutim piše da se u tu svrhu opažaju zvijezde s deklinacijom 70° do 85°. Budući da se te dvije tvrdnje ne slažu, odlučeno je da se ispita i nađe optimalna deklinacija, zvijezda za određivanje razmaka konaca u vidnom polju durbina.

2. OPTIMALNA DEKLINACIJA

Da bi izračunali optimalnu deklinaciju možemo poći od formule za računanje razmaka konaca u vidnom polju durbina (v. [2], s 30):

$$f_1 = \Delta t_1 \cdot \cos \delta.$$

* U ovom radu objavljuju se rezultati istraživanja što ih je financirala Samoupravna interesna zajednica za znanstveni rad (SIZ III), a koja su izvođena u okviru projekta »Temeljna istraživanja na području geodezije« i projekta »Prostorno uređenje i zaštita čovjekove okoline«.

** Adresa autora: Prof dr Nikola Solarić, Geodetski fakultet Zagreb, Kačićeva 26.

*** pod pretpostavkom da je durbin za vrijeme opažanja nepomičan.

Ovdje je:

f_1 — razmak konaca,

Δt_1 — interval vremena koji je potreban da slika zvijezde prođe između dva odgovarajuća konca,

δ — deklinacija zvijezde.

Ova formula je približna, ali dovoljno točna za ovo razmatranje.

Srednja pogreška m_{f_1} jednog određivanja razmaka konaca zbog pogreške u određivanju intervala vremena Δt_1 je:

$$m_{f_1} = m_{\Delta t_1} \cdot \cos \delta, \quad (1)$$

gdje je:

$m_{\Delta t_1}$ — srednja pogreška od Δt_1

Da bi izveli funkcionalnu zavisnost između $m_{\Delta t_1}$ i deklinacije zvijezde podimo od jednadžbe srednje pogreške određivanja vremena prolaza slike zvijezde preko konaca, dane kod Tretjakova [5], koja glasi:

$$\varepsilon_t = \pm \sqrt{e^2 + \frac{\varepsilon^2}{V^2}}.$$

Ovdje je:

e — konstanta koja ovisi o metodi opažanja i od opažača,

ε — srednja pogreška kojom se vizira na mirni predmet, ($\varepsilon = \frac{2,0^*}{W}$ gdje je W povećanje durbin),

$V = \cos \delta \cdot \sin q$, gdje je q kut pod kojim pravac kretanja, zvijezde presjeca konac.

Budući da je kod opažanja za određivanje razmaka konaca $q = 90^\circ$, bit će:

$$\varepsilon_t = \pm \sqrt{e^2 + \frac{\varepsilon^2}{\cos^2 \delta}}. \quad (2)$$

Određivanje intervala vremena između prolaza zvijezde preko dva odgovarajuća konca pogrešno je zbog pogreške određivanja trenutaka prolaza zvijezde preko konaca i zato što se durbin za vrijeme opažanja sam od sebe malo pomakne. Srednja pogreška određivanja intervala vremena između srednjeg i krajnjeg konca u vidnom polju $m_{\Delta t}$, prema tome bit će:

$$m_{\Delta t} = \pm \sqrt{2 \left(e^2 + \frac{\varepsilon^2}{\cos^2 \delta} \right) + (\Delta t_1 \cdot \Delta t)^2}.$$

Ovdje je:

Δt_1 pogreška u određivanju Δt_1 zato što se je durbin pomakao u jedinici vremena za kut Δf (komponenta okomita na konce). Veličinu Δt_1 može se izračunati prema formuli:

* Zbog treperenja slike zvijezde po pravcu (koje nastaje zbog turbulencije u atmosferi) obično se uzima $\varepsilon = 3,0/W$.

$$\Delta t_1 = \frac{\Delta f}{\cos \delta}.$$

Δt . . . vrijeme potrebno da slika zvijezde prođe od srednjeg do krajnjeg konca u vidnom polju durbina, a može se izračunati po formuli:

$$\Delta t = \frac{f}{\cos \delta}. \quad (2a)$$

f . . . razmak između srednjeg i krajnjih konca u vidnom polju durbina.

Δf . . . pomak durbina u jedinici vremena (komponenta okomita na konce). Iz naprijed izvedenog slijedi da je:

$$m_{\Delta t} = \pm \sqrt{2 \left[e^2 + \frac{\varepsilon^2}{\cos^2 \delta} + \frac{\Delta f^2 \cdot f^2}{2 \cdot \cos^4 \delta} \right]},$$

odnosno

$$m_{r_1} = \pm \sqrt{2 \left[e^2 \cdot \cos^2 \delta + \varepsilon^2 + \frac{\Delta f^2 \cdot f^2}{2 \cdot \cos^2 \delta} \right]}. \quad (3)$$

Budući da za vrijednost razmaka konca uzimamo aritmetičku sredinu iz svih mjerenja, to je srednja pogreška aritmetičke sredine m_r jednaka:

$$m_r = \pm \frac{m_{r_1}}{\sqrt{n}}. \quad (4)$$

Ovdje je:

n . . . broj mjerenja.

Sada treba n dovesti u vezu s vremenom utrošenim na opažanje i računanje, a to možemo postići slijedećom relacijom:

$$n = \frac{T}{2 \cdot \Delta t + a_1 + a_2 p_2}, \quad (5)$$

gdje je:

- T ukupno utrošeno vrijeme na opažanje i računanje,
- a_1 prosječan interval vremena između opažanja dvije zvijezde,
- a_2 vrijeme potrebno za računanje jednog mjerenja. Budući da se može računati i za oblačnog vremena, a opažati samo za vedrog vremena, to se može za Δt i a_1 uzeti težina 1, a za a_2 težinu $p_2 \leq 1$ što ovisi od toga koliku težinu dajemo ovom vremenu u odnosu na vrijeme opažanja. Težinu p_2 može se na primjer odrediti kao odnos vedrih noći u nekom intervalu vremena ΔT prema ukupnom broju noći u istom intervalu vremena ΔT^* . Za određivanje težine može se primijeniti i neki drugi kriterij, ako za to postoje razlozi.

* $p_2 = \frac{\text{broj vedrih noći u nekom intervalu vremena}}{\text{ukupan broj noći u intervalu vremena}}$

Uvrštavanjem jednadžbe (2a) u (5) dobije se da je:

$$n = \frac{T \cdot \cos \delta}{2 \cdot f + a \cdot \cos \delta}, \quad (6)$$

gdje je: $a = a_1 + a_2 \cdot p_2$.

Ako jednadžbu (6) uvrstimo u (4), kvadriramo i prebacimo T na lijevu stranu, dobivamo:

$$T = \frac{m_f^2 (2 \cdot f + a \cdot \cos \delta)}{m_f^2 \cdot \cos \delta}. \quad (7)$$

Ako jednadžbu (3) uvrstimo u (7) bit će:

$$T = \frac{4 \cdot \varepsilon^2 \cdot f}{m_f^2} \cdot \frac{1}{\cos \delta} + \frac{4 \cdot e^2 \cdot f}{m_f^2} \cdot \cos \delta + \frac{2 \Delta f^2 \cdot f^3}{m_f^2} \cdot \frac{1}{\cos^3 \delta} + \frac{2 \cdot \varepsilon^2 \cdot a}{m_f^2} + \\ + \frac{2 \cdot e^2 \cdot a}{m_f^2} \cdot \cos^2 \delta + \frac{\Delta f^2 \cdot f^2 \cdot a}{m_f^2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \delta}. \quad (8)$$

Optimalnu deklinaciju dobit ćemo tako da odredimo za koju je deklinaciju T minimalno.

Ako jednadžbu (8) deriviramo, izjednačimo s nulom, i sredimo, dobivamo slijedeću jednadžbu:

$$-2 \cdot e^2 \cdot a \cdot \cos^5 \delta - 2 \cdot e^2 \cdot f \cdot \cos^4 \delta + 2 \cdot \varepsilon^2 \cdot f \cdot \cos^2 \delta + \\ + \Delta f^2 \cdot f^2 \cdot a \cdot \cos \delta + 3 \Delta f^2 \cdot f^3 = 0. \quad (9)$$

Jednadžbu (9) ne možemo riješiti egzaktno po $\cos \delta$, nego moramo pristupiti numeričkom rješavanju.

Primjer: Treba izračunati najpovoljniju deklinaciju zvijezda za određivanje razmaka konaca u vidnom polju na univerzalnom instrumentu Wild T4:

$\varepsilon = 0^{\circ}043$ odgovara povećanju 70 puta.

$e = 0^{\circ}07$ za registraciju vremena pomoću kronografa prema Niethammeru [4].

$\Delta f = 0,0022$ [vrem. sek./vrem. minuta]odgovara pomaku durbina od približno $1''$ za pola sata*.

$f = 25^s$ za univerzalni instrument Wild T4.

$a = 30^m$; ($a_1 = 10^m$, $a_2 = 20^m$, $p_2 = 1$). U diplomskom radu Nikole Bogdanovića »Određivanje razmaka konaca u vidnom polju durbina univerzalnog instrumenta Wild T4« srednji razmak vremena između opažanja dviju zvijezda bio je 9^m6 a za računanje po zvijezdi trošeno je 38^m9 . Pri tom je korišten kronograf s iglama i mehanički računski stroj. Budući da se danas upotrebljavaju obično štampajući kronografi i mala džepna elektronička računala za a_2 uzeto je 20^m .

Ako te vrijednosti uvrstimo u jednadžbu (9) dobivamo slijedeću jednadžbu:

* Pomak durbina za vrijeme opažanja ovisi od konstrukcije instrumenta, pažljivosti pri opažanju, promjeni temperature i drugim uzrocima.

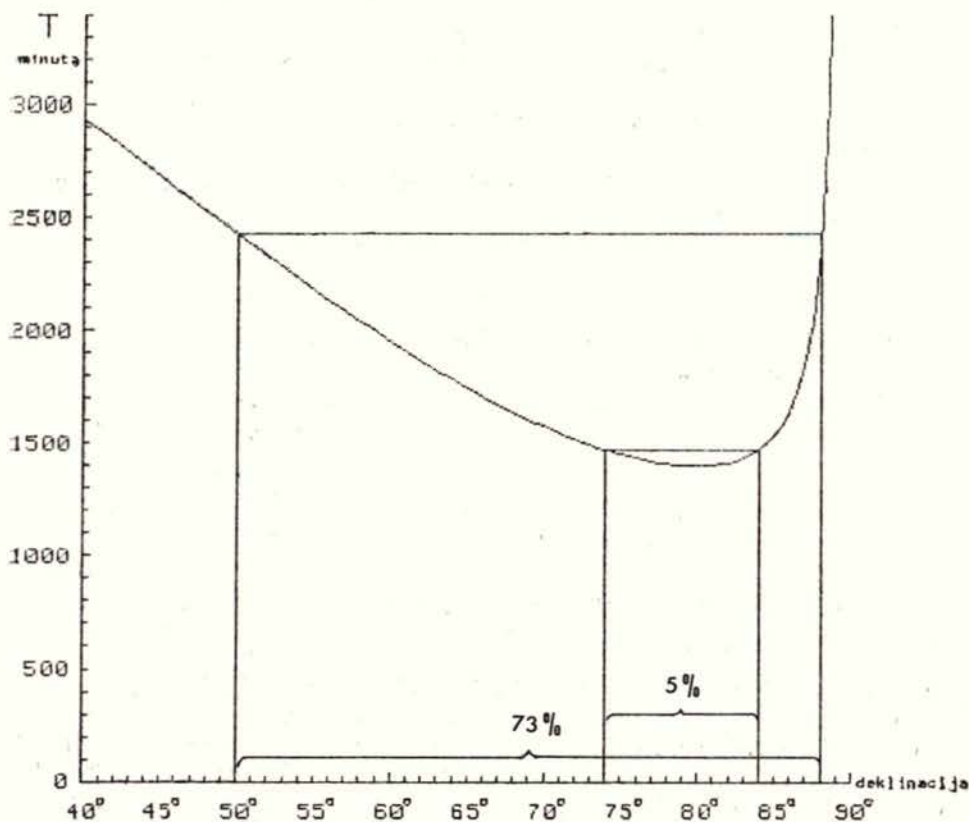
$$- 17,6400 \cos^5 \delta - 0,2450 \cos^4 \delta + 0,0000 \cos^3 \delta + 0,0924 \cos^2 \delta + 0,0015 \cos \delta + 0,0001 = 0 \quad (10)$$

Numeričkim rješavanjem ove jednačbe vidi na primjer Marković [3]), na stolnom elektroničkom računalo Hewlett Packard HP 9845A dobiveno je da ovu jednačbu zadovoljava deklinacija zvijezde

$$\delta = 79^{\circ},9 \pm \text{cca } 1^{\circ} **.$$

Osim ovog rješenja postoje još četiri rješenja s negativnim $\cos \delta$ koja ne dolaze u obzir jer zvijezda s deklinacijom većom od 90° nema.

Da funkcija (8) ima zaista minimum za $\delta = 79^{\circ},9$ vidi se po tom što je njena druga derivacija pozitivna. Osim toga vidi se to i iz grafičkog prikaza na dijagramu (sl. 1).



Sl. 1. Dijagram ukupnog utrošenog vremena na opažanje i računanje u zavisnosti od deklinacije

** Uzeto je za $\varepsilon = 0^{\circ}43 \pm 0^{\circ}005$, $e = 0^{\circ}07 \pm 0^{\circ}01$, $\Delta f = (0,0022 \pm 0,001) \cdot$
 \cdot [vrem. sek./vrem. min.], $a = 30^m \pm 10^m$.

Ukupno utrošeno vrijeme na opažanje i računanje T u ovom dijagramu i u tablici 1 dobiveno je pomoću jednadžbe (8). Pri računanju u jednadžbi (8) uzeto je da se želi odrediti vrijednost razmaka konaca s točnošću $\pm 0,01$ a za ϵ , e , f i Δ_f uzete su već prije navedene veličine s kojima smo računali optimalnu deklinaciju zvijezda.

U trećem stupcu tablice 1 izraženo je u postocima koliko se više vremena troši na opažanje i računanje sa zvijezdama deklinacije δ nego sa zvijezdama optimalne deklinacije. Iz tih postotaka vidi se da je veoma važno da se kod izbora zvijezda za opažanje izaberu zvijezde s optimalnom deklinacijom, jer se na primjer sa zvijezdama deklinacije 50° troši 73% više vremena nego sa zvijezdama optimalne deklinacije.

Tablica 1

δ	T	%
88°	$2371^m = 39^h5$	69%
87°	$1851^m = 30^h8$	32%
86°	$1644^m = 27^h4$	17%
85°	$1536^m = 25^h6$	10%
84°	$1474^m = 24^h6$	5%
80°	$1399^m = 23^h3$	0%
74°	$1470^m = 24^h5$	5%
70°	$1574^m = 26^h2$	12%
65°	$1473^m = 29^h0$	25%
60°	$1948^m = 32^h5$	39%
55°	$2178^m = 36^h3$	56%
50°	$2425^m = 40^h4$	73%

Iz histograma na sl. 2 vidi se da u katalogu FK4 (odnosno u Apparent Places of Fundamental Stars 1979) ima samo 7 zvijezda s optimalnom deklinacijom od $80^\circ \pm$ cca 1° (tj od 79° do 81°). Ukoliko se zadovolji 5% većim utroškom vremena na opažanje i računanje nego se to postiže sa zvijezdama optimalne deklinacije onda se izbor širi na zvijezde s deklinacijom od 74° do 84° .

Nadalje, iz histograma se vidi da u katalogu FK4 ima samo 49 zvijezda (odnosno tokom jednog dana 98 prolaza u gornjoj i donjoj kulminaciji*) s deklinacijom između 74° i 84° . Od tih zvijezda može se izabrati za određivanje razmaka konaca približno samo 70%. Ostale zvijezde otpadaju jer im je razlika u rektascenziji suviše mala tako da je razlika vremena između prolaza kroz meridijan između zvijezda manja od vremena potrebnog da zvijezda prođe kroz vidno polje i da se instrument namjesti za opažanje slijedeće zvijezde. To znači da se za određivanje razmaka konaca može izabrati u

* Na geografskim širinama većim od približno 45° zvijezde s deklinacijom većom od 74° mogu se opažati u gornjoj i donjoj kulminaciji, jer su dovoljno visoko nad horizontom.

jednom danu samo približno 69 prolaza zvijezda u gornjoj i donjoj kulminaciji s optimalnom deklinacijom. Prema tome vrijeme koje protekne između prolaza dviju susjednih izabranih zvijezda kroz meridijan iznosi u prosjeku 21^m** . Znači, proteklo bi puno vremena između opažanja pojedinih zvijezda koje ne bi bilo iskorišteno. Zbog tog će se morati pri izboru zvijezda intervali vremena između opažanja zvijezda s optimalnom deklinacijom od 74° do 84° popuniti opažanjem manje povoljnih zvijezda koje imaju deklinaciju manju od 74° i malo veću od 84°. Pri tom će se nastojati da je deklinacija što bliža optimalnoj deklinaciji.

Da bi odredili do koje će se minimalne i maksimalne deklinacije zvijezda morati ići i izabrati ih za opažanje, napraviti ćemo slijedeću analizu. U tablici 2 pretpostavljeno je da će se moći izabrati za opažanje približno

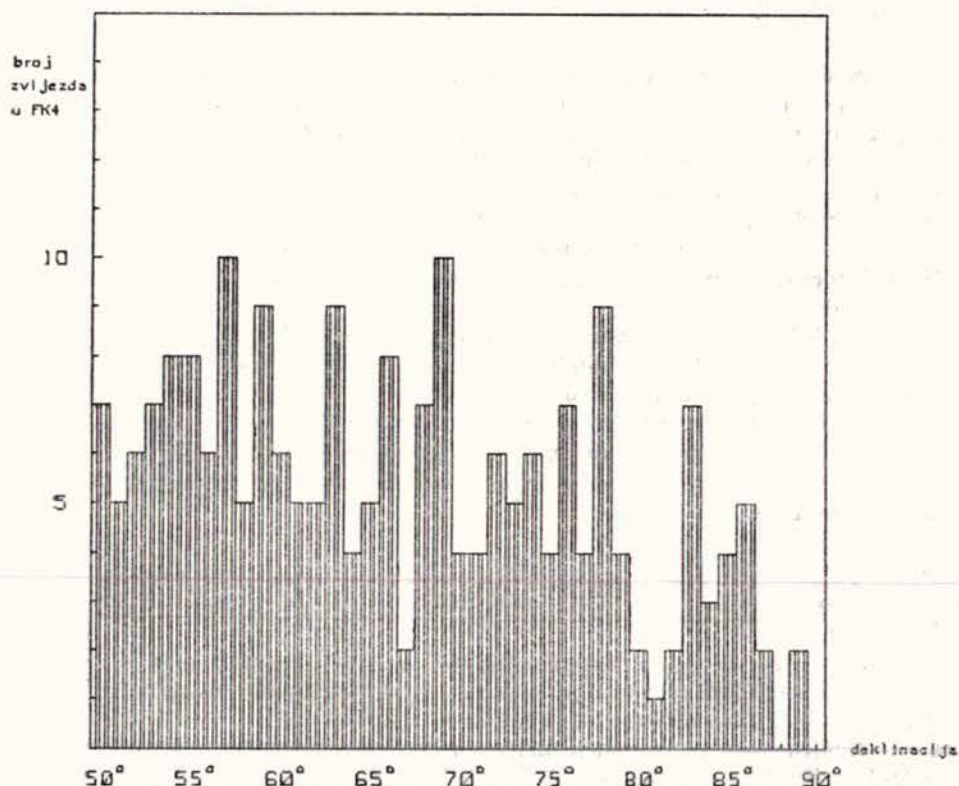
Tablica 2

Deklinacija	A	50°—54°	55°—59°	60°—64°	65°—69°	70°—74°	75°—79°	80°—86°	Ukupno
Broj zvijezda u FK4 za opažanje u gornjoj kulminaciji	B	33	38	29	32	25	28	24	
Broj zvijezda u FK4 za opažanje u donjoj kulminaciji	C	0	0	0	0	0	28	24	
Broj prolaza u gornjoj i donjoj kulminaciji zvijezda iz FK4 tijekom jednog dana	D	33	38	29	32	25	56	48	
Postotak koliko se posto zvijezda može izabrati za opažanje	E	50%	50%	50%	50%	50%	70%	70%	
Broj prolaza u gornjoj i donjoj kulminaciji zvijezda iz FK4 tijekom jednog dana, koje se mogu izabrati za opažanje $\frac{D \cdot E}{100}$	F	16	19	14	16	12	39	34	150

50% zvijezda iz kataloga FK4 s deklinacijom od 50° do 74° i 70% zvijezda deklinacije od 74° do 86° u gornjoj i donjoj kulminaciji. Prema tome moći će se izabrati u jednom danu ukupno oko 150 prolaza zvijezda u gornjoj i

** $\frac{24 \times 60^m}{69 \text{ zvijezde}} = 21 \text{ minuta/zvijezda.}$

donjoj kulminaciji. Srednji razmak između vremena prolaza kroz meridijan dviju susjednih izabranih zvijezda iznosit će približno 10^m , što uglavnom zadovoljava. Iz tog se može izvući zaključak da će se intervali vremena između zvijezda se deklinacijom od 74° do 84° morati popunjavati sa zvijezdama koje imaju manju deklinaciju od 74° odnosno veću od približno 50° . Što se tiče gornje granice u deklinaciji pri izboru zvijezda, prema ukupnom utrošenom vremenu za opažanje i računanje (vidi sl. 1), ona bi se mogla povećati na 88° , ali iz histograma (sl. 2) vidi se da ima malo zvijezda s deklinacijom većom od 86° , a osim toga ukoliko se durbina za opažanja malo pomakne odmah to ima



Sl. 2. Histogram broja zvijezda (u zavisnosti od deklinacije)

veliki utjecaj na određivanje razmaka konaca u vidnom polju durbina. Zato bi se za gornju granicu deklinacije pri izboru zvijezda moglo prihvatiti 86° . Ukoliko bi se upotrijebio katalog zvijezda veći od FK4, donja granica u deklinaciji od 50° mogla bi biti povećana, a gornja granica od 86° smanjena.

Za univerzalni instrument Kern DKM3—A koji ima povećanje durbina 45 puta dobiveno je, da je optimalna deklinacija pri izboru zvijezda 78° . Prema tome i za opažanje Kernovim instrumentom može se prihvatiti približno gornja i donja granica u deklinaciji pri izboru zvijezda kao i kod Wilda T—4.

Da bi se zaista dobio optimalan izbor zvijezda trebalo bi napraviti program za elektroničko računalo pomoću kojeg bi se izvršilo izbor. Elektroničko računalo bi za puno različitih kombinacija ispitalo koliko se vremena troši s pojedinom od njih i ispisalo onu kombinaciju zvijezda s kojom bi se potrošilo najmanje vremena na opažanje i računanje razmaka konaca u vidnom polju durbina. Takav program za elektroničko računalo nije napravljen, jer se određivanje razmaka konaca veoma rijetko obavlja te se može zadovoljiti »ručno« napravljenim izborom zvijezda.

3. ZAKLJUČAK

Pomoću jednadžbe (9) i analizom podataka u tablici 1 došlo se je do zaključka da je za određivanje razmaka konaca na univerzalnom instrumentu Wild T4 najpovoljnije kad se za opažanje izaberu zvijezde s deklinacijom u intervalu od 74° do 84° . Veoma je mali broj zvijezda u katalogu FK4 s tako velikim deklinacijama. Zbog tog bi intervali vremena između opažanja pojedinih zvijezda bili suviše veliki i neiskorišteni. Pri izboru morat će se ove intervale vremena popuniti manje povoljnim zvijezdama koje imaju deklinaciju u intervalu između 50° i 74° i u intervalu od 84° do 86° , a pri tom će se nastojati da je ona što bliža optimalnoj deklinaciji između 74° i 84° . U novom katalogu FK5 gdje će biti veći broj zvijezda nego u FK4 moći će se naći veći broj zvijezda s optimalnom deklinacijom te će donja granica od 50° moći biti povećana, a gornja granica od 86° smanjena.

Za univerzalni instrument Kern DKM3—A dobivena je optimalna deklinacija od 78° . Prema tome i za opažanje Kernovim instrumentom može se prihvatiti približno gornja i donja granica u deklinaciji pri izboru zvijezda kao i kod Wilda T—4.

LITERATURA:

- [1] S. N. Blažko: Praktična astronomija (prijevod) — Beograd 1952. god. s. 213.
- [2] N. J. Cinger: Kurs astronomije — praktični dio (prijevod), Beograd 1928, s. 115.
- [3] Ž. Marković: Uvod u višu analizu I, Zagreb 1945.
- [4] Th. Niethammer: Die genauen Methoden der astr.-geogr. Ortsbestimmung, Basel 1974, s. 46.
- [5] V. Tretjakov: Praktična astronomija, Beograd 1933, s. 75.

SAŽETAK

Neki autori navode da su najpovoljnije zvijezde za određivanje razmaka konaca s deklinacijom 50° do 70° a drugi 70° do 85° . Budući da se ti navodi ne slažu odlučeno je da se ispita i nađe optimalna deklinacija za određivanje razmaka konaca. Izvedena je jednadžba (9) po kojoj se može u općem slučaju izračunati optimalna deklinacija. Analizom je pronađeno za Wild T4 da je optimalna deklinacija 80° . Ukoliko se zadovolji s 5% većim utroškom vremena

na opažanje i računanje nego se to postiže sa zvijezdama optimalne deklinacije onda se izbor širi na zvijezde s deklinacijom od 74° do 84° . Najčešće nije dovoljno niti ovo proširenje ukoliko se izabiru zvijezde iz FK4 te se mora izabrati i zvijezde s deklinacijom manjom od 74° i malo većom od 84° .

Za univerzalni instrument Kern DKM3—A dobivena je optimalna deklinacija od 78° . Prema tome i za opažanje Kernovim instrumentom može se prihvatiti približno gornja i donja granica u deklinaciji pri izboru zvijezda kao i kod Wilda T4.

ABSTRACT

The most convenient positions of the stars to be used to determine thread intervals in the field of view of a telescope have declinations from 50° to 70° by some authors and from 70° to 85° by others. To decide the true optimal values it was found the equation (9) by which can be calculated the optimal declinations.

For the instrument Wild T4 it was found that the optimal declination of observing stars is 80° . If we can spend 5% more time on observations and calculations than in optimal case, then we can use also the stars with declinations from 74° to 84° . If we use the stars from FK4 catalogue then we need to expand the interval from less than 74° to more than 84° . For universal instrument Kern DKM3—A the optimal declination is 78° and in this case we can also use the upper and lower declinations limit as in case with the instrument Wild T4.

Primljeno: 1982-09-30