UDK 514.123.1:519.242.5
Originalan znanstveni rad

PRILAGOĐAVANJE PRAVCA SKUPU TOČAKA PROSTORA

Damjan JOVIČIĆ, Miljenko LAPAINE, Svetozar PETROVIĆ — Zagreb*

UVOD

Za konačno mnogo točaka u ravnini, dobivenih mjerenjem neke kontinuirane pojave ili objekta, obično se želi rekonstruirati odgovarajuća krivulja koja prolazi kroz njih, odnosno, budući da su mjerenja uvijek opterećena pogreškama, što bliže zadanim točkama. Specijalno, ako je priroda problema takva (npr. točke su nastale mjerenjem nečega što »bi trebalo« biti pravac), tražimo pravac koji »najbolje« predstavlja (aproksimira) dane točke.

Najčešće se postupa ovako: točke $T_1, T_2, \ldots, T_n$ o kojima se radi prikažu se u nekom ravninskom kartezijevom koordinatnom sistemu kao (x_1, y_1), $(x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$, pa se traži onaj pravac $y = f(x) = ax + b$ za kojeg je suma kvadrata razlika ordinata

$$\sum (f(x_i) - y_i)^2 = \sum (ax_i + b - y_i)^2 \qquad i = 1, \cdots, n$$

najmanja. Ovaj uvjet vodi na sistem od dvije linearne jednadžbe s dvije nepoznanice koji znamo riješiti.

Isti zadatak postavlja se i kad se radi o točkama koje ne leže u ravnini nego u trodimenzionalnom prostoru — treba naći pravac koji »najbolje« predstavlja zadane točke. Direktno poopćenje malo prije opisane metode nije moguće. Kad bismo prikazali točke u nekom prostornom koordinatnom sistemu i postavili uvjet da suma kvadrata razlika aplikata bude minimalna, zadatak bi bio besmislen, u što se čitalac lako može sam uvjeriti.

Jedna od mogućnosti da se prostorni slučaj obradi »analogno« ravninskom je ova [Cerovac, 1981]: dane točke $T_1, T_2, \ldots, T_n$ prikažu se u nekom prostornom kartezijevom koordinatnom sistemu kao (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), $\ldots, (x_n, y_n, z_n)$. Od triju koordinatnih ravnina odaberu se dvije, npr. x0z i y0z. Promatramo točke $T'_1 = (x_1, 0, z_1), \ldots, T'_n = (x_n, 0, z_n)$ u ravnini x0z. Na njih primijenimo ranije opisani postupak u ravnini, tj. tražimo onaj pravac p' u ravnini x0z koji ima jednadžbu $x = f_1(z) = a_1 z + b_1$ i za koji je

$$\sum (f_1(z_i) - x_i)^2$$

minimalna. Isto tako, u ravnini y0z promatramo točke $T''_1 = (0, y_1, z_1), \ldots, T''_n = (0, y_n, z_n)$ i tražimo pravac p'' u ravnini y0z koji ima jednadžbu $y = f_2(z) = a_2 z + b_2$ i za koji je

* Adresa autora: mr Damjan Jovičić, dipl. inž., Miljenko Lapaine, dipl. inž., Svetozar Petrović, dipl. inž., Geodetski fakultet, Zagreb, Kačićeva 26.

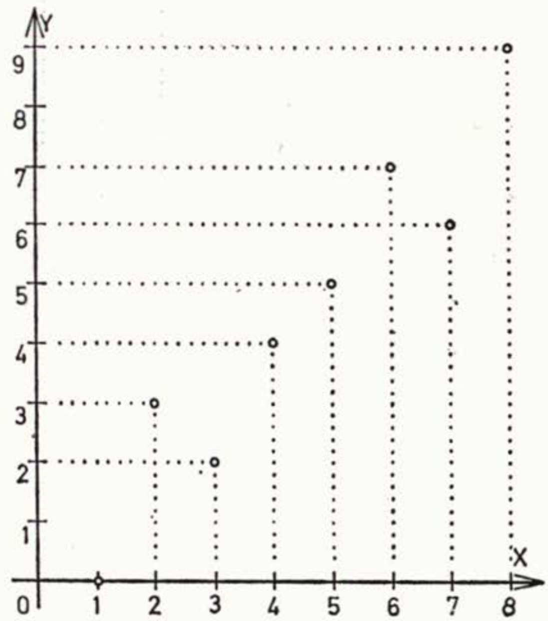
$$\sum (f_2(z_i) - y_i)^2$$

minimalna. Rješenjem problema u prostoru smatrat ćemo onaj pravac p čije ortogonalne projekcije na ravnine x0z, odnosno y0z, jesu dobiveni pravci p', odnosno p". Gornja dva uvjeta vode na dva linearna sistema od po dvije jednadžbe s dvije nepoznanice koje znamo riješiti.

Provedeni postupak i dobiveno rješenje obično se opravdavaju konstatacijom da se radilo po metodi najmanjih kvadrata pa je dobiveni pravac »najbolji« u smislu da je »najvjerojatniji«. Značenje ovih riječi promotrimo najprije na jednom jednostavnijem primjeru u ravnini.

Primjer 1. Zadano je osam točaka u ravnini kao na slici 1. Traži se »najbolji« pravac.

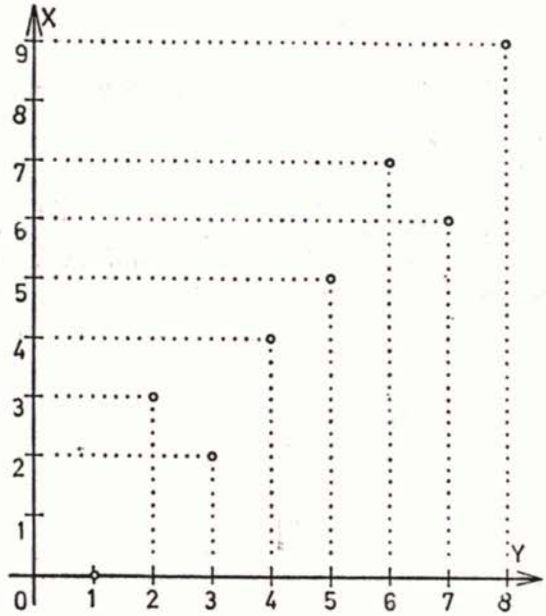
SLIKA 1



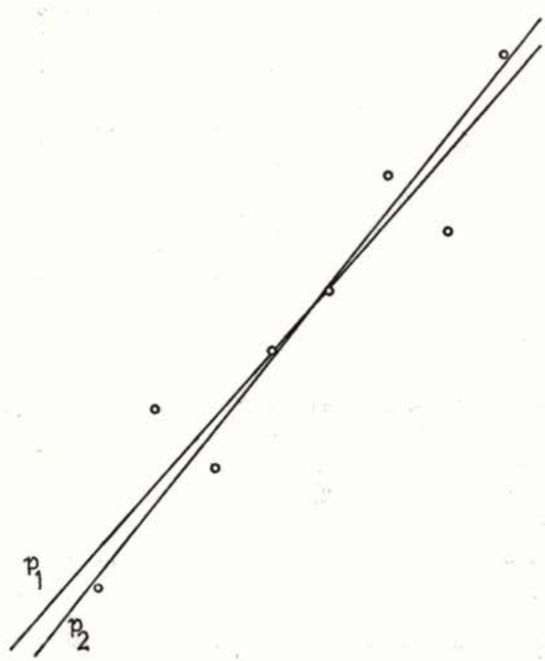
SLIKA 2

Da bi se problem mogao riješiti kako je maloprije opisano, treba najprije uvesti koordinatni sistem. To možemo učiniti na beskonačno mnogo načina, dva od njih prikazana su na slikama 2 i 3. Ako problem rješavamo u koordinatnom sistemu sa slike 2, kao rješenje dobivamo pravac p_1 (slika 4), a koordinatni sistem sa slike 3 vodi do rješenja p_2 (slika 4). Neki treći koordinatni sistem doveo bi do nekog trećeg rješenja p_3.

Dakle, budući da postoji beskonačno mnogo koordinatnih sistema, znači da za dani skup točaka ravnine postoji beskonačno mnogo pravaca od kojih je svaki »najbolji« u smislu da je »najvjerojatniji«. Ovakav zaključak ćemo odbaciti ukoliko želimo da riječ »najvjerojatniji« ima neki smisao.



SLIKA 3



SLIKA 4

Možda je stvar u tome da od beskonačno mnogo koordinatnih sistema u ravnini ne smijemo po volji odabrati jednog, nego među njima postoji neki kojeg baš moramo odabrati, pa će dobiveni pravac zaista biti »najbolji«, odnosno »najvjerojatniji«. To je zaista i istina onda kada nemamo od početka skup točaka u ravnini, nego je on nastao samo kao grafički prikaz mjerenja dviju veličina x i y, čime su dobivena dva skupa vrijednosti $x_1, \ldots, x_n$ i $y_1, \ldots, y_n$. No tada se uopće ne radi o postavljanju »najboljeg« pravca za zadani skup točaka, nego o proučavanju jačine linearne veze veličina x i y, koja se obično naziva linearna korelacija, i o traženju tzv. pravaca regresije.

Budući da se kod našeg zadatka ne radi o proučavanju korelacije, nego o traženju »najboljeg« pravca za zadani skup točaka, zaključujemo da minimizacija sume kvadrata razlika ordinata nije najbolji kriterij za ponalaženje tog pravca.

U slučaju točaka u prostoru, opisani postupak još je proizvoljniji i nejasniji. Nakon što smo od beskonačno mnogo mogućih koordinatnih sistema odabrali jedan, treba se od tri koordinatne ravnine opet proizvoljno opredijeliti za dvije, na njih projicirati zadane točke itd. Za razliku od ravninskog slučaja gdje se dobiveni pravac može interpretirati kao pravac regresije, ovdje ne vidimo nikakvu razumnu interpretaciju dobivenog rezultata.

Zato predlažemo da se zadatak riješi na drugačiji način. Želimo da, bez obzira na odabrani koordinatni sistem, kao »najbolji« pravac uvijek dobijemo isti pravac. Budući da je euklidska udaljenost* točke od pravca uvijek ista, bez obzira na koordinatni sistem u kome računamo, ona je dobar kriterij za nalaženje »najboljeg« pravca. Problem ćemo odmah riješiti za skup točaka u prostoru — time će automatski biti obuhvaćen i specijalni slučaj kada sve točke leže u nekoj ravnini.

METODA EUKLIDSKIH UDALJENOSTI

ZADATAK Za danih n točaka $T_1, T_2, \ldots, T_n$ prostora treba naći onaj pravac koji ima svojstvo da je suma kvadrata euklidskih udaljenosti danih točaka od tog pravca minimalna.

RJEŠENJE Točke $T_1, \ldots, T_n$ prikažemo u nekom kartezijevom koordinatnom sistemu:

$$T_1 = (x_1, y_1, z_1), \ldots, T_n = (x_n, y_n, z_n).$$

Kvadrat euklidske udaljenosti točke T_i od pravca

$$\frac{x - x_0}{k} = \frac{y - y_0}{l} = \frac{z - z_0}{m} \tag{1}$$

je

$$d_i^2 = \{[(x_i - x_0)l - (y_i - y_0)k]^2 + [(y_i - y_0)m - (z_i - z_0]l]^2 + [(z_i - z_0)k - (x_i - x_0)m]^2\} / (k^2 + l^2 + m^2) \tag{2}$$

* Euklidska udaljenost se definira kao drugi korijen iz sume kvadrata razlika koordinata zadanih točaka.

Kako je svakom pravcu pridruženo beskonačno mnogo jednadžbi oblika (1) jer k, l i m nisu jednoznačno određeni, možemo po volji zadati jedan uvjet koji povezuje k, l i m. Iz (2) vidimo da je pogodno odabrati

$$k^2 + l^2 + m^2 = 1 \tag{3}$$

pa je

$$d_i^2 = [(x_i - x_0)l - (y_i - y_0)k]^2 + [(y_i - y_0)m - (z_i - z_0)l]^2 + \\ + [(z_i - z_0)k - (x_i - x_0)m]^2. \tag{4}$$

Tražimo dakle da funkcija

$$S = S(k, l, m, x_0, y_0, z_0) = \sum d_i^2$$

poprimi minimum. Uz oznake

$$E(x) = (\sum x_i)/n \qquad E(y) = (\sum y_i)/n \qquad E(z) = (\sum z_i)/n$$
$$E(x^2) = (\sum x_i^2)/n \qquad E(y^2) = (\sum y_i^2)/n \qquad E(z^2) = (\sum z_i^2)/n$$
$$E(xy) = (\sum x_i y_i)/n \qquad E(yz) = (\sum y_i z_i)/n \qquad E(xz) = (\sum x_i z_i)/n$$

nakon dužeg sređivanja dobijemo

$$S = n\{(k^2 + l^2)z_0^2 + 2[km(E(x) - x_0) + ml(E(y) - y_0) - (k^2 + l^2)E(z)]z_0 + \\ + (l^2 + m^2)E(x^2) + (k^2 + m^2)E(y^2) + (l^2 + k^2)E(z^2) - 2[klE(xy) + \\ + mlE(yz) + mkE(xz)] - 2[x_0(l^2 + m^2) + kly_0]E(x) - 2[y_0(k^2 + m^2) + \\ + klx_0]E(y) - 2m(ly_0 + kx_0)E(z) + (lx_0 - ky_0)^2 + m^2(x_0^2 + y_0^2)\} \tag{5}$$

tj. S je oblika

$$S = Az_0^2 + Bz_0 + C.$$

Kad bi k, l, m, x_0, y_0 bili poznati, funkcije A, B, C bi bile konstantne i bilo bi $A > 0$. Grafički prikaz funkcije S bila bi parabola koja poprima minimum u tjemenu, čija je apscisa, kao što je poznato

$$z_0 = -\frac{B}{2A}. \tag{6}$$

Pročitamo li A i B iz izraza (5) i uvrstimo u (6) dobivamo da bez obzira kakvi su k, l, m, x_0, y_0 mora vrijediti

$$z_0 = -[km(E(x) - x_0) + ml(E(y) - y_0) - (k^2 + l^2)E(z)]/(k^2 + l^2). \tag{7}$$

Analognim sređivanjem po y_0 umjesto po z_0 dobivamo umjesto (5) kvadratnu funkciju od y_0, te sličnim zaključivanjem

$$y_0 = -[kl(E(x) - x_0) + lm(E(z) - z_0) - (k^2 + m^2)E(y)]/(k^2 + m^2). \tag{8}$$

Direktnim uvrštavanjem lako provjeravamo da $x_0 = E(x)$, $y_0 = E(y)$, $z_0 = E(z)$ zadovoljava (7) i (8). Zaključujemo da traženi pravac prolazi točkom (E(x), E(y), E(z)) koja je težište zadanog skupa točaka $T_1, T_2, \ldots, T_n$. Jednadžba traženog pravca je dakle

$$\frac{x - E(x)}{k} = \frac{y - E(y)}{l} = \frac{z - E(z)}{m}. \qquad (9($$

Od početnih šest nepoznatih parametara k, l, m, x_0, y_0, z_0 preostalo je još određivanje tri: k, l, i m. Označimo:

$$
\begin{aligned}
a &= n(E(y^2) - E^2(y) + E(z^2) - E^2(z)) \\
b &= n(E(x^2) - E^2(x) + E(z^2) - E^2(z)) \\
c &= n(E(y^2) - E^2(y) + E(x^2) - E^2(x)) \\
d &= n(E(x)E(y) - E(xy)) \\
e &= n(E(x)E(z) - E(xz)) \\
f &= n(E(y)E(z) - E(yz))
\end{aligned}
\tag{10}
$$

S ovim oznakama možemo napisati

$$S(k, l, m) = ak^2 + bl^2 + cm^2 + 2dkl + 2ekm + 2flm. \tag{11}$$

Tražimo dakle one k, l, m za koje funkcija (11) poprima minimum, s time da naravno mora biti ispunjen i na početku postavljen uvjet (3). Uvjetni ekstrem, kao što je poznato, tražimo tako da formiramo novu funkciju

$$R(k, l, m, \lambda) = S(k, l, m) - \lambda(k^2 + l^2 + m^2 - 1).$$

Derivirajući R po k, l, m, λ dobivamo jednadžbe

$$(a-\lambda)k + dl + em = 0 \tag{12}$$

$$dk + (b-\lambda)l + fm = 0 \tag{13}$$

$$ek + fl + (c-\lambda)m = 0 \tag{14}$$

$$k^2 + l^2 + m^2 = 1 \tag{3}$$

Iz (3) vidimo da trivijalno rješenje k = l = m = 0 ne dolazi u obzir. Shvatimo (12)—(14) kao homogeni sistem linearnih jednadžbi s nepoznanicama k, l, m. Da bi on imao netrivijalno rješenje, determinanta sistema mora biti jednaka nuli, tj.

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & d & e \\ d & b-\lambda & f \\ e & f & c-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Ovo je kubna jednadžba s jednom nepoznanicom λ. Kubnu jednadžbu znamo riješiti. Može se dokazati, što ovdje izostavljamo, da će sva tri dobivena rješenja biti realna i pozitivna, te da minimum funkcije S odgovara baš najmanjem od njih. Treba dakle izračunati najmanje rješenje kubne jednadžbe, uvrstiti ga u (12)—(14) i odatle uz pomoć (3) izračunati tražene k, l, m.

NAPOMENE UZ PRIMJENU METODE EUKLIDSKIH UDALJENOSTI U PRAKSI

Program koji u potpunosti rješava postavljeni zadatak napisali smo u BASIC-u i testirali na stolnom računalu HP System 45. Na vaše traženje može se dobiti od autora.

U slučaju da sve zadane točke leže jako blizu nekog pravca, tada metoda opisana u [Cerovac, 1981], pod uvjetom da je odabran takav koordinatni sistem da traženi pravac leži gotovo paralelno s osi z, daje rezultate koji su dobra aproksimacija onih koji se dobiju predloženom metodom euklidskih udaljenosti. Takav je slučaj sa primjerom navedenim u [Cerovac, 1981]. Zato bismo preporučili:

a) ako na raspolaganju stoji elektroničko računalo primijeniti metodu euklidskih udaljenosti uz odgovarajuću programsku podršku.

b) ako se ne zahtijeva velika točnost i ako je računalo nedostupno, po zadanim točkama približno procijeniti kako će stajati traženi pravac i postaviti os z (ako se radi o točkama u ravnini, onda os x) koordinatnog sistema u tom smjeru, te problem riješiti metodom opisanom u [Cerovac, 1981], budući da ona zahtijeva manji broj računskih operacija.

LITERATURA

[1] Cerovac P.: Određivanje točnosti izvedbe objekta cilindričnog oblika, Geodetski list br. 7—9, str. 195—212, Zagreb, 1981.

KRATAK SADRŽAJ

U radu je razmotren problem nalaženja pravca koji je »najbolje prilagođen« danom skupu točaka prostora. Umjesto metode predložene u članku [Cerovac, 1981], preporuča se »metoda euklidskih udaljenosti«.

ABSTRACT

The paper deals with the problem of finding the straight line which is »best fitted« to the given set of points lying in the 3-dimensional Euclidean space. Instead of the method proposed in [Cerovac, 1981], the authors suggest »the method of Euclidean distances«.

Primljeno: 1982-09-03