UDK 528.14:519.242.5
Originalan znanstveni rad

IZRAVNANJE PO METODI OPTIMIRANJA DONJE I GORNJE GRANICE NEPOZNATIH

Njegoslav VUKOTIĆ — Beograd*

Sva mjerenja sa kojima se ulazi u izravnanje nalaze se u nekim unaprijed datim granicama pa se umjesto jednog podatka mjerenja mogu uzeti dva koja pretstavljaju donju i gornju granicu intervala u kome se nalazi najvjerovatnija vrijednost mjerene veličine. Sve što je izvan tog intervala smatraće se grubom greškom. Tako se npr. umjesto pravca α mogu uzeti dva pravca $\alpha + \Delta\alpha$ i $\alpha - \Delta\alpha$ gdje $\Delta\alpha$ može da predstavlja dozvoljeno odstupanje. Time se oko najvjerovatnije vrijednosti tražene veličine obrazuje prostor rješenja, koji je konveksan i za koji se traži minimalna i maksimalna vrijednost nepoznate. Nepoznate su na taj način takođe u ograničenom intervalu iz koga se može dobiti podatak o veličini odstupanja od najvjerovatnije vrijednosti, tj. dobiti ocjena tačnosti poslije izravnanja. Pod posebnim uslovima može se dobiti i ocjena tačnosti prije izravnanja tj. ocjena tačnosti a priori [1].

Izravnanje se izvodi uz minimiziranje (maksimiziranje) jedne nepoznate x tj. traži se Min $_{(max)}$ x_i uz uslove koji su različiti i koji će nadalje biti obrađeni za posredno i uslovno izravnanje.

1. POSREDNO IZRAVNANJE

Polazeći od jednačina popravaka (1) gdje je A matrica dimenzija (m, n) a v, x

$$v = A_x - f, \tag{1}$$

i f vektori, može se izgraditi konveksni poliedar uvodeći gornje i donje granice mjerenih veličina. Funkcija cilja se može birati prema potrebi, međutim ukoliko se traže najvjerovatnije vrijednosti nepoznatih x tada će funkcija cilja za jednu nepoznatu x_i biti jedamput Min x_i a drugi put Max x_i. Najvjerovatnija vrijednost nepoznate x_i bit će [4]:

$$x_{daf} = \frac{\text{Min}\, x_i + \text{Max}\, x_i}{2} \tag{2}$$

Ako se za popravke v uvedu donje i gornje granice (d i g) jednačine (1) se mogu pisati u obliku nejednačina:

* Adresa autora: dr Njegoslav Vukotić, dipl. inž., Republička geodetska uprava SR Srbije, Beograd, ul. Cara Dušana 1.

$$f + d \leq Ax \leq f + g, \tag{3}$$

odnosno:

$$Ax \leq f + g, \tag{4}$$

$$Ax \geq f + d. \tag{5}$$

U obliku problema linearnog programiranja može se pisati ovako:

$$\text{Max } x_i^T \tag{6}$$

uz uslove:

$$Ax \leq f + g, \tag{7}$$

$$-Ax \leq -f - d, \tag{8}$$

gdje je:

$$x_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \cdots i - \text{ti red} \tag{9}$$

odnosno:

$$\text{Min } x_i^T \tag{10}$$

uz uslove:

$$Ax \geq f + d. \tag{11}$$

$$-Ax \geq -f - g, \tag{12}$$

S obzirom na mogućnost da se pojave negativne vrijednosti nepoznatih jer se radi o jednačinama popravaka koje se odnose na koordinatne sisteme sa koordinatnim početkom u približnoj vrijednosti svake nepoznate, (n-dimenzionalni prostor), ne uvode se ograničenja nenegativnosti.

Tako postavljen problem je u stvari model [2], (21) i (22) tj. dual kanonskog problema. Kako je m > n rješavaće se kao kanonski problem.

Ako se napiše da je

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A \\ -A \end{bmatrix} \tag{13}$$

i

$$r = \begin{bmatrix} f + g \\ -f - d \end{bmatrix} \tag{14}$$

modeli (6), (7), (8) i (10), (11), (12) će biti:

$$\text{Max } x_i^T \tag{15}$$

uz uslove

$$\bar{A}x \leq r \tag{16}$$

odnosno

$$\operatorname{Min} x_i^T \tag{17}$$

uz uslove

$$-\bar{A}x \geq -r. \tag{18}$$

Dual ovoga problema je kanonski problem:

$$\operatorname{Min} r^T Y \tag{19}$$

uz uslove

$$\bar{A}^T Y = x_i, \tag{20}$$

$$Y \geq 0, \tag{21}$$

odnosno

$$\operatorname{Max} - r^T Y \tag{22}$$

uz uslove

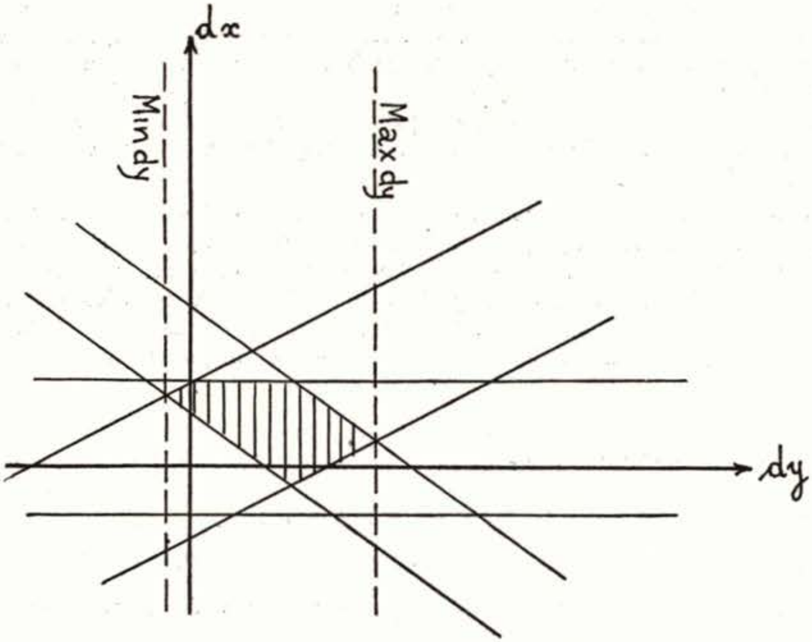
$$-\bar{A}^T Y = x_i, \tag{23}$$

$$Y \geq 0. \tag{24}$$

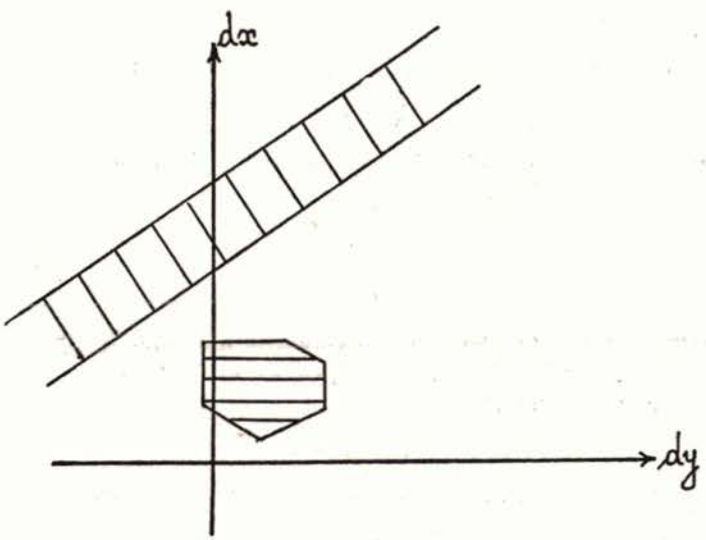
Time je postavljen primarni i dualni problem. Kako je uvijek $m > n$ rješavat će se kao kanonski problem sa funkcijom cilja čiji su koeficijenti vrijednosti gornjih i donjih granica i matricom $\bar{A}$ koja se sastoji od transponiranih matrica A i — A. Vektor slobodnih članova ima jedinicu na mjestu koje odgovara mjestu nepoznate x. Za svaku nepoznatu traži se minimum i maksimum i to se ponavlja onoliko puta koliko ima nepoznatih. Modeli (19), (20), (21) i (22), (23), (24) ostaju nepromjenjeni izuzev vektora x u kome se jedinica premješta na mjesto koje odgovara traženoj nepoznatoj. Za (19), (20) i (21) šematski se može prikazati početna SIMPLEX tabela (bez početnog rješenja) na slijedeći način:

$$\begin{array}{cc|c} f+g & -f-d & \\ \hline A^T & -A^T & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \end{array}$$

Problem nema rješenje ako dati uslovi ne čine konveksni poliedar a to će se desiti u slučaju da postoji gruba greška. Grafički se, za jednu nepoznatu, u lokalnom koordinatnom sistemu može ovako prikazati (sl. 1).



Slika 1.



Slika 2.

Ukoliko postoji gruba greška dobit će se ovakva slika (sl. 2), i problem nema rješenje.

Jednačine popravaka (1) su uzete kao osnov za izravnanje po metodi izravnanja donje i gornje granice nepoznatih. Time se pretpostavlja da su izvršene sve pripreme i da se imaju gotove jednačine popravaka spremne za izravnanje. Nejednačine (7), (8) uzete kao jednačine predstavljaju skup parova paralelnih hiperravni. Ukoliko se dati pravac ili strana oslanjaju na datu tačku to su paralelne prave. Prostor rješenja za moguć problem pretstavlja na taj način konveksan skup.

Korišćenje jednačina popravaka je neophodno kada se ova metoda primjenjuje samo za traženje grubih grešaka a izravnanje će se sprovesti po metodi najmanjih kvadrata. Tako se kontrolišu kako sama mjerenja tako i sve druge greške nastale zbog pogrešno upisanih podataka. Ukoliko cilj primjene ove metode nije samo traženje grubih grešaka tada se može formirati i drugačiji skup uslova i izbjeći obrazovanje jednačina popravaka.

2. USLOVNO IZRAVNANJE

Ako se pođe od opšte formule uslovnog izravnanja

$$\varphi_i(L_1 + v_1, L_2 + v_2, \ldots, L_n + v_n = 0, \tag{25}$$

gdje je $i = 1, 2, \ldots, m$ i umjesto $L_i + v_i$ piše navjerovatnija vrijednost $\bar{x}_i$ dobit će se

$$\varphi_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n) = 0 \tag{26}$$

tj. mogu se, sa dovoljnom tačnošću, koristiti jednačine

$$A\bar{x} = 0. \tag{27}$$

Vrijednosti $\bar{x}$ moraju biti u nekim zadatim granicama

$$d_i \leq \bar{x}_i \leq g_i \tag{28}$$

pa se uslovi problema linearnog programiranja mogu pisati

$$A\bar{x} = 0, \tag{29}$$

$$-\bar{x} \leq -d, \tag{30}$$

$$\bar{x} \leq g. \tag{31}$$

Funkcija cilja je ista kao kod posrednog izravnanja. Na ovako postavljen model ne stavljaju se ograničenja na predznak promjenljivih.

Uvođenjem novih nepoznatih:

$$x = \bar{x} - d \tag{32}$$

dobit će se n nejednačina manje. Nejednačine (28) sada glase:

$$o \leq x \leq g - d, \tag{33}$$

a matematički model je:

Naći:

$$\text{Max } x_i \tag{34}$$

uz uslove:

$$Ax = w, \tag{35}$$

$$x \leq g - d, \tag{36}$$

$$x \geq o, \tag{37}$$

gdje je:

$$w = -Ad. \tag{38}$$

Ovaj model predstavlja opšti problem linearnog programiranja. Može se svesti na kanonski uvođenjem dodatnih nepoznatih U koje se ne pojavljuju u funkciji cilja.

Naći:

$$\text{Max } x_i \tag{39}$$

uz uslove

$$Ax = w, \tag{40}$$

$$x + u = g - d, \tag{41}$$

$$x, u \geq o. \tag{42}$$

Karakteristika ovog modela je da ispod prvih m jednačina ima dvije jedinične matrice dimenzija (n, n). Šematski se može ovako prikazati:

$$\begin{array}{c} \\ m \\ n \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cc} n & n \end{array} \\ \left|\begin{array}{c:c} A & O \\ \hdashline I & I \end{array}\right| \end{array}
=
\begin{array}{c} \\ \left|\begin{array}{c} W \\ \hdashline g-d \end{array}\right| \end{array}$$

3. OCJENA TAČNOSTI A POSTERIORI

Po izvršenom računanju pored najvjerovatnijih vrijednosti nepoznatih koje su po formuli (2):

$$x_{i\,def} = \frac{\text{Min } x_i - \text{Max } x_i}{2}$$

može se sračunati i ocjena tačnosti a posteriori. Ako se vrijednost tražene veličine nalazi u granicama:

$$\Delta x = \text{Max } x_i - \text{Min } x_i, \tag{43}$$

tada je najveće moguće odstupanje od najvjerovatnije vrijednosti $x_{i\,def}$:

$$\Delta x_{i\,def} = \frac{\mathrm{Max}\, x_i - \mathrm{Min}\, x_i}{2} \qquad (44)$$

Veličina $\Delta x_{i\,def}$ zavisi direktno od uvedenih granica.

4. OCJENA TAČNOSTI A PRIORI

Prilikom priprema za mjerenja na nekoj mreži od posebne je stručne i ekonomske važnosti unaprijed znati potrebnu tačnost kako mjerenja tako i dobivenih rezultata. Ako se unaprijed postavi zahtjev tačnosti mjerenih veličina može se, koristeći iste matematičke modele, sračunati očekivana tačnost nepoznatih. Da bi se računanje sprovelo potrebno je imati približne vrijednosti nepoznatih što može izgledati kao nemoguć uslov, međutim, to se lako može ispuniti ako se uzmu približne vrijednosti sa projekta mreže jer se ne računaju tačne vrijednosti nepoznatih već njihove granice u kojima će se kretati po izvršenom opažanju i računanju. U slučaju da postoji stara mreža koju treba obnoviti (što je npr. slučaj u našoj zemlji) kao i planovi krupne razmjere, približne vrijednosti se mogu uzeti sa tačnošću koja će sigurno zadovoljiti.

Tačnost mjerenih veličina se može uzeti prema uslovima propisanim pravilnicima za premer, prema raspoloživim instrumentima ili prema iskustvu. Po dobivenom rezultatu moguće je ocjeniti mjerenja koja ne zadovoljavaju po tačnosti ili za koja su date prestroge granice. Time se dobiva mogućnost da se planira i da se optimalno iskoristi postojeći instrumentarij.

5. PRIMJENA NA IZRAVNANJE SA GREŠKAMA DATIH VELIČINA

Ako se raspolaže greškama datih veličina odredit će se njihove donje i gornje granice čime će se povećati broj uslova sa kojima se ulazi u izravnanje, i to će biti jedina izmjena. Sve ostalo ostaje isto, kako matematički model tako i njegova obrada.

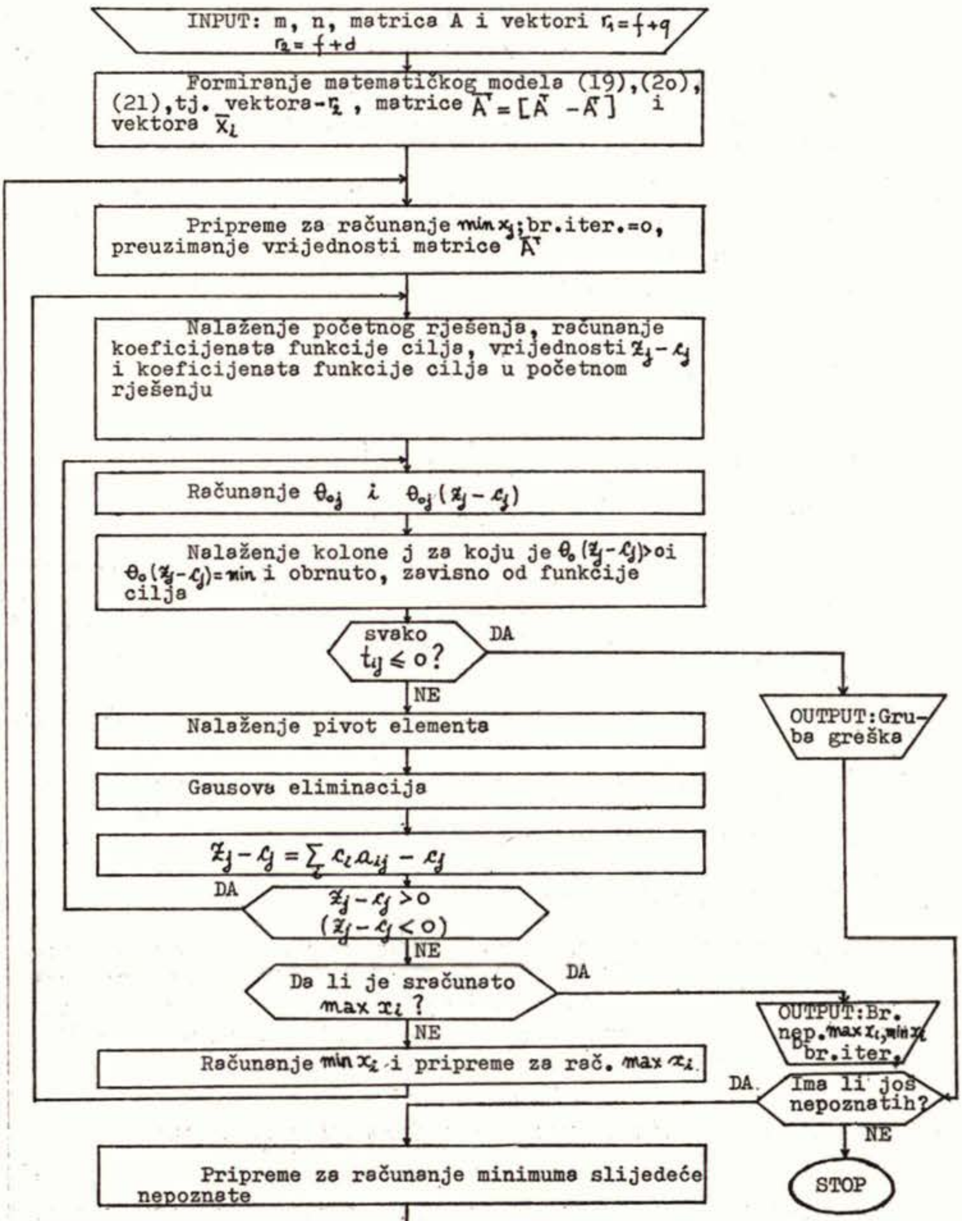
Program za računanje je pisan u programskom jeziku FORTRAN IV i nazvan je SKANON (SIMPLEX-kanonski).

6. ALGORITAM PROGRAMA SKANON (vidi str. 105)

7. KARAKTERISTIKA PROGRAMA SKANON

1. Program SKANON računa min x_i, max x_i i $x_{i\,def}$ za svaku nepoznatu po matematičkim modelima (19), (20), (21) i (22), (23), (24).
2. INPUT: Dimenzije matrice A: m i n, elementi matrice A i vektor gornjih i donjih granica r.
3. Matricu A transponira odmah prilikom čitanja, formira matricu $-A^T$ a drugu polovinu vektora r (tj. $r_{m+1}, \ldots, r_{2m}$) množi sa -1.
4. Za jednu nepoznatu x_i računa najprije minimum pa zatim maksimum. Slijedeću nepoznatu uzima mijenjajući elemente vektora x_i (tj. mijenjajući mjesto jedinici).

6. Algoritam programa SKANON



5. Računa po SIMPLEX metodi tako što za kanonski problem oblika (19), (20), (21) ili (22), (23), (24) nalazi početno rješenje. Matricu I ne memoriše, vektor J i koeficijenti funkcije cilja u početnom rješenju određuju se u programu čime se direktno dobiva početno rješenje:

$$X = o, \tag{45}$$

$$Y = B. \tag{46}$$

6. Za svaku kolonu se računa Θ_0 i množi sa $z_j - c_j$. Indeks reda za koji je $\Theta_0 = \min$ čuva se u memoriji za svaku kolonu kako se ne bi ponovo računao kod nalaženja pivot elementa.
7. Za komponente vektora x koje su jednake nuli uzima se — samo prilikom računanja Θ_0 — da su 0,0000001 radi pravilnog izbora Θ_0.
8. Utvrđeni su kriterijumi za nemoguć problem. To je:
   a) slučaj kada su za neko

   $$\Theta_0 (z_j - c_j) = \min \text{ (ili max)}$$

   svi elementi odgovarajuće kolone j

   $$t_{ij} \leq o.$$

   b) kad je broj iteracija veći od $\binom{m}{n}$
9. Program broji i štampa izvršene iteracije.
10. Greška u zaokruživanju izbjegnuta je direktnim pisanjem odgovarajućih vrijednosti ili uvođenjem ograničenja. Kod Gausove eliminacije piše se nula za elemente za koje se zna da su nula. Vrijednostima $\Theta_0 (z_j - c_j)$ dodjeljuje se nula ako je njihova apsolutna vrijednost manja od 0,0000001.
11. Koristi se jedan podprogram za računanje minimuma i maksimuma datog niza.
12. Štampa se matrica A, redni broj nepoznate, njen maksimum, minimum i definitivna vrijednost kao i broj izvršenih iteracija. Ako problem nema rješenje štampa se: gruba greška.

8. GREŠKA U ZAOKRUŽIVANJU

Teškoću u tačnom izvršenju računanja mogu izazvati veoma male vrijednosti nastale kao rezultat zaokruživanja izvršenih računanja. Tako npr. ako je $\Theta_0 (c_j - z_j) = 0$ ali se usled greške u zaokruživanju dobije vrlo mala vrijednost različita od nule može se desiti da se nepotrebno uđe u novu iteraciju. Da se ovo izbjegne može se za sve

$$|\Theta_0 (c_j - z_j)| \leq \varepsilon \tag{47}$$

gdje je ε vrlo mala vrijednost zavisna od osobina računara, pisati:

$$\Theta_0 (c_j - z_j) = 0. \tag{48}$$

Time se ništa ne gubi čak i ako to nije greška u zaokruživanju jer se vrijednost programa

$$z = z_0 + \Theta_0 (c_j - z_j)$$

neće mnogo poboljšati.

Primjer: Problem maksimuma [2], (29) se može riješiti kao kanonski problem minimuma koji je njegov dual:

$$\text{Min } 25y_1 - 25y_2 - 25y_3 + 25y_4 + y_5 + y_6$$

uz uslove

$$\begin{aligned} -y_1 - y_2 - 5y_3 + 5y_4 + y_5 - y_6 &= 1, \\ 5y_1 - 5y_2 - y_3 - y_4 - y_5 + y_6 &= 0, \\ y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6 &\geq 0. \end{aligned} \tag{49}$$

Početno rješenje će se naći po modelu:

$$\text{Max } J^T AY$$

uz uslove:

$$AY + IX = B,$$

$$X, Y \geq 0.$$

Početna tabela izgleda ovako:

	4	−6	−6	4	0	0		0	0
0	−1	−1	−5	$\boxed{5}$	1	−1	1	1	0
0	5	−5	−1	−1	−1	1	0	0	1
$z_j - c_j$	−4	6	6	−4	0	0	0	0	1

Pivot element je $a_{14} = 5$. Poslije prve iteracije bit će:

	4	−6	−6	4	0	0		0	0
4	−0,2	−0,2	−1	1	0,2	−0,2	0,2	0,2	0
0	$\boxed{4{,}8}$	−5,2	−2	0	−0,8	0,8	0,2	0,2	1
$z_j - c_j$	−4,8	5,8	2	0	0,8	−0,8	0,8	0,8	0

Pivot element je $t_{21} = 4{,}8$.

Konačna tabela sa sračunatim početnim rješenjem dobije se poslije druge iteracije:

	4	−6	−6	4	0	0		0	0
4	0	−0,42	−1,08	1	$\frac{0{,}8}{4{,}8}$	$-\frac{0{,}8}{4{,}8}$	0,21	0,21	0,04
4	1	−1,08	−0,42	0	$-\frac{0{,}8}{4{,}8}$	$\frac{0{,}8}{4{,}8}$	0,04	0,04	0,21
$z_j - c_j$	0	0	0	0	0	0	1	1	1

Prelaskom na zadati problem dobit će se odmah optimum:

$$\text{Max } x_1 = 6{,}25,$$

jer se u redu $z_j - c_j$ ne pojavljuje ni jedna vrijednost veća od nule (vektor x i matrica I se više ne pojavljuju).

Bez ograničenja (48) kompjuter će poslije druge iteracije u redu $z_j - c_j$ dobiti u petoj i šestoj koloni vrijednosti različite od nule i nastaviti računanje nove iteracije.

9. PRIMJER

Primjer 1: Za određivanje koordinata jedne tačke presjecanjem naprijed (primjer iz knjige M. Mitića [3], str. 98a, b, c) date su jednačine popravaka:

$$\begin{aligned} -17dy &= -2 \\ 15dx + 15dy &= -7 \\ -15dx + 15dy &= 5 \\ -21dy &= 3 \\ 15dx + 11dy &= -15 \\ -15dx + 11dy &= 13. \end{aligned}$$

Ako se uvedu ograničenja:

$$g = 20'',$$

$$d = -20'',$$

bit će:

$$r^T = \{18\ 13\ 25\ 23\ 5\ 33\ -22\ -27\ -15\ -17\ -35\ -7\}.$$

Po izvršenom računanju dobit će se slijedeći rezultat:

Br. nepozn.	Max X (I)	Min X (I)	X (I)	Br. iter.
x (1)	0.40	— 1.73	— 0.67	7
x (2)	0.81	— 1.06	— 0.12	7

Primjer 2: Za određivanje koordinata dvije tačke istovremeno uzet je primjer iz iste knjige, [3], str. 104a, b, c, d, e, f, g, h, i, uz ograničenja koja su ista kao u primjeru 1, dobiveni su slijedeći rezultati:

46.00	10.00	0.00	0.00	19.00
— 30.00	25.00	0.00	0.00	21.00
— 47.00	— 35.00	40.00	35.00	28.00
16.00	— 34.00	— 14.00	— 12.00	19.00
53.00	30.00	— 14.00	— 12.00	19.00
— 23.00	37.00	— 14.00	— 12.00	14.00
0.00	0.00	— 12.00	35.00	22.00
— 40.00	— 35.00	42.00	38.00	25.00
14.00	12.00	— 24.00	26.00	20.00
14.00	12.00	— 46.00	— 21.00	19.00
14.00	12.00	29.00	— 43.00	16.00

d = — 21.00 — 19.00 — 12.00 — 21.00 — 21.00 — 26.00 — 18.00
— 15.00 — 20.00 — 21.00 — 24.00

Br. nepozn.	Max X (I)	Min X (I)	X (I)	Br. iteracija
x (1)	.48	—.46	.01	14
x (2)	.55	—.60	—.03	11
x (3)	.55	—.59	—.02	13
x (4)	.73	—.62	.05	12

ZAHVALA

Obrada problema i sva računanja kako za ovaj tako i za rad »Izravnanje po metodi najmanje sume apsolutnih vrijednosti, popravaka«, Geodetski list, 1981, 10—12, 288—294 izvršeni su kod Bayerische Akademie der Wissenschaften-Deutsches Geodätisches Forschungsinstitut-I Abteilung-München na računaru CDC CYBER 175 u računskom centru Leibniz-Rechenzentrum.

Direktoru Deutsches Geodätisches Forschungsinstituta akademiku prof. dr. Siglu i na ovaj način se najljepše zahvaljujem na punom razumijevanju i podršci prilikom mog rada i boravka u Minhenu.

LITERATURA

[1] Vukotić Nj.: Primjena linearnog programiranja u računu izravnanja, doktorska disertacija, Sarajevo 1981.

[2] Vukotić Nj.: Teorija linearnog programiranja, Geodetska služba 1981. 31, 1—9.

[3] Mitić M.: Geodezija II, skripta, Beograd 1963.

[4] Reinhart E.: Exakte Abschätzung von Maximalfehlern aus vorgegebenen Toleranzen der Beobachtungsgrössen, DGK, Reihe C, sv. 211, München 1975.

REZIME

U radu je obrađeno izravnanje po metodi optimiranja donje i gornje granice nepoznatih upotrebom linearnog programiranja. Umjesto najvjerovatnijih vrijednosti mjerenih veličina za ovo izravnanje se koristi sektor omeđen zadatim granicama ($\pm\sigma$, $\pm 2\sigma$, $\pm 3\sigma$ ili nekim drugim). Prostor u kome se nalaze vrijednosti nepoznatih veličina, definiran na taj način, ako je problem moguć, je konveksni poliedar (nije ni krug ni elipsa) a najvjerovatnija vrijednost nepoznate je aritmetička sredina gornje i donje granice poliedra. Ovo izravnanje potiče od E. Reinharta i pogodno je za rješavanje mnogih geodetskih zadataka, ocjenu tačnosti a priori i a posteriori, izravnanje sa greškama datih veličina i dr.

ZUSAMMENFASSUNG

Es ist Ausgleichung nach der Methode der Optimierung der obere und untere Grenze der Unbekannten mittels Linear Programmierung gegeben. Anstatt der plausiebersten Werten der Messgrössen für diese Ausgleichung benutzt man ein Sektor der mit vorgegebenen Grenzen begrentzt ist ($\pm\sigma$, $\pm 2\sigma$, $\pm 3\sigma$ oder anderen). Die Unbekannten, die an solche Weise definiert sind, wenn das Problem möglich ist, liegen jetzt in konvexen Polyeder (nicht im Kreis oder Ellipse). Die erwartene Wert der Unbekannte ist eine arithmetische Mittel der obere und untere Grenze des Polyeders. Diese Ausgleichung, der zuerst von E. Reinhart angewandt ist, ist für viele geodätische Aufgaben, a priori und a posteriori Abschätzung, Ausgleichung mit Fehlern der gegebenen Grössen u.a. anwendbar.