UDK (528.13+519.242.5):528.33
Originalan znanstveni rad

PRIMENA OPTIMIZACIJE KOD PROJEKTOVANJA GEODETSKIH MREŽA*

Toša NINKOV — Beograd**

1. UVOD

U članku će se razmatrati dobijanje optimalnog »projekta drugog reda« [8] uz uslov da je optimalni projekat prvog reda usvojen. U tom slučaju konfiguraciona matrica $\underline{A}_{n,u}$ (n-broj planiranih opažanja u mreži, u-broj nepoznatih u mreži) se može smatrati poznatom. Matrica $\underline{P}_{n,n}$ planiranih opažanja, korelaciona matrica nepoznatih u mreži $\underline{Q}_{x(u,u)}$ i konfiguraciona matrica $\underline{A}_{n,n}$ nalaze se u međusobno poznatoj vezi

$$\underline{A}^{T}_{u\cdot n}\,\underline{P}_{n\cdot n}\,A_{n\cdot u} = \underline{Q}^{-1}_{x_{u\cdot u}} \qquad (1)$$

Kod određivanja optimalnog projekta II reda polazi se od pretpostavke da su matrice $\underline{A}$ i $\underline{Q}$ poznate, ili mogu biti određene i tada je za rešenje sistema potrebno odrediti nepoznate elemente matrice $\underline{P}$. Za rešavanje tog problema u geodetskoj literaturi najveću primenu su našle metode direktnog, kanonskog i simpleks rešenja ili, pak, kombinacija tih metoda.

2. METODE ODREĐIVANJA OPTIMALNOG PROJEKTA II REDA

Metode direktnog, kanonskog ili simpleks rešenja detaljno su razrađene u [13], odnosno [14] i o njima neće biti opširnije pisano.

Dobijanje vrednosti pojedinih težina planiranih opažanja iz (1) moguće je ostvariti dekompozicijom izraza (1) (metoda direktnog rešenja) pomoću KHATRI-RAO proizvoda [11]. Tada se dobija sistem linearnih jednačina sledećeg oblika

$$\underset{(u^2\cdot n)(n\cdot 1)}{(\underline{A}^{T}\cdot\underline{A}^{T})\,\underline{p}} = \underline{U}\underline{p} = \underset{(u^2\cdot 1),}{\underline{q}} \qquad (2)$$

* Primeri obrađeni u ovom članku urađeni su uz stručnu pomoć prof. dr G. Schmitta sa Univerziteta u Karlsruehu i ovim putem mu se još jednom najsrdačnije zahvaljujem.

** Mr Toša Ninkov, dipl. inž. Građevinski fakultet — Institut za geodeziju, Beograd, Bulevar revolucije 73.

gde su:

$\underline{p}$ — vektor traženih težina

$\underline{q}$ — vektor dobijen preslikavanjem gornje desne polovine matrice $\underline{Q}_x$ počev od dijagonalnog člana.

Rešenjem sistema (2) dobijaju se vrednosti nepoznatih težina planiranih opažanja. Matrica Q_x može imati oblik $Q_x = E$ (E — jedinična matrica ili $Q_x = TK$ (TK-Taylor-Karmanova struktura korelacione matrice [13] a oba oblika obezbeđuju homogenost i izotropiju mreže.

Metoda kanonskog rešenja je veoma pogodna za optimizaciju slobodnih geodetskih mreža kada je rang (A) < min(m,n). U tom slučaju rang korelacione matrice rang $(Q_x) = r < n$, odnosno matrica koeficijenata normalnih jednačina je singularna

$$\underline{A}^T \underline{P}\, \underline{A} = \underline{N} = (\underline{Q}_x)_r^- \tag{3}$$

gde — $(Q_x)_r^-$ označava simetričnu refleksivnu g-inverziju obično pseudo-inverziju $(Q_x)^+$ [11]. Kao teorijska osnova kanonskog rešenja je mogućnost dekompozicije singularnih i regularnih matrica pomoću njihovih sopstvenih vrednosti i sopstvenih vektora.

$$\underline{N} = (\underline{Q}_x)^{-1} = \underline{S}\, \underline{D}\, \underline{S}^T \tag{4}$$

$\underline{S}$ — matrica sopstvenih vektora matrice Q_x

$\underline{D}$ — dijagonala matrica sopstvenih vrednosti.

Iz (4) se može dobiti da je

$$\underline{D} = \underline{S}^T \underline{A}^T \underline{P}\, \underline{A}\, \underline{S} = (\underline{AS})^T \underline{P}\, (\underline{AS}) = \underline{Z}^T \underline{PZ}. \tag{5}$$

Sada je dobijen problem adekvatan sa (1) kada je potrebno odrediti nepoznate elemente dijagonalne matrice težina $\underline{P}$. Problem se rešava kao kod direktnog rešenja primenom Khatri-Rao proizvoda.

Rešavanjem problema optimizacije pomoću direktnog ili kanonskog rešenja ponekad se za optimalnu težinu nekog merenog elementa dobija negativna vrednost. Očigledno realizacija takvog rešenja nije moguća i u tim slučajevima mora se tražiti novo regularno rešenje. Da bi se izbegla ta mogućnost pojave negativnih težina može se sistem linearnih jednačina (2) rešiti uz pomoć Simpleks algoritma uvodeći u obzir uslov nenegativnosti težina. Simpleks algoritam je metoda lineranog programiranjja, gde se vrši minimizacija kriterijum funkcije uz uslov ispunjenja određenih ograničenja za nepoznate. U ovom slučaju cilj funkcija bi mogla biti

$$R = \sum_{i=1}^{n} p_i = p_1 + p_2 + \ldots + p_n \rightarrow \max. \tag{6}$$

Uslovı ograničenja će imati oblik

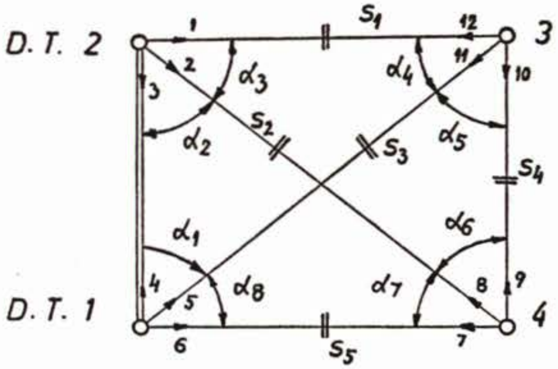
$$\begin{aligned} \underline{U}\, \underline{p} &\leq \underline{q} \\ p_i &\geq 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Rešenjem ovog problema linearnog programirnja dobijaju se vrednosti nepoznatih težina planiranih opažanja, koja ne mogu imati negativne vrednosti.

Ove tri metode optimizacije se najčešće koriste u do sada publikovanim radovima iz ove oblasti geodezije, mada se mogu naći i neke njihove kombinacije. U ovom radu biće ilustrovani primeri primene sve tri metode na jednoj elementarnoj geodetskoj mreži.

3. PRIMERI

Kao pogodan primer za ilustraciju sve tri metode optimizacije uzet je jedan geodetski četverougao sa dve date i dve tražene tačke (sl. 1) u kojem su mereni svi pravci ili uglovi, kao i sve dužine.

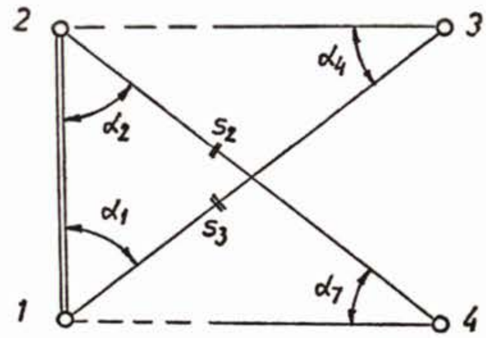


Sl. 1

Za ilustraciju kanonskog rešenja neka su u mreži planirana merenja 8 uglova i 5 dužina. Apriori usvojena korelaciona matrica neka ima oblik $Q_x = E$ (specijalan oblik Gausovo homogene i izotropne mreže [13]). Kanonskim rešenjem optimalnog projekta drugog reda dobijeni su rezultati prikazani grafički i tabelarno na sl. 2.

Optimalan odnos težina

$p_{s2} = 0.0002$
$p_{s3} = 0.0002$
$p\alpha_1 = 0.0123$
$p\alpha_2 = 0.0123$
$p\alpha_4 = 0.0123$
$p\alpha_7 = 0.0123$

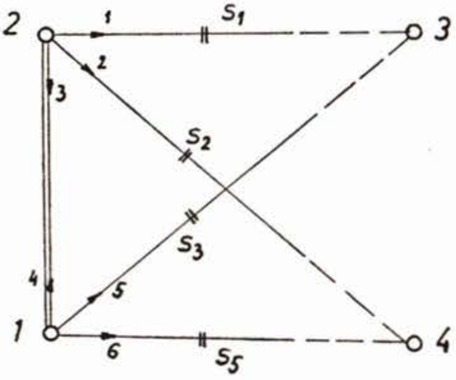


Sl. 2

Metoda direktnog rešenja ilustrovaće se na istoj mreži samo što će u ovom slučaju umesto uglova biti mereni pravci koji su svrstani u 4 grupe po stanicama. Dobijeni rezultati prikazani su grafički i tabelarno na sl. 3.

Optimalni odnos težina

$p_{s1} = 0.66667$
$p_{s2} = 0.40000$
$p_{s3} = 0.40000$
$p_{s5} = 0.66667$
$p\alpha_{GR \cdot 1} = 0.004935$
$p\alpha_{GR \cdot 2} = 0.004935$

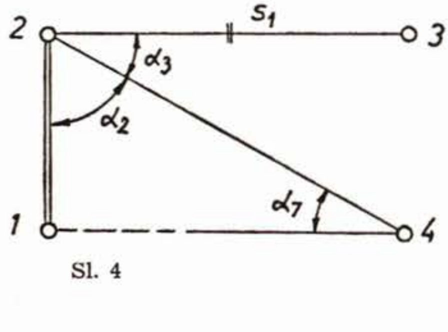


Sl. 3

Rešenje simpleks metodom ilustrovaće se u istoj mreži za slučaj kada su mereni svi uglovi i sve dužine. Na sl. 4 grafički i tabelarno su prikazani rezultati optimizacije.

Optimalni odnos težina

$p_{s1} = 1.000$
$p\alpha_2 = 0.0062$
$p\alpha_3 = 0.0062$
$p\alpha_7 = 0.0123$



Sl. 4

4. ZAKLJUČAK

Na ovaj način prikazani su rezultati optimizacije sve tri metode na elementarnim mrežama. Dobijeni rezultati neće se posebno analizirati već mogu samo poslužiti kao ilustracija novih numeričkih metoda rešavanja problema optimalnog projektovanja geodetskih mreža.

LITERATURA

[1] Mihailović K.: Geodezija II, I i II deo, Građevinska knjiga, Beograd 1974. i 1978.
[2] Stipanić E.: Uvod u matrični račun, Predavanja na postdiplomskom studiju.
[3] Jovanović M.: Elementi teorije verovatnoće i matematičke statistike, Predavanja na postdiplomskom studiju.
[4] Dupraz H. und Niemeier W.: »Beurteilungs Kriterium für Geodätische Netze, II Int. Symposium über Deformationsmessungen, Bonn, 1978.
[5] "Perlez, H.: Criteria for Reliability of Geodetic Networks" IAG. Symposium on Optimization of Design and Computation of Control Networks, Sopron, 1977.
[6] Wenzel, H.: »Zur Optimierung von Schwerenetzen« ZfV, 102, 1977.
[7] Baarda, N.: "Realibility and Precision of Networks", WII Internationaler Kurs für Ingenieurmessungen hoher Precision, Darmstadt, 1976.
[8] Schmitt G.: »Zur Numerik der Gewichtsoptimierung in Geodätischen Netzen«, DGK No. 256, München, 1979.
[9] Hadley B.: "Nnolinear and Dynamic Programming".
[10] Pelzer H.: »Einige Aspekte der Genauigkeitsoptimierung in geodätischen Netzen«, Allgemeine Vermessungs-Nachrichten 79, (1972) S. 350-361.
[11] Rao C. R., Mitra, S. K.: Generalized Inverses of Matrices and its Applications, New York, 1971.
[12] Schaffrin B., Grafarend E., Schmitt G.: Kanonisches Design Geodätischer Netze I, Manuscripta Geodaetica 1, S. 263—306, 1978.
[13] Schmitt, G.: Experiences with the Second Order Design Problem in Theoretical and Pracitcal Geodetic Networks. IAG International Symposium on Optimization of Design and Computation of Control Networks, Sopron, 1977.
[14] Schmitt, G.: Gewichtsoptimierung bei Mehrpunkteinschaltung mit Streckenmessung, Allgemeine Vermessungs — Nachrichten 85, S. 1—15, 1978.
[15] Schmitt, G., Grafarend, E., Schaffrin, B.: Kanonisches Design Geodätischer Netze II, Manuscripta Geodaetica 3, S. 1—22, 1978.

REZIME

U članku se daje prikaz prvih iskustava sa primenom optimizacije geodetskih mreža u Jugoslaviji. Analiziraju se tri međusobno nezavisne metode rada, koje imaju najveću primenu u svetskoj literaturi. Sve tri metode ilustruju se na optimizaciji elementarnih mreža.

ABSTRACT

A review of first experience with applying geodetic network optimisation in Jugoslavia. Some examples have been tested by thre methods presented in reference books and retrospective of the results obtained have been presented.

Primljeno: 1981-09-20