

UDK 535.317.6

771.319:531.55

Originalan znanstveni rad

PRILOG BOLJEM ODREĐIVANJU POLINOMA DISTROZIJE OBJEKTIVA BALISTIČKIH KAMERA

Izidor PALMAN — Krk*

UVOD

Kod objektiva balističkih kamera, pogreška distroziije objektiva određuje se u pravilu, jednako kao i kod objektiva fotogrametrijskih kamera, fotogoniometrom; mjereći radijalne udaljenosti točaka od srednje točke snimka i njihove pripadajuće osne kuteve. Tim postupkom obuhvaćena je ujedno i tzv. kalibracija kamere, t.j. određivanje slikovnih koordinata glavne točke snimka i određivanje konstante kamere.

Rezultati tih mjerenja daju se u certifikatu za dotičnu kameru.

U praksi se kod snimaka neba učinjenih balističkim kamerama s ovim veličinama ne zadovoljavamo, pa se one određuju u postupku orijentacije snimka neba.

Prednost ovakvog načina određivanja distroziije leži u tome, što se u postupku orijentacije snimka neba, pogreška distroziije određuje iz velikog broja točaka preslikanih zvijezda, a koje su još k tome i povoljno raspoređene po cijeloj površini snimka; dok se kod laboratorijskog postupka, mjerenja vrše samo u smjeru dijagonala i simetrala stranica snimka.

Budući da pogreška distroziije objektiva ima sustavni karakter, za preporučiti je, da se iz jednog niza snimaka neba odredi najvjerojatnija vrijednost ove pogreške, koja bi se kod postupka orijentacije daljnih snimaka neba uzela u obzir već kod transformacije slikovnih koordinata.

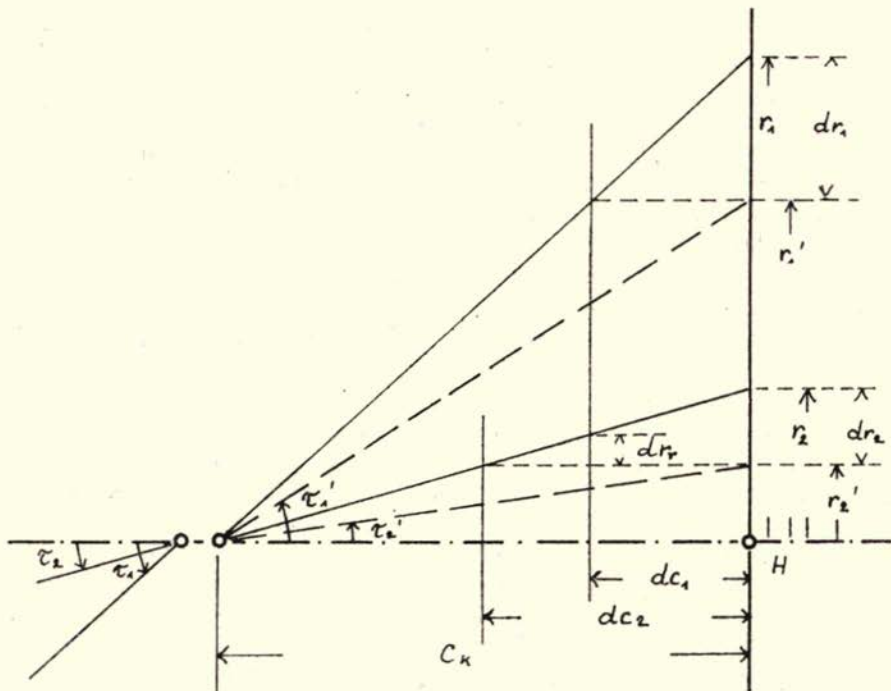
Autoru je poznato, da su se u praksi, u postupku izjednačenja orijentacije snimka satelita, određivale popravke koeficijenata samo uz 3. i 5. potenciju polinoma distroziije za svaki snimak; no nije mu poznato, da je bilo gdje dat statistički prikaz ovih promjena i na osnovu toga utvrđena sustavnost ove pogreške za bilo koji objektiv. Možda je k tome doprinijela ta okolnost, što je u postupak izjednačenja orijentacije svakog snimka neba uvedena nepoznanica za konstantu kamere, a bez posebnog uvjeta da zavisnost između konstante kamere i veličine distroziije bude isključena. Zbog toga nije bilo moguće uvesti ni popravku koeficijenta a_1 uz 1. potenciju, zbog njegove jake korelacije sa popravkom konstante kamere.

* Adresa autora: Izidor Palman, dipl. inž., Općinska uprava za katastar i geodetske poslove, Krk.

ZAVISNOST KONSTANTE KAMERE I VELIČINE DISTROZIJE

Položimo li s osi snimanja i dolazećom zrakom s neke točke jednu ravninu, onda će u toj ravnini osni kut τ_1 biti prikazan u svojoj pravoj veličini kao na sl. 1. Prolazeći kroz objektiv dolazeća zraka biva u toj ravnini slomljena i pod nekim drugim kutem τ_1' slijedi dalje tok u prostoru snimka. Osnom kutu τ_1' odgovara na snimku radijalna udaljenost r_1' , a veličina C_K predstavlja konstantu kamere prilikom snimanja. Pogreškom distrozije izazvana je dakle na snimku optička deformacija dr_1 .

Pretpostavimo još da je u toj istoj ravnini preslikana još jedna točka, ali pod nekim drugim osnim kutem τ_2 , kojemu u prostoru snimka odgovara kut τ_2' , pripadajuća radijalna udaljenost r_2' i optička deformacija dr_2 .



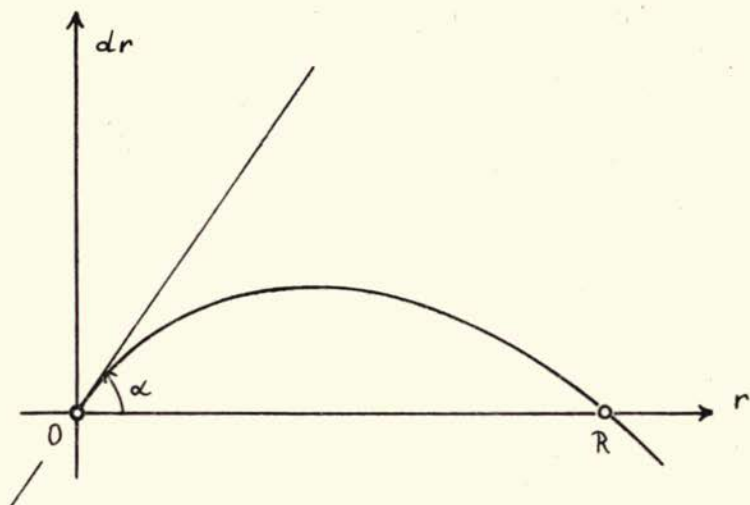
Sl. 1

Iz sl. 1 je vidljivo da se promjenom konstante kamere C_K za veličinu dC može postići da veličina distrozije na po volji odabranoj radijalnoj udaljenosti bude jednaka nuli. Ako dakle konstantu kamere V_K prema sl. 1 promijenimo za veličinu dC_1 onda postizemo da na radijalnoj udaljenosti r_1 veličina distrozije bude $dr_1 = 0$. Nužno je pri tome na svim ostalim radijalnim udaljenostima iznose distrozije reducirati na određenu veličinu koja je na sl. 1 označena sa dr_r . Ova će reducirana veličina biti predmet daljnjeg razmatranja i u daljem tekstu biti će označena sa dr .

Iz sl. 1 još je vidljivo da promjena konstante kamere neće izazvati nikakvih promjena u glavnoj točki snimka, koju na sl. 1 predstavlja točka H.

ODREĐIVANJE POLINOMA DISTROZIJE

Odaberemo li takav koordinatni sustav, da na os apscise nanašamo radijalne udaljenosti r , a na os ordinate veličine distorzije date u certifikatu kamere, onda se distorzija može grafički prikazati kao na sl. 2, a analitički se daje lako prikazati algebarskim polinomom. Pri tome ostaje još otvoreno pitanje, koji stupanj polinoma odabrati. U [4] navodi se da se krivulja distorzije sa dovoljnom točnošću daje prikazati jednim polinomom 3. stupnja. U [2] se pak predlaže polinom 5. stupnja. U svakom slučaju stoji, a što je iz sl. 2 vidljivo, da za predodžbu distorzije treba koristiti polinom neparnog stupnja. Pri tome treba početi od polinoma 3. stupnja i povećavati stupanj na 5. i 7., a možda još i dalje, pa analizom tih podataka odrediti optimalan stupanj polinoma.



Sl. 2

Promotrimo najprije nužne uvjete za isključenje međusobne zavisnosti koeficijenta polinoma i zavisnosti između konstante kamere i veličine distorzije.

Budući da je funkcija distorzije jedna liha funkcija, to se prema [1] smijemo unapred ograničiti samo na neparne potencije, jer bi svaka parna potencija u jednoj ovakvoj sumi, lihosti funkcije samo štetila. Time će biti ispunjen prvi uvjet. Drugi uvjet biti će ispunjen uvađanjem dviju nultočka polinoma na radijalnim udaljenostima $r_1 = 0$, i $r_2 = R$.

Ovo se daje lako dokazati analizirajući predodžbe na sl. 1 i sl. 2. Iz sl. 1 se vidi da se promjenom konstante kamere može po volji odabrati radijalna udaljenost R za koju će vrijednost distorzije biti $dR = 0$. To znači da će prema sl. 2 nultočka čija je vrijednost apscise R biti pomicala u smjeru ka ili od ishodišta koordinatnog sustava. Ta promjena izaziva prema sl. 2 rotaciju krivulje oko ishodišta, i time mijenja kut α odn. koeficijent smjera

tangente na krivulju distorzije u ishodištu. Uzmemo li sada jedan polinom po volji odabranog stupnja n koji glasi

$$P_n(r) = a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_2 r^2 + a_1 r + a_0$$

i izvršimo deriviranje, dobijemo

$$P'_n(r) = n \cdot a_n r^{n-1} + (n-1) \cdot a_{n-1} r^{n-2} + \dots + 2 a_2 r + a_1$$

Uvrstimo li sada u gornju derivaciju vrijednost $r = 0$ dobijemo prema sl. 2

$$\operatorname{tg} \alpha = a_1 \quad (1)$$

Iz navedene analize sl. 1 i sl. 2 i izraza (1) slijedi, da se promjenom konstante kamere u polinomu distorzije mijenja vrijednost koeficijenta a_1 . Iz sl. 2 još se vidi da će koeficijent uz nultu potenciju biti $a_0 = 0$, pa u daljnjem razmatranju neće biti uziman u obzir.

Promotrimo sada prema [4] polinom 3. stupnja

$$dr = a_3 r^3 + a_2 r^2 + a_1 r \quad (2)$$

Prema Gauss-ovom teoremu svaki se algebarski polinom može, pomoću apscisnih vrijednosti nultočaka, rastaviti na množitelje, pa za dvije realne nultočke $r_1 = 0$ i $r_2 = R$ u izrazu (2) vrijedi

$$dr = r(r-R)(A_1 r + A_0) \quad (3)$$

Nakon izvršenog množenja u (3) dobijemo

$$dr = A_1 r^3 + (A_0 - R A_1) r^2 - R A_0 r \quad (4)$$

Usporedimo li (4) sa (2) i uzmemo li u obzir 1. uvjet, da koeficijenti uz parne potencije budu jednaki nuli, onda dobijemo

$$\left. \begin{aligned} a_3 &= A_1 \\ a_2 &= A_0 - R A_1 = 0; A_0 = R A_1 \\ a_1 &= R A_0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Nakon uvrštenja (5) u (3) slijedi

$$dr = r(r-R)(A_1 r + R A_1) = r(r-R)(r+R) A_1$$

odnosno

$$dr = r(r^2 - R^2) A_1 \quad (6)$$

Izraz (6) kazuje da je, za isključenje korelacije među nepoznicama u polinomu 3. stupnja, određivanje koeficijenta A_1 dovoljan i nuždan uvjet.

Promotrimo sada što se događa, ako prema [2] uvedemo polinom 5. stupnja, koji glasi

$$dr = a_5 r^5 + a_4 r^4 + a_3 r^3 + a_2 r^2 + a_1 r \quad (7)$$

Zadržavajući isti postupak kao kod polinoma 3. stupnja polinom (7) možemo rastaviti

$$dr = r(r-R)(A_3 r^3 + A_2 r^2 + A_1 r + A_0) \quad (8)$$

i nakon množenja dobijemo

$$dr = A_3 r^5 + (A_2 - R A_3) r^4 + (A_1 - R A_2) r^3 + (A_0 - R A_1) r^2 - R A_0 r \quad (9)$$

Usporedba (7) i (9) uz ranije naveden 1. uvjet daje

$$\left. \begin{aligned} a_5 &= A_3 \\ A_4 &= A_2 - R A_3 = 0; \quad A_2 = R A_3 \\ a_3 &= A_1 - R A_2 \\ a_2 &= A_0 - R A_1 = 0; \quad A_0 = R A_1 \\ a_1 &= -R A_0 \end{aligned} \right\} (10)$$

Uvrštenjem (10) u (8) dobivamo

$$dr = r(r - R)(A_3 r^3 + R A_3 r^2 + A_1 r + R A_1) = r(r - R)(r + R)(A_3 r^2 + A_1)$$

i konačno

$$dr = r(r^2 - R^2)(A_3 r^2 + A_1) \quad (11)$$

Iz izraza (11) je vidljivo da je u polinomu 5. stupnja dovoljan i nuždan uvjet određivanja koeficijenata A_1 i A_3 . Ako bi sada trebalo povećati stupanj polinoma, onda bi analogno izrazima (6) i (11) za polinom 7. stupnja vrijedilo

$$dr = r(r^2 - R^2)(A_5 r^4 + A_3 r^2 + A_1) \quad (12)$$

Ovako bi mogli nastaviti i dalje, pa bi uz naprijed navedene uvjete za polinom n -tog stupnja prema (6), (11) i (12) nuždan i dovoljan uvjet bio, određivanje $\frac{n-1}{2}$ koeficijenata.

Budući da se kod distorzije objektiva balističkih kamera radi o vrlo malim veličinama $dr_{\max} < 0.01$ mm to se koeficijenti polinoma uzimaju 10^4 puta veći. To znači da se u polinomu za radijalne udaljenosti uzimaju centimetri kao jedinice, a vrijednost polinoma izražena je onda u mikrometrima.

ZAKLJUČAK

Treba dakle, kao što je ranije navedeno, kod određivanja polinoma distorzije za određeni objektiv balističke kamere početi sa polinomom 3. stupnja i prema (6) odrediti koeficijent A_1 , a odatle prema (5) a_1 i a_3 . Iza toga povećati stupanj polinoma na 5. stupanj i prema (11) odrediti koeficijente A_1 i A_3 ; a odatle prema (10) a_1 , a_3 i a_5 . Apsolutne vrijednosti koeficijenata uz rastuće potencije će povećanjem stupnja polinoma opadati. Postupak povećavanja stupnja polinoma treba tako dugo nastaviti dok god koeficijent uz najvišu potenciju ne postane tako malen [3] da njegov utjecaj na promjenu slikovnih koordinata točaka bude manji od 0.0001 mm. Uzmimo da taj uvjet bude postignut kod polinoma stupnja $2n + 1$; onda će se za optimalan stupanj polinoma uzeti stupanj $2n - 1$.

LITERATURA

- [1] Baule, B.: Die Mathematik des Naturforschers und Ingenieurs, Band II, S. Hirzel Verlag Leipzig 1959.
- [2] Deker, H.: Die Anwendung der Photogrammetrie in der Satellitengeodasie (Satellitenphotogrammetrie), DGK, Reihe C, Heft Nr. 111, München 1967.
- [3] Feil, L.: Aproksimacija polinomom, Geodetski list 1—3 Zagreb, 1979.
- [4] Mimus, M., Mittermayer, E.: Ein Verfahren zur Plattenreduktion und Satellitentriangulation, BEK, Astronomisch-Geodätische Arbeiten, Heft Nr. 24, München 1968.

SAZETAK

Do sada su se kod balističkih kamera određivali koeficijenti polinoma distorzije postupkom interpolacije (Lagrange, Newton), na osnovu podataka u certifikatu kamere. Određivani su svi koeficijenti parnih i neparnih potencija osim koeficijenta a_0 . Daljnji postupak se sastojao u tome, da kod izjednačenja orijentacije snimka neba budu uzete u izjednačenje još i popravke koeficijenata, ali samo za neparne potencije osim koeficijenta a_1 koji je u jakoj korelaciji sa promjenom konstante kamere. Ovdje je prikazan postupak kako je moguće tu korelaciju isključiti i odrediti samo nužan broj koeficijennata koristeći Gauss-ov teorem algebre o rastavljanju polinoma na množitelje.

ZUSAMMENFASSUNG

Bisher wurden bei ballistischen Kammern die Koeffizienten des Verzerrungspolynoms, auf Grund der Herstellungsdaten, nach einem Interpolationsverfahren (Lagrange, Newton) bestimmt. Dabei wurden alle Koeffizienten der geraden und ungeraden Potenzen bestimmt, ausser des Koeffizienten a_0 . Das weitere Verfahren bestand darin, dass bei der Orientierungsausgleichung einer Himmelsaufnahme noch weitere Verbesserungen für die Koeffizienten eingeführt wurden. Das galt aber nur für die ungeraden Potenzen ausser dem Koeffizienten a_1 , der in starker Korrelation mit der Kammerkonstante stand. Hier wurde ein neues Verfahren dargestellt, das die Möglichkeit gibt, diese Korrelation auszuschalten, und nur die erforderliche Anzahl der Koeffizienten zu bestimmen. Dabei wurde der Satz von Gauss, über die Zerlegung eines Polynoms auf die Faktoren benutzt.

Primljeno: 1982-04-20