UDK 528.33:528.181
Pregledni rad

IZRAVNANJE MREŽA PARTICIJOM MATRICA

*Ivan MOLNAR — Novi Sad**

1. UVOD

Određivanje koordinata tačaka mreža, celishodno je vršiti primenom izravnanja po metodi posrednih merenja. Ovakav izbor metode izravnanja opredeljuju dva činioca. Prvo, izravnanje koordinata tačaka po metodi posrednih merenja je veoma pogodno za matematičku obradu podataka merenja na računskim mašinama, i drugo, ovim načinom računanja se znatno lakše vrši ocena tačnosti merenih i izravnatih rezultata, nego što je to slučaj pri izravnanju po metodi uslovnih merenja.

Pri izravnanju većih, državnih ili kontinentalnih mreža, najveću brigu zadaje rešavanje sistema normalnih jednačina. Ovaj problem se može prevazići i razbijanjem matrice koeficijenata normalnih jednačina u podmatrice, odnosno particijom (razdeobom) matrice koeficijenata normalnih jednačina u submatrice [1]. Postupak dekompozicija matrica se veoma efikasno može koristiti i pri izravnanju mreža manjih razmera. Prednost tog postupka se ogleda u okolnosti, što se rešavanje normalnih jednačina može izvršiti, bez korišćenja većih računskih sistema, i pomoću računskih mašina manjeg kapaciteta. Pored toga, posle ponovnih merenja, koja se u mrežama ponekad naknadno vrše, računanja se ne moraju u celosti ponoviti.

Od kada su se geodetske radne organizacije masovnije opremile savremenim elektronskim daljinomerima, pogušćavanje mreža u nas se vrši ne samo na osnovu uglovnih već, sve češće, i linearnih merenja. U ovom radu, razmotrit će se izravnanje mreža u kojima su merene uglovne i linearne veličine, dekompozicijom matrica na podmatrice.

2. IZRAVNANJE MREŽA U KOJIMA SU MERENE UGLOVNE I LINEARNE VELIČINE PARTICIJOM MATRICA

Prvi korak pri izravnanju po metodi posrednih merenja je određivanje približnih vrednosti nepoznatih. Nepoznate su koordinate tačaka u ravnini i orijentacioni uglovi, svih onih stanica sa kojih su opažani pravci. Približne

* Adresa autora: Dr Ivan Molnar dipl. inž., Tehnički fakultet OOUR za industrijsku gradnju Novi Sad, V. Vlahovića 3.

koordinate tačaka računamo iz neizravnatih rezultata merenja, primenom jednog od postupaka priključivanja tačaka (npr. u trig. obrascu br. 19). Za približne vrednosti orijentacionih uglova, u opštem slučaju, usvajamo srednje orijentacione uglove, dobijene približnim orjentisanjem pravaca na stanicama.

Zavisnost između rezultata merenja i nepoznatih obezbeđuju posredne jednačine, odnosno jednačine popravaka.

Za opaženi pravac, sa tačke i na tačku, j, jednačina popravaka glasi

$$v_{ij} = -z_i + \rho \frac{X_{jo} - X_{io}}{d_{ijo}^2}(y_j - y_i) - \rho \frac{Y_{jo} - Y_{io}}{d_{ijo}^2}(x_j - x_i) + \nu_{ijo} - L_{ij} - Z_{io} \tag{1}$$

dok jednačina popravaka za merenu dužinu između ovih tačaka poprima oblik

$$v_{ij} = \frac{Y_{jo} - Y_{io}}{d_{ijo}}(y_j - y_i) + \frac{X_{jo} - X_{io}}{d_{ijo}}(x_j - x_i) + d_{ijo} - D_{ij}. \tag{2}$$

Kad zbrojimo zadnja tri, odnosno dva, člana jednačina popravaka, dobijamo slobodni član f_{ij}.

U jednačinama popravaka korišćene su oznake:

Z_{io} — približne vrednosti orijentacionih uglova
Z_i — priraštaji orjentacionih uglova
ν_{ijo} — približne vrednosti direkcionih uglova
d_{ijo} — približne vrednosti dužina
Y_{io}, X_{io} — približne vrednosti koordinata
y_i, x_i — priraštaji koordinata
L_{ij} — opažane vrednosti pravaca
D_{ij} — merene vrednosti dužina
v_{ij} — popravke merenja

Ako za svaki opažani pravac i merenu dužinu postavimo jednačinu popravaka, tada ih zajednički, u matričnom obliku, možemo napisati na sledeći način

$$\underset{(n,1)}{v} = \underset{(n,m)}{A}\ \underset{(m,1)}{x} + \underset{(n,1)}{f} \qquad n > m \tag{3}$$

gde su

v — vektor popravaka,
x — vektor priraštaja nepoznatih,
f — vektor slobodnih članova, i
A — matrica koeficijenta jednačina popravaka.

Broj vrsta matrica A slaže se sa brojem merenja n, tj. sa zbirom svih opažanih pravaca i merenih dužina. Broj kolona matrica A slaže se sa brojem nepoznatih m, tj. sa zbirom svih orijentacionih uglova i koordinata tačaka.

Sledi obrazovanje normalnih jednačina, na poznati način

$$\underset{(m,\,m)}{(A^T p A)}\ \underset{(m,\,1)}{x} + \underset{(m,\,1)}{A^T p f} = \underset{(m,\,1)}{0} \tag{4}$$

Uvođenjem uobičajenih oznaka $N = A^T{}_p A$ i $n = A^T{}_p f$ normalne jednačine glase

$$\underset{(m,m)}{N}\ \underset{(m,\,1)}{x} + \underset{(m,\,1)}{n} = \underset{(m,\,1)}{0} \tag{4a}$$

Ako u mreži ne postoji data (prethodno određena) tačka, matrica N je u načelu singularna

$$\det(N) = 0 \tag{5}$$

Ovakva mreža se može, u proizvoljnoj mjeri, rotirati i translatorno pomerati.

Meru singularnosti odražava defekt mreže, koji se definiše razlikom reda i ranga matrice normalnih jednačina.

$$d = m - \text{rang}(N) \tag{6}$$

Defekt mreže zavisi od karakteristika mreža i identičan je broju stepeni slobode. Defekt mreža u kojima su merene uglovne i linearne veličine je tri.

Pri određivanju nepoznatih možemo postupiti dvojako. Prvi način je izravnanjem slobodne, a drugi, izravnanjem neslobodne mreže, tj. fiksiranjem početne tačke mreže.

Ukoliko nepoznate računamo postupkom izravnanja slobodnih mreža, tada se određuju priraštaji svih nepoznatih. U tom slučaju, zadatak možemo rešiti uvođenjem tzv. funkcije cilja [2] [3].

U nastavku, će se razmotriti postupak računanja fiksiranjem početne tačke mreža. Naime, primenom ovog postupka, jasnije se može sagledati suština izravnanja mreža particijom matrica.

U postupku računanja fiksiranjem početne tačke mreže, neophodno je usloviti, defektu mreže, odgovarajući broj nepoznatih. Po pravilu, fiksira se početna tačka i jedan od pravaca. Neka je npr. fiksirana početna tačka mreže ($Y_1 = 0$, $X_1 = 0$) kao pravac y osovine ($X_2 = 0$). Priraštaje fiksiranih nepoznatih izostavljamo iz vektora nepoznatih x. Takođe, izostavljamo i, ovim priraštajima, odgovarajuće kolone matrice A. Shodno tome, jednačine popravaka su sada,

$$\underset{(n,\,1)}{\bar{v}} = \underset{(n,\,r)}{\bar{A}}\ \underset{(r,\,1)}{\bar{x}} + \underset{(n,\,1)}{\bar{f}} \tag{7}$$

gdje je $r = m - d = m - 3$.

Obzirom da je broj vrsta matrice A jednak zbiru opažanih pravaca i merenih dužina, a broj kolona jednak zbiru orijentacionih uglova i neuslovljenih koordinata, to je i particiju matrice A celishodno vršiti na taj način. U skladu su iznetim, matricu A dekomponovaćemo u četiri podmatrice

$$\underset{(n,\,r)}{A} = \begin{Vmatrix} \underset{(p,\,u)}{A_{11}} & \underset{(p,\,k)}{A_{12}} \\ \underset{(o,\,u)}{A_{21}} & \underset{(o,\,k)}{A_{22}} \end{Vmatrix} \quad \begin{matrix} p + o = n \\ u + k = r \end{matrix} \tag{8}$$

gde su

p — broj opažanih pravaca
o — broj merenih dužina
u — broj orjentacionih uglova
k — broj neuslovljenih koordinata

Kako merenim dužinama ne pripadaju orjentacioni uglovi, to je podmatrica $A_{21} = 0$.

Particija matrice A opredeljuje dekompoziciju vektora jednačina popravaka. Otuda se jednačine popravaka mogu pisati u sledećem obliku

$$\underset{(n,\,1)}{\bar{v}} = \begin{Vmatrix} \underset{(p,\,1)}{\bar{v}_1} \\ \underset{(o,\,1)}{\bar{v}_2} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \underset{(p,\,u)}{A_{11}} & \underset{(p,\,k)}{A_{21}} \\ 0 & \underset{(o,\,k)}{A_{22}} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \underset{(u,\,1)}{\bar{x}_1} \\ \underset{(k,\,1)}{\bar{x}_2} \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} \underset{(p,\,1)}{\bar{f}_1} \\ \underset{(o,\,1)}{\bar{f}_2} \end{Vmatrix} \tag{9}$$

Obzirom da težine odražavaju stepen poverenja u rezultate merenja, neophodno je, u nastavku, uspostaviti matricu težina, koja omogućuje adekvatno obrazovanje normalnih jednačina. Uspostavljanje odnosa težina sastoji se iz dva dela. Prvo, treba uskladiti međusobni odnos težina istorodnih merenja, i drugo, međusobni odnos težina raznorodnih merenja (opažanih pravaca i merenih dužina).

Ako merenje smatramo međusobno nezavisnim, tada matrica težina postaje dijagonalna matrica. Saobrazno particiji matrice A u podmatrice, dekomponujemo u blokove i matricu težina,

$$\underset{(n,\,n)}{p} = \begin{Vmatrix} \underset{(p,\,p)}{p_1} & \underset{(p,\,o)}{0} \\ \underset{(o,\,p)}{0} & \underset{(o,\,o)}{p_2} \end{Vmatrix} = < \underset{(p,\,p,)}{p_1} \quad \underset{(o,\,o)}{p_2} > \tag{10}$$

u kojoj podmatrica p_1 sadrži težine opažanih pravaca a p_2 težine merenih dužina.

Na osnovu (9) obrazujemo normalne jednačine, primenom uslova minimuma. Particijom sume kvadrata popravaka, uslov minimuma glasi

$$\bar{v}^T p\, \bar{v} = \bar{v}_1^T p_1 \bar{v}_1 + \bar{v}_2^T p_2 \bar{v}_2 = \min \tag{11}$$

Normalne jednačine imaju oblik

$$\underset{(r,\,r)}{N} \; \underset{(r,\,1)}{\bar{x}} \; \underset{(r,\,1)}{\bar{n}} = \underset{(r,\,1)}{0} \tag{12}$$

gde su

$$\underset{(r,\,r)}{N} = \begin{Vmatrix} \underset{(u,\,u)}{A_{11}^T p_1 A_{11}} & \underset{(u,\,k)}{A_{11}^T p_1 A_{12}} \\ \underset{(k,\,u)}{A_{12}^T p_1 A_{11}} & \underset{(k,\,k)}{A_{12}^T p_1 A_{12}} + \underset{(k,\,k)}{A_{22}^T p_2 A_{22}} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \underset{(u,\,u)}{N_{11}} & \underset{(u,\,k)}{N_{12}} \\ \underset{(k,\,u)}{N_{21}} & \underset{(k\,k)}{N_{22}} \end{Vmatrix} \tag{13}$$

$$\underset{(r,\,1)}{\bar{n}} = \begin{Vmatrix} \underset{(u,\,1)}{A_{11}^T p_1 \bar{f}_1} \\ \underset{(k,\,1)}{A_{12}^T p_1 \bar{f}_1} + \underset{(k,\,1)}{A_{22}^T p_2 \bar{f}_2} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \underset{(u,\,1)}{\bar{n}_1} \\ \underset{(k,\,1)}{\bar{n}_2} \end{Vmatrix} \tag{14}$$

Radi rešavanja normalnih jednačina, neophodno je invertovati matricu (13). Inverzna matrica N^{-1} će, kao što je poznato, biti kvadratna matrica reda r, kao što je i matrica N.

$$\underset{(r,\,r)}{N^{-1}} = \begin{Vmatrix} \underset{(u,\,u)}{\alpha_{11}} & \underset{(u,\,k)}{\alpha_{12}} \\ \underset{(k,\,u)}{\alpha_{21}} & \underset{(k,\,k)}{\alpha_{22}} \end{Vmatrix} \tag{15}$$

Podmatrice α_{11}, α_{12}, α_{21} i α_{22} se mogu odrediti na dva načina

$$\begin{aligned} \alpha_{22} &= (N_{22} - N_{21} N_{11}^{-1} N_{12})^{-1} \\ \alpha_{12} &= -N_{11}^{-1} N_{12}\, \alpha_{22} \\ \alpha_{21} &= -\alpha_{22} N_{21} N_{11} = \alpha_{12}^T \\ \alpha_{11} &= N_{11}^{-1} - \alpha_{12} N_{21} N_{11}^{-1} \end{aligned} \tag{16}$$

ili

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= (N_{11} - N_{12} N_{22}^{-1} N_{21})^{-1} \\ \alpha_{21} &= -N_{22}^{-1} N_{21}\, \alpha_{11} \\ \alpha_{12} &= -\alpha_{11} N_{12} N_{22}^{-1} = \alpha_{21}^T \\ \alpha_{22} &= N_{22}^{-1} - \alpha_{21} N_{12} N_{22}^{-1} \end{aligned} \tag{17}$$

Zavisnost (16) se celishodno koristi tada, kad se lako invertuje podmatrica N_{11}, a zavisnost (17), ukoliko je jednostavnije invertovanje podmatrice N_{22}. U našem slučaju inverznu matricu N^{-1} određujemo na osnovu (16), jer smo, napred pomenutom particijom matrica, ostvarili dijagonalnu strukturu podmatrice N_{11}.

Nakon izračunavanja inverzne matrice normalnih jednačina, određujemo priraštaje nepoznatih.

$$\underset{(r,\,1)}{\bar{x}} = \begin{Vmatrix} \underset{(u,\,1)}{\bar{x}_1} \\ \underset{(k,\,1)}{\bar{x}_2} \end{Vmatrix} = - \begin{Vmatrix} \underset{(u,\,u)}{\alpha_{11}} & \underset{(u,\,k)}{\alpha_{12}} \\ \underset{(k,\,u)}{\alpha_{21}} & \underset{(k,\,k)}{\alpha_{22}} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \underset{(u,\,1)}{n_1} \\ \underset{(k,\,1)}{n_2} \end{Vmatrix} \tag{18}$$

Slobodne članove samostalne mreže, koji se odnose na opažane pravce, računamo, na osnovu podataka približne orijentacije

$$\bar{f}_L = z_{io} - Z_{io}, \tag{19}$$

gde su

z_{io} — približni orjentacioni uglovi pojedinih pravaca
Z_{io} — približne vrednosti srednjeg orjentacionog ugla računatog na stanici.

Kako je, pri računanju ovih slobodnih članova, suma odstupanja od aritmetičke sredine nula, to je u (14), $n_1 = 0$*. Otuda proizlazi da, pri računanju nepoznatih, nije neophodno određivanje submatrica α_{11} i α_{21} jer je zapravo

$$\underset{(r,1)}{\bar{x}} = \begin{Vmatrix} \underset{(u,1)}{\bar{x}_1} \\ \underset{(k,1)}{\bar{x}_2} \end{Vmatrix} = - \begin{Vmatrix} \underset{(u,1)}{\alpha_{12}\bar{n}_2} \\ \underset{(k,1)}{\alpha_{22}\bar{n}_2} \end{Vmatrix} \tag{19a}$$

Kad saberemo priraštaje i odgovarajuće približne vrednosti, dobijamo izravnate vrednosti orijentacionih uglova, odnosno koordinata tačaka.

Popravke merenja računamo prema (9), a kontrolu izravnanja ostvarujemo na uobičajen način, tako što vršimo definitivnu orijentaciju tačaka.

U cilju izvršenja ocene tačnosti, iz izravnanja dobijamo varijanc-kovarijanc matricu nepoznatih.

$$\underset{(r,r)}{K} = \mu_0^2 \underset{(r,r)}{Q} = \mu_0^2 \underset{(r,r)}{N^{-1}} \tag{20}$$

gde su

$Q = (A^T p A)^{-1} = N^{-1}$ — matrica koeficijenata nepoznatih,
$\mu_0 = (n - r)^{-1} \bar{v}^T p \bar{v}$ — srednja greška jedinice težine.

Međutim, u praksi se najčešće određuje, samo, matrica koeficijenta težina koordinata, odnosno varijanc-kovarijanc matrica koordinata. U tom slučaju, neophodno je poznavanje, samo, submatrice α_{22}, određene prema (16).

Poznavanje podmatrice α_{22} dovoljno je i za određivanje svih nepoznanica. Najprije riješimo sistem

$$(N_{22} - N_{12}^T N_{11}^{-1} N_{12}) \bar{x}_2 = - \bar{n}_2,$$

pa dobijemo

$$\bar{x}_2 = - \alpha_{22} \bar{n}_2.$$

Sad lako izračunamo

$$\bar{x}_1 = - N_{11}^{-1} N_{12} \bar{x}_2$$

tim više što je matrica $N_{11}^{-1} N_{12}$ već prije izračunata.

---

* Uz pretpostavku da svi pravci na istom stajalištu imaju jednake težine.

3. ZAKLJUČAK

Izravnanje mreža particijom matrica, u odnosu na tradicionalni postupak, ima niz praktičnih prednosti. Pre svega, doprinosi jednostavnijem rešavanju sistema normalnih jednačina viših redova. Zatim, omogućuje uočavanje izvesnih zakonitosti u postupku izravnanja mreža u kojima su merene uglovne i linearne veličine po metodi posrednih merenja. Određivanje samostalnih mreža primenom particije matrica ostvaruje se brzo, očiglednim uprošćavanjem numeričkih izračunavanja.

Pojava sve češćeg korišćenja usluga većih računskih sistema, ne daje povoda da se izravnanje mreža, koje sadrže manji broj tačaka, vrši particijom matrice normalnih jednačina. Međutim, treba imati u vidu i takve okolnosti kada, u cilju hitnog rešavanja pojedinih zadataka, nema vremena da se koriste usluge većih računskih centara. Tada se zadaci veoma efikasno rešavaju particijom matrica, uz korišćenje džepnih računara.

LITERATURA:

[1] Andjelić, T.: Matrice, Beograd 1965.
[2] Grafarend, E.-Schafrin, B.: Unbiased free Net Adjustment, Survey Reviw, 1974/I.
[3] Molnar, I.: Izravnanje slobodnih geodetskih mreža, Geodetski list br. 4—6, str. 97—101, Zagreb 1980.

REZIME

U radu se daje prikaz izravnanja samostalnih mreža u kojima su merene uglovne i linearne veličine po metodi posrednih merenja, primenom particije matrice. Ovim postupkom je omogućeno da se nalaženje inverzne matrice normalnih jednačina višeg reda, svede na invertovanje matrica nižeg reda i, da se tako, značajnije uproste numerička izračunavanja.

ABSTRACT

This article gives a description of the indepedent networks adjutsments for wich angular and linear values are measured by method of indirect measuremens and using partitions of matrices. This procedure enables that definition of inverse matrix of higher order normal equations could be done by inversing the lower order matrix and by this to considerably simplify the numerical calculations.

Primljeno: 1982-11-23