UDK 528.33.063.1
Originalan znanstveni rad

UOPŠTENA TRANSFORMACIJA KOORDINATA

Ivan MOLNAR — Novi Sad*

U slučaju neuvažavanja uslova konformnosti, tj. $a_1 \neq b_2$ i $b_1 \neq -a_2$, jednačine za transformaciju koordinata, iz jednog u drugi koordinatni sistem, u opštem obliku ovako glase

$$\left\| \begin{matrix} y'_i \\ x'_i \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} y_i \\ x_i \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} c_1 \\ c_2 \end{matrix} \right\| \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{1}$$

Ukoliko koordinate y'_i i x'_i, sistema Y' X', smatramo rezultatima merenja, koordinatne tačke y_i i x_i, sistema Y X, približnim vrednostima, tada linearno odstupanje koordinata tačaka o određujemo na osnovu (1)

$$o = \{(a_1 y_i + b_1 x_i + c_1 - y'_i)^2 + (a_2 y_i + b_2 x_i + c_2 - x'_i)^2\}^{1/2} \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{2}$$

Ako desnu stranu jednačine (2) razvijemo u Maklorenov red, tako da članove drugog i viših redova zanemarimo, dobijamo jednačine odstupanja koordinata, nalik jednačinama popravaka merenja

$$o = \| \alpha \, \beta \, \gamma \, \delta \, \varphi \, \psi \| \left\| \begin{matrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{matrix} \right\| + d \tag{3}$$

gde su α, β, γ, δ, φ i ψ, usled razvijanja u red, nastale sume koeficijenata, dok je d suma slobodnih članova.

Za svaku od n identičnih tačaka, kojih mora biti više od tri, obrazujemo po jedan par ovakvih jednačina odstupanja koordinata i vršimo izravnanje po metodi posrednih merenja. Zadovoljenjem uslova $o^T o$ = minimum, računamo najverovatnije vrednosti transformacionih koeficijenata. Na osnovu njih, određujemo novotransformisane koordinatne tačke u sistemu Y' X'. Treba naglasiti da ovakav postupak računanja ne pretstavlja izravnanje u strogom smislu reči, nego, samo, analogiju sa postupkom izravnanja, obzirom da vrednosti o nisu greške merenja, već njihove složene funkcije.

* Adresa autora: Dr. Ivan Molnar, dipl. inž., Pokrajinska geodetska uprava Novi Sad, Bul. Maršala Tita 16.

DIREKTNO ODREĐIVANJE TRANSFORMACIONIH KOEFICIJENATA POMOĆU REDUKOVANIH KOORDINATA

Kad je mreža u sistemu Y X znatnije udaljena od koordinatnog početka sistema Y' X', tada je celishodno izvršiti paralelno izmeštanje koordinatnog početka u težište teritorije koju zahvata mreža podložna transformaciji. Dalja računanja u sistemu Y X vršimo primenom redukovanih koordinata, polazeći od težišne tačke $T_{0(y_0, x_0)}$

$$
\begin{aligned}
y_0 &= \frac{1}{n}(y_1 + y_2 + \dots + y_n) & x_0 &= \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \\
\overline{y}_i &= y_i - y_0 & \overline{x}_i &= x_i - x_0 \\
[\overline{y}] &= 0 & [\overline{x}] &= 0
\end{aligned}
\tag{4}
$$

U cilju određivanja najverovatnije zavisnosti, u nastavku, treba potražiti minimum sume kvadrata odstupanja koordinata. Najpre, izrazimo koordinate sistema Y' X', na osnovu koordinata sistema Y X, posredstvom sledećih transformacionih jednačina

$$
\begin{Vmatrix} y'_i - y_0 \\ x'_i - x_0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_1 \, b_1 \\ a_2 \, b_2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \overline{y}_i \\ \overline{x}_i \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Vmatrix} \qquad i = 1, 2, \dots, n \tag{5}
$$

Zamislimo, sada, da koordinate sistema Y' X' predstavljaju rezultate merenja. Razvijanjem jednačina (5) u Maklorenov red, dobijamo sledeće redukovane jednačine odstupanja koordinata, nalik jednačinama popravaka merenja

$$
\begin{aligned}
o_{yi} &= a_1 \overline{y}_i + b_1 \overline{x}_i + c_1 - (y'_i - y_0) \\
o_{xi} &= a_2 \overline{y}_i + b_2 \overline{x}_i + c_2 - (x'_i - x_0)
\end{aligned}
\qquad i = 1, 2, \dots, n
$$

odnosno, u matričnom obliku

$$
o = Az + 1 \tag{6}
$$

gde su

$$
\underset{(1,2n)}{o^T} = \| o_{y1} \; o_{x1} \; o_{y2} \; o_{x2} \dots o_{yn} \; o_{xn} \| \qquad \underset{(1,6)}{z^T} = \| c_1 \; c_2 \; a_1 \; a_2 \; b_1 \; b_2 \|
$$

$$
\underset{(2n,\,6)}{A} = \begin{Vmatrix}
1 & 0 & \overline{y}_1 & 0 & \overline{x}_1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & \overline{y}_1 & 0 & \overline{x}_1 \\
1 & 0 & \overline{y}_2 & 0 & \overline{x}_2 & 0 \\
0 & 1 & 0 & \overline{y}_2 & 0 & \overline{x}_2 \\
\hline
\hline
1 & 0 & \overline{y}_n & 0 & \overline{x}_n & 0 \\
0 & 1 & 0 & \overline{y}_n & 0 & \overline{x}_n
\end{Vmatrix}
$$

$$
-\underset{(1,2n)}{l^T} = \| (y'_1 - y_0)(x'_1 - x_0)(y'_2 - y_0)(x'_2 - x_0) \dots (y'_n - y_0)(x'_n - x_0) \|
$$

Zadovoljenjem uslova $o^T o$ = minimum, obrazujemo normalne jednačine

$$A^T A z + A^T l = o \tag{7}$$

gde su

$$A^T A = \begin{Vmatrix} n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [\bar{y}^2] & 0 & [\bar{y}\,\bar{x}] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [\bar{y}^2] & 0 & [\bar{y}\,\bar{x}] \\ 0 & 0 & [\bar{y}\,\bar{x}] & 0 & [\bar{x}^2] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [\bar{y}\,\bar{x}] & 0 & [\bar{x}^2] \end{Vmatrix}$$

$$-(A^T l)^T = \| [y' - y_0]\,[x' - x_0]\,[\bar{y}(y' - y_0)]\,[\bar{y}(x' - x_0)]\,[\bar{x}(y' - y_0)]\,[\bar{x}(x' - x_0)] \|$$

Rešenjem normalnih jednačina, određujemo najverovatnije vrednosti transformacionih koeficijenata

$$z = -(A^T A)^{-1} A^T l \tag{8}$$

odnosno,

$$\begin{Vmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Vmatrix} = \frac{1}{n} \begin{Vmatrix} [y' - y_0] \\ [x' - x_0] \end{Vmatrix}$$

$$\begin{Vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{Vmatrix} = \frac{1}{[\bar{y}^2][\bar{x}^2] - [\bar{y}\,\bar{x}]^2} \begin{Vmatrix} [\bar{x}^2][\bar{y}(y' - y_0)] - [\bar{y}\,\bar{x}][\bar{x}(y' - y_0)] \\ [\bar{x}^2][\bar{y}(x' - x_0)] - [\bar{y}\,\bar{x}][\bar{x}(x' - x_0)] \\ [\bar{y}^2][\bar{x}(y' - y_0)] - [\bar{y}\,\bar{x}][\bar{y}(y' - y_0)] \\ [\bar{y}^2][\bar{x}(x' - x_0)] - [\bar{y}\,\bar{x}][\bar{y}(x' - x_0)] \end{Vmatrix}$$

ODREĐIVANJE TRANSFORMACIONIH KOEFICIJENATA POSREDSTVOM PRIRAŠTAJA

Manevrisanje redukovanim jednačinama odstupanja koordinata (6) skopčano je sa izvesnim teškoćama, uzrokovanim velikim brojem cifara, koje se u postupku praktičnog određivanja transformacionih koeficijenata javljaju. Redukovane koordinate tačaka i slobodni članovi se izražavaju i do u šestomesnim ciframa, dok red veličine kojim se određuju transformacioni koeficijenti iznosi 10^{-6}. Ova okolnost sugeriše takvu modifikaciju redukovanih jednačina odstupanja koordinata (6), kojom bi se, pored računanja na elektronskim računarima, omogućila računanja i na u praksi najrasprostranjenijim računskim pomagalima. U tom cilju, najpre, odredimo približne vrednosti transformacionih koeficijenata. Rešenjem sistema linearnih jednačina (5) za tri tačke, koje se ne nalaze na pravoj liniji (matrica sistema je regularna), dobijamo vrednosti c_{01}, c_{02}, a_{01}, a_{02}, b_{01} i b_{02}. Ovakav postupak je propisan i u [3] (efektivno računanje se vrši u trigonometrijskom obrascu br. 32[a]) s tim, što se računaju samo koeficijenti rotacije a_{01}, b_{01}, a_{02} i b_{02}, dok se koeficijenti translacije c_{01} i c_{02} eliminišu. Očigledno, sa stanovišta izravnanja, veličine c_{01}, c_{02}, a_{01}, a_{02}, b_{01} i b_{02} mogu pretstavljati, samo, približne vrednosti transformacionih koeficijenata.

Kad smo, prema napred opisanom, odredili približne vrednosti transformacionih koeficijenata, redukovane jednačine odstupanja koordinata poprimaju sledeći izgled

$$\begin{aligned} o_{yi} &= \Delta a_1 \bar{y}_i + \Delta b_1 \bar{x}_i + \Delta c_1 - f_{yi} \\ o_{xi} &= \Delta a_2 \bar{y}_i + \Delta b_2 \bar{x}_i + \Delta c_2 - f_{xi} \end{aligned} \qquad i=1,2,\ldots,n$$

odnosno, u matričnom obliku

$$o = A\xi + f \tag{9}$$

gde su

$$\xi^T = \| \Delta c_1\ \Delta c_2\ \Delta a_1\ \Delta a_2\ \Delta b_1\ \Delta b_2 \| \qquad - f^T = \| f_{y1}\ f_{x1}\ f_{y2}\ f_{x2} \ldots f_{yn}\ f_{xn} \|$$

Vektor slobodnih članova ovako modifikovanih jednačina odstupanja f, računamo posredstvom približnih vrednosti transformacionih koeficijenata

$$\begin{aligned} f_{yi} &= a_{01} \bar{y}_i + b_{01} \bar{x}_i + c_{01} - (y'_i - y_0) \\ f_{xi} &= a_{02} \bar{y}_i + b_{01} \bar{x}_i + c_{02} - (x'_i - x_0) \end{aligned} \qquad i=1,2,\ldots,n$$

odnosno,

$$f = A\eta + 1 \tag{10}$$

gde je

$$\eta^T = \| c_{01}\ c_{02}\ a_{01}\ a_{02}\ b_{01}\ b_{02} \|$$

Primenom uslova $o^T o$ = minimum, na modifikovane jednačine odstupanja koordinata (9), obrazujemo normalne jednačine

$$A^T A\xi + A^T f = 0 \tag{11}$$

gde je

$$-(A^T f)^T = \| [f_y]\ [f_x]\ [\bar{y}\, f_y]\ [\bar{y}\, f_x]\ [\bar{x}\, f_y]\ [\bar{x}\, f_x] \|$$

Rešenjem normalnih jednačina, određujemo najverovatnije vrednosti priraštaja transformacionih koeficijenata

$$\xi = -(A^T A)^{-1} A^T f \tag{12}$$

odnosno,

$$\begin{Vmatrix} \Delta c_1 \\ \Delta c_2 \end{Vmatrix} = \frac{1}{n} \begin{Vmatrix} [f_y] \\ [f_x] \end{Vmatrix} \qquad \begin{Vmatrix} \Delta a_1 \\ \Delta a_2 \\ \Delta b_1 \\ \Delta b_2 \end{Vmatrix} = \frac{1}{[\bar{y}^2][\bar{x}^2] - [\bar{y}\bar{x}]^2} \begin{Vmatrix} [\bar{x}^2]\,[\bar{y}\, f_y] - [\bar{y}\,\bar{x}]\,[\bar{x}\, f_y] \\ [\bar{x}^2]\,[\bar{y}\, f_x] - [\bar{y}\,\bar{x}]\,[\bar{x}\, f_x] \\ [\bar{y}^2]\,[\bar{x}\, f_y] - [\bar{y}\,\bar{x}]\,[\bar{y}\, f_y] \\ [\bar{y}^2]\,[\bar{x}\, f_x] - [\bar{y}\,\bar{x}]\,[\bar{y}\, f_x] \end{Vmatrix}$$

Najzad, definitivne vrednosti transformacionih koeficijenata dobijamo na osnovu sledećih izraza

$$\begin{aligned} a_1 &= a_{01} + \Delta a_1 \qquad & b_1 &= b_{01} + \Delta b_1 \qquad & c_1 &= c_{01} + \Delta c_1 \\ a_2 &= a_{02} + \Delta a_2 \qquad & b_2 &= b_{02} + \Delta b_2 \qquad & c_2 &= c_{02} + \Delta c_2 \end{aligned} \tag{13}$$

Očigledno, primenom bilo izraza (8), bilo izraza (13), dobijamo identične vrednosti za tražene transformacione koeficijente.

Preračunavanje ostalih koordinata tačaka, iz sistema Y X u sistem Y' X', vršimo primenom sledećih transformacionih jednačina

$$\left\| \begin{matrix} Y'_i \\ X'_i \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} y_0 \\ x_0 \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} c_1 \\ c_2 \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} (y_i - y_0) \\ (x_i - x_0) \end{matrix} \right\| \tag{14}$$

LITERATURA:

[1] Mihailović, K.: Geodezija II, I deo, Građevinska knjiga, Beograd 1974.
[2] Molnar, I.: Uklapanje lokalnih mreža u državni koordinatni sistem, Magistarski rad, Beograd 1975.
[3] Savezna geodetska uprava: Pravilnik za državni premer II i III deo, Beograd 1958.

REZIME

U radu je saopšten postupak transformacije koordinata, za slučaj neuvažavanja uslova konformnosti, tj. $a_1 \neq b_2$ i $b_1 \neq -a_2$. Stari pravilnici, a i novi čija je izrada u toku, predviđaju ovakav način transformacije s tim, što se transformacioni koeficijenti, sa stanovišta izravnanja, određuju približno, po poljima obrazovanim od tri, odnosno četiri identične tačke. Autor rada se zalaže, kad je u pitanju ovakav način transformacije, da se transformacioni koeficijenti određuju, primenom analogije sa postupkom izravnanja, na osnovu izraza (13). Predloženi računski postupak omogućuje korišćenje, u praksi najrasprostranjenijih računskih pomagala.

ABSTRACT

In this paper is given a procedure for transformation of coordinates, for the case which disrespects conformity conditions, i.r. $a_1 \neq b_2$ and $b_1 \neq -a_2$. Old rule books, as well as new ones that are now under preparations, anticipate such one mode of transformation, taking into account that transformation coefficients, from aspect of adjustment, are approximatively determined, by fields containing three or four identical points. In the paper author supports mode, when it is applied such a mode of transformation, to determine transformation coefficients by application of analogy with adjustment procedure based upon expression (13). Proposed computational procedure enables use of in practice the most widespread computational aids.

Primljeno: 1981 - 12 - 28.