UDK 528.411.063.1
Originalan znanstveni rad

UKLAPANJE SAMOSTALNE MREŽE U DRŽAVNU TRIGONOMETRIJSKU MREŽU

Ivan MOLNAR — Novi Sad*

Ukoliko se trigonometrijska mreža može transformirati i ima više od tri tačke sa datim koordinatama u državnom i samostalnom koordinatnom sistemu, a postoji posebno izražen zahtev, da se tačke samostalne mreže na najbolji mogući način uklope u tačke državne trigonometrijske mreže, tada, u odnosu na okolnosti da li je, ili nije, u samostalnoj mreži merena osnovica, valja postupiti na sledeći način.

Kad je u samostalnoj mreži merena osnovica, tada koordinatni sistem ove mreže treba rotirati (obrtati) i translatirati (paralelno pomerati) tako, da linearno odstupanje koordinata tačaka dvaju sistema bude minimum. Definitivne koordinate tačaka samostalne mreže treba odrediti u tako rotiranom i paralelno pomerenom koordinatnom sistemu.

Ako sa x' i y' obeležimo koordinate u državnom, a sa x i y koordinate u samostalnom sistemu, te ako pomeranje koordinatnog početka samostalnog u odnosu na državni sistem, u pravcu koordinatne osovine x' označimo sa ξ, pomeranje u pravcu y' sa η, a meru obrtanja u odnosu na državni sistem obeležimo sa Θ, tada se koordinate tačke državnog sistema mogu izraziti, na osnovu koordinata tačke samostalnog sistema, primenom zavisnosti [1],

$$\begin{Vmatrix} x' \\ y' \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \xi \\ \eta \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} \cos\Theta & -\sin\Theta \\ \sin\Theta & \cos\Theta \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix} \tag{1}$$

Obzirom da su dužine strana samostalne trigonometrijske mreže izvedene na osnovu merene osnovice, to jedinica razmere dva sistema nije ista. Otuda je neophodno u računanja uvesti novi činilac, kojim će se prevazići različitost jedinice razmere dva sistema, tzv. koeficijent etalona ε. Ova intervencija se u (1) manifestuje na taj način, što se koordinate samostalne mreže množe sa koeficijentom etalona uvećanim za jedinicu.

$$\begin{Vmatrix} x' \\ y' \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \xi \\ \eta \end{Vmatrix} + (1 + \varepsilon) \begin{Vmatrix} \cos\Theta & -\sin\Theta \\ \sin\Theta & \cos\Theta \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix} \tag{2}$$

Kako je ugao rotacije Θ mali (izražava se u dimenziji sekunada), to se u (2) mogu vršiti uprošćenja; $\sin\Theta \approx \Theta$ i $\cos\Theta \approx 1$

* Adresa autora: Dr. Ivan Molnar, dipl. inž., Pokrajinska geodetska uprava, Novi Sad, Bul. M. Tita 16.

$$\begin{Vmatrix} x' \\ y' \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \xi \\ \eta \end{Vmatrix} + (1+\varepsilon) \begin{Vmatrix} 1 & -\Theta \\ \Theta & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix} \tag{3}$$

Sredimo jednačine (3) i zanemarimo proizvode $\varepsilon\Theta$. Dobijamo transformacione jednačine

$$\begin{Vmatrix} x' \\ y' \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \xi \\ \eta \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} \varepsilon & -\Theta \\ \Theta & \varepsilon \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix} \tag{4}$$

Zamislimo, sada, da koordinate državnog sistema predstavljaju rezultate merenja, a da koordinate samostalnog sistema označavaju približne vrednosti. Time, na osnovu (4), možemo uspostaviti jednačine linearnih odstupanja koordinata, nalik jednačinama popravaka merenja.

$$\begin{aligned} O_{xi} &= \xi - y_i\,\Theta + x_i\,\varepsilon + (x_i - x_i') \\ O_{yi} &= \eta + x_i\,\Theta + y_i\,\varepsilon + (y_i - y_i') \qquad i = 1, 2, \ldots, n \end{aligned} \tag{5}$$

odnosno, u matričnom obliku

$$o = A\,z + l \tag{6}$$

gde su

$$\underset{(1,2\,n)}{o^T} = \| o_{x1}\; o_{y1}\; o_{x2}\; o_{x2} \ldots o_{xn}\; o_{yn} \| \qquad \underset{(1,4)}{z^T} = \| \xi\; \eta\; \Theta\; \varepsilon \|$$

$$\underset{(4,2\,n)}{A^T} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 1 \\ -y_1 & x_1 & -y_2 & x_2 & \ldots & -y_n & x_n \\ x_1 & y_1 & x_2 & y_2 & \ldots & x_n & y_n \end{Vmatrix}$$

$$\underset{(1,2\,n)}{l^T} = \| (x_1 - x_1')\,(y_1 - y_1')\,(x_2 - x_2')\,(y_2 - y_2') \ldots (x_n - x_n')\,(y_n - y_n') \|$$

Treba naglasiti, da ovakva interpretacija matematičke obrade podataka ne predstavlja izravnanje u strogom smislu reči, nego, samo, analogiju sa postupkom izravnanja, obzirom da vrednosti linearnih odstupanja koordinata o nisu greške merenja, već njihove složene funkcije.

Zadovoljenjem uslova $o^T o$ = minimum, obrazujemo normalne jednačine

$$A^T A\,z + A^T\,l = 0 \tag{7}$$

gde su

$$A^T A = \begin{Vmatrix} n & o & -[y] & [x] \\ o & n & [x] & [y] \\ -[y] & [x] & [x^2 + y^2] & o \\ [x] & [y] & o & [x^2 + y^2] \end{Vmatrix}$$

$$(A^T\,l)^T = \| [x - x']\;[x - y']\;[x'\,y - x\,y']\;[x\,(x - x') + y\,(y - y')] \|$$

Rešenjem (7), određujemo najverovatnije vrednosti transformacionih koeficijenata

$$Z = \frac{1}{n\,[x^2 + y^2] - [x]^2 - [y]^2} \cdot \left\| \begin{matrix} [x^2 + y^2]\,[x' - x] + [y]\,[xy' - x'y] - [x]\,[x\,(x' - x) + y\,(y' - y)] \\ [x^2 + y^2]\,[y' - y] - [x]\,[xy' - x'y] - [y]\,[x\,(x' - x) + y\,(y' - y)] \\ [y]\,[x' - x] - [x]\,[y' - y] + n\,[xy' - x'y] \\ -\,[x]\,[x' - x] - [y]\,[y' - y] + n\,[x\,(x' - x) + y\,(y' - y)] \end{matrix} \right\| \tag{8}$$

Novotransformisane koordinate tačaka, iz samostalnog u državni koordinatni sistem, računamo na osnovu (4)

$$\left\| \begin{matrix} X' \\ Y' \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} \xi \\ \eta \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} \varepsilon & -\Theta \\ \Theta & \varepsilon \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\| \tag{9}$$

Transformacija koordinata tačaka samostalnog sistema na osnovu (9) označava zamisao, da je koordinatni sistem tačaka samostalne mreže paralelno pomeren za veličine ξ i η, koordinatni početak sistema rotiran za ugao Θ, zadovoljenjem uslova, da suma kvadrata linearnih odstupanja koordinata tačaka, samostalne i državne mreže, bude minimum.

Ako u smostalnoj mreži nije merena osnovica, nego je neka dužina trigonometrijskih strana preuzeta, odnosno izvedena, iz koordinata tačaka državne mreže, tada, imajući u vidu identičnost jedinice razmere samostalnog i državnog sistema, u jednačinama (2), (3), (4), (5), (6), (7) i (9) otpada koeficijent etalona ε. I u takvom slučaju, sva računanja vršimo na gore izloženi način, dok najverovatnije vrednosti preostalih transformacionih koeficijenata ξ, η i Θ, određujemo primenom sledeće zavisnosti

$$Z = \frac{1}{n\,(n\,[x^2 + y^2] - [x^2] - [y]^2)} \cdot \left\| \begin{matrix} (n\,[x^2 + y^2] - [x]^2)\,[x - x] - [x]\,[y]\,[y' - y] + n\,[y]\,[xy' - x'y] \\ -\,[x]\,[y]\,[x' - x] + (n\,[x^2 + y^2] - [y]^2)\,[y' - y] - n\,[x]\,[xy' - x'y] \\ n\,([y]\,[x' - x] - [x]\,[y' - y] + n\,[xy' - x'y]) \end{matrix} \right\| \tag{8a}$$

LITERATURA

[1] Kašanin, R.: Viša matematika I, Naučna knjiga, Beograd 1949.

[2] Mihailović, K.: Uklapanje lokalnih mreža u državni koordinatni sistem, Geodetska služba br. 1, str. 16—26, Beograd 1971.

[3] Mihailović, K.: Transformacija koordinata, Geodetska služba br. 17, str. 30—33, Beograd 1977.

[4] Molnar, I.: Tranformaciona računanja između osnovnih i državnih mreža, Geodetski list posvećen petom kongresu geodetskih inženjera i geometara Jugoslavije 1975., str. 61—67.

[5] Molnar, I.: Primena postupka izravnanja na nemerene rezultate, Zbornik radova Fakulteta tehničkih nauka, sveska 11, Novi Sad 1981.

REZIME

U radu je saopšten postupak preračunavanja koordinata tačaka, iz samostalnog u državni koordintni sistem, uz ograničenje, da sistemi nisu međusobno mnogo zakošeni. Predloženi način određivanja transformacionih koeficijenata ne predstavlja izravnanje u strogom smislu reči, nego, analogiju sa postupkom izravnanja po metodi posrednih merenja. Ovo stoga, što u računanjima ne figurišu greške merenja, već njihove složene funkcije.

ABSTRACT

This is a presentation of the procedure for calculations of points from local to state plane coordinate system, with limitation that misaligument between two systems not to be big. Suggested way of determining the transformation coefficients does not represent adjustment in a strong sense, this is but an application of indirekt measurement method of adjustment. This all is because in calculations does not take place measurement errors, but theirs complex functions.

Primljeno: 1981-10-12