UDK 528.142+528.143
Originalan znanstveni rad

O OCENI TAČNOSTI IZRAVNATIH VREDNOSTI MERENIH VELIČINA

Jovan STEVANOVIĆ — Beograd*

1. UVOD

Kod proste i opšte aritmetičke sredine se pored ocene tačnosti merenja dosta detaljno obrađuje i ocena tačnosti izravnatih vrednosti. Kod posrednog izravnavanja se velika pažnja poklanja oceni tačnosti izravnatih vrednosti za nepoznate. Međutim, nesrazmerno malo pažnje u našoj literaturi je posvećeno oceni tačnosti izravnatih vrednosti merenih veličina i kod posrednog i kod uslovnog izravnavanja, premda se može konstatovati da je u glavnom i ovaj problem postojećom teorijom obuhvaćen. Može se postaviti pitanje da li s obzirom na neke specifične probleme a naročito u okviru geodezije u inženjerstvu, ne bi bilo korisno ovaj problem nešto detaljnije tretirati, a posebno ako se imaju u vidu savremene mogućnosti automatske obrade podataka.

2. IZRAZI ZA OCENU TAČNOSTI IZRAVNATIH VREDNOSTI MERENIH VELIČINA

2.1. *Posredno izravnavanje*

Neka je obeleženo na uobičajen način:

l_i — merenjem određene vrednosti kojih ima ukupno n,

$\mathbf{L_i}$ — **izravnate vrednosti merenih veličina,**

l_{oi} — vrednosti za merne veličine dobivene za osnovu približnih vrednosti za nepoznate,

x, y, z, ... — nepoznate koje se određuju izravnavanjem, kojih ima ukupno k,

v_i — popravke izravnavanja.

Jednačine veze su:

$$L_i = l_i + v_i = f(x, y, z, \dots), \tag{1}$$

a nakon linearizovanja, može se napisati na uobičajen način:

* Adresa autora: dr Jovan Stevanović, dipl. inž., Geopremer, Beograd, Bulevar vojvode Mišića 39/3.

$$L_i = a_i x + b_i y + c_i z + \ldots + l_{0i}. \tag{2}$$

Na poznat način u matričnom obliku biće:

$$L = Ax + l_0. \tag{3}$$

Normalne jednačine imaju oblik:

$$A^* Q_l^{-1} Ax = A^* Q_l^{-1} (l - l_0) \tag{4}$$

ili

$$Nx = n. \tag{5}$$

Odavde je:

$$x = N^{-1} n = Q_x n \tag{6}$$

ili

$$x = Q_x A^* Q_l^{-1} (l - l_0), \tag{7}$$

pri čemu je

$$NN^{-1} = NQ_x = 1. \tag{8}$$

Zamenom nepoznatih datih izrazom (7) u (3) dobijamo:

$$L = AQ_x A^* Q_l^{-1} (l - l_0) + l_0 \tag{9}$$

ili, sa novom oznakom

$$L = T(l - l_0) + l_0. \tag{10}$$

Ovim izrazom su definisane jednačine prelaza sa merenih na izravnate vrednosti merenih veličina. Primenom pravila o rasprostiranju grešaka dobijamo:

$$Q_L = TQ_l T^* \tag{11}$$

odnosno

$$Q_L = AQ_x A^* Q_l^{-1} Q_l Q_l^{-1} AQ_x A^*. \tag{11}$$

Ovde je:

$$Q_l^{-1} Q_l = 1, \tag{12}$$

$$Q_x A^* Q_l^{-1} A = Q_x N = N^{-1} N = 1 \tag{13}$$

pa dobijamo

$$Q_L = AQ_x A^*, \tag{14}$$

odnosno

$$Q_L = AQ_x A^* Q_l^{-1} Q_l = TQ_l. \tag{15}$$

Upoređivanjem izraza (15) sa izrazom (10) uočavamo da i u jednom i u drugom figurira na isti način matrica T, tj. matrica koeficijenata transformacije iz sistema merenih u sistem izravnatih vrednosti.

2.2. Uslovno izravnavanje

Neka i ovde l_i. v_i i L_i imaju napred navedeno značenje, i neka ih je isto ukupno n. Neka je još, zbog specifičnih potreba kod ocene tačnosti uslovnog izravnavanja, l_{oi} približna vrednost merene veličine, a l_i' priraštaj, pri čemu je: $l_i = l_{oi} + l_i'$. Uslovnih jednačina neko je ukupno r.

Uslovne jednačine, nakon linearizovanja, su:

$$A^*v + w = 0 \tag{16}$$

pri čemu je

$$w = l(l_0) + A^*l' = A_0 + A^*l'. \tag{17}$$

Postavljanje uslova minimuma na poznat način daje jednačine popravaka u funkciji korelata K:

$$v = Q_l AK. \tag{18}$$

Zamena popravaka u uslovne jednačine daje normalne jednačine:

$$A^*Q_l AK + w = 0 \tag{19}$$

ili

$$NK + w = 0. \tag{20}$$

Odavde korelate su:

$$K = -N^{-1}w. \tag{21}$$

Zamena korelata u jednačine popravaka u (18) daje:

$$v = -Q_l AN^{-1}w. \tag{22}$$

Ako se ovde unesu slobodni članovi iz (17), biće:

$$v = -Q_l AN^{-1}A_0 - Q_l AN^{-1}A^*l'. \tag{23}$$

Izravnate vrednosti su:

$$L = l_0 + l' + v = l_0 + l' - Q_l AN^{-1}A^*l' - Q_l AN^{-1}A_0 \tag{24}$$

ili

$$L = (E - Q_l AN^{-1}A^*)\, l' + l_0 - Q_l AN^{-1}A_0 \tag{25}$$

odnoson sa novom oznakom

$$L = Rl' + l_0 - Q_l AN^{-1}A_0. \tag{26}$$

Korelaciona matrica izravnatih vrednosti je:

$$Q_L = RQ_l R^* \tag{27}$$

ili

$$Q_L = (E - Q_l AN^{-1}A^*)\, Q_l\, (E - AN^{-1}A^*Q_l) \tag{28}$$

i dalje

$$Q_L = (E - Q_l A N^{-1} A^*)(Q_l - Q_l A N^{-1} A^* Q_l) \tag{29}$$

$$Q_L = Q_l - Q_l A N^{-1} A^* Q_l - Q_l A N^{-1} A^* Q_l + Q_l A N^{-1} A^* Q_l A N^{-1} A^* Q_l. \tag{30}$$

Pošto je, s obzirom na (19), (20) i (21) u zadnjem članu izraza (30):

$$A^* Q_l A = N \tag{31}$$

i

$$A^* Q_l A N^{-1} = N N^{-1} = 1 \tag{32}$$

biće

$$Q_L = Q_l - 2 Q_l A N^{-1} A^* Q_l + Q_l A N^{-1} A^* Q_l \tag{33}$$

i na kraju

$$Q_L = Q_l - Q_l A N^{-1} A^* Q_l \tag{34}$$

ili

$$Q_L = (E - Q_l A N^{-1} A^*) Q_l, \tag{35}$$

$$Q_L = R Q_l. \tag{36}$$

Ako se i ovde uporede izrazi (36) i (26), može da se zaključi da u korelacionoj matrici Q_L figurira nepromenjena matrica R, tj. matrica koeficijenata transformacije iz sistema merenih u sistem izravnatih vrednosti.

Uzimajući u obzir navedene konstatacije i kod posrednog i kod uslovnog izravnavanja, kao i činjenicu da se može smatrati da je određivanje aritmetičke sredine vid posrednog izravnavanja sa jednom nepoznatom, možemo da definišemo pravilo kojem se povinuju sva izravnavanja:

Ako se izraze izravnate vrednosti u funkciji merenih vrednosti veličina koje se izravnavaju, odnosno ako se definiše transformacija iz sistema merenih u sistem izravnatih vrednosti, koeficijenti koji množe merene vrednosti (koeficijenti transformacije) jesu ujedno i koeficijenti sa kojima treba izmnožiti matricu koeficijenata težina merenih vrednosti, da bi se dobila korelaciona matrica izravnatih vrednosti merenih veličina.

Ako su merenja jednake tačnosti, matrica transformacije jeste ujedno i korelaciona matrica izravnatih vrednosti.

3. ILUSTRACIJA NAVEDENIH RAZMATRANJA NA JEDNOSTAVNIJIM SLUČAJEVIMA

Izvođenja matričnim postupkom značajno olakšavaju dokazivanja. Međutim, s obzirom na nešto sužen broj poznavalaca matričnog računa, sužen je i broj korisnika materije koja se izlaže matričnim postupkom. Zbog ovoga može biti korisno navedena izvođenja i dokazivanja koja imaju opšti značaj, obaviti klasičnim postupkom za jednostavnije slučajeve, čime će osnovne ideje u ovom radu da budu jasnije.

3.1. *Slučaj posrednog izravnavanja sa dve nepoznate*

Jednačine popravaka, kojih je ukupno n, jesu:

$$v_i = a_i x + b_i y + l_{0i} - l_i. \tag{37}$$

Normalne jednačine su:

$$\begin{aligned} [paa]\, x + [pab]\, y &= [pal] - [pal_0] = F_a, \\ [pab]\, x + [pbb]\, y &= [pbl] - [pbl_0] = F_b. \end{aligned} \tag{38}$$

Inverzne jednačine su:

$$\begin{aligned} x &= Q_{xx} F_a + Q_{xy} F_b, \\ y &= Q_{xy} F_a + Q_{yy} F_b. \end{aligned} \tag{39}$$

Ako se nepoznate izražene inverznim jednačinama zamene u normalne jednačine, dobiće se:

$$([paa]\, Q_{xx} + [pab]\, Q_{xy})\, F_a + ([paa]\, Q_{xy} + [pab]\, Q_{yy})\, F_b = F_a, \tag{40}$$

$$([pab]\, Q_{xx} + [pbb]\, Q_{xy})\, F_a + ([pab]\, Q_{xy} + [pbb]\, Q_{yy})\, F_b = F_b. \tag{41}$$

Da bi ove jednačine bile, pri datim koeficijentima normalnih jednačina, zadovoljene za bilo koje F_a i F_b, moraju se koeficijenti inverznih jednačina tako odabrati da u jednačini (40) izraz koji množi F_a bude jednak jedinici, a izraz koji množi F_b bude jednak nuli, a u jednačini (41) da bude obrnuto, tj. mora da bude:

$$\begin{aligned} [paa]\, Q_{xx} + [pab]\, Q_{xy} &= 1, \\ [paa]\, Q_{xy} + [pab]\, Q_{yy} &= 0, \\ [pab]\, Q_{xx} + [pbb]\, Q_{xy} &= 0, \\ [pab]\, Q_{xy} + [pbb]\, Q_{yy} &= 1. \end{aligned} \tag{42}$$

Jednačine (42) imaju isti smisao kao i izraz (8).

Izravnate vrednosti merenih veličina su:

$$L_i = l_i + v_i = a_i Q_{xx} F_a + a_i Q_{xy} F_b + b_i Q_{xy} F_a + b_i Q_{yy} F_b + l_{0i} \tag{43}$$

ili

$$L_i = (a_i Q_{xx} + b_i Q_{xy})\, F_a + (a_i Q_{xy} + b_i Q_{yy})\, F_b + l_{0i}. \tag{44}$$

Uzimajući u obzir smisao izraza za F_a i F_b prema (38), dobijamo:

$$\begin{aligned} L_i = {} & (a_i Q_{xx} + b_i Q_{xy})\,(p_1 a_1 l_1 + p_2 a_2 l_2 + \ldots + p_j a_j l_j + \ldots - [pal_0]) + \\ & + (a_i Q_{xy} + b_i Q_{yy})\,(p_1 b_1 l_1 + p_2 b_2 l_2 + \ldots + p_j b_j l_j + \ldots - [pbl_0]). \end{aligned} \tag{45}$$

Nakon množenja biće:

$$\begin{aligned} L_i = {} & (p_1 a_1 a_i Q_{xx} + p_1 a_1 b_i Q_{xy} + p_1 b_1 a_i Q_{xy} + p_1 b_1 b_i Q_{yy})\, l_1 + \\ & + (p_2 a_2 a_i Q_{xx} + p_2 a_2 b_i Q_{xy} + p_2 b_2 a_i Q_{xy} + p_2 b_2 b_i Q_{yy})\, l_2 + \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + (p_j a_j a_i Q_{xx} + p_j a_j b_i Q_{xy} + p_j b_j a_i Q_{xy} + p_j b_j b_i Q_{yy})\, l_j + \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & - (a_i Q_{xx} + b_i Q_{xy})\, [pal_0] - (a_i Q_{xy} + b_i Q_{yy})\, [pbl_0]. \end{aligned} \tag{46}$$

Jednačine (46), kojih je ukupno n, jesu jednačine transformacije iz sistema merenih vrednosti u sistem izravnatih vrednosti. Sa novim oznakama T_{ij} jednačine (46) imaju oblik:

$$L_i = T_{i1}l_1 + T_{i2}l_2 + \ldots + T_{ii}l_i + \ldots + T_{ij}l_j + \ldots + T_{in}l_n + T_{i0} \quad (47)$$

Ovako napisano, T_{ij} predstavljaju koeficijente transformacije sa merenih na izravnate vrednosti. S obzirom na navedeno pravilo* o ulozi koeficijenata transformacije pri formiranju korelacione matrice izravnatih vrednosti, može da se napiše izraz za korelacionu matricu:

$$Q_L = \begin{Vmatrix} \frac{T_{11}}{p_1} & \frac{T_{12}}{p_2} & \frac{T_{13}}{p_3} & \ldots & \frac{T_{1n}}{p_n} \\ \frac{T_{21}}{p_1} & \frac{T_{22}}{p_2} & \frac{T_{23}}{p_3} & \ldots & \frac{T_{2n}}{p_4} \\ \hdashline \frac{T_{n1}}{p_1} & \frac{T_{n2}}{p_2} & \frac{T_{n3}}{p_3} & \ldots & \frac{T_{nn}}{p_n} \end{Vmatrix} .$$

Korisno je konstatovati jednakost:

$$\frac{T_{ik}}{p_k} = \frac{T_{ki}}{p_i} .$$

Specijalno za $i = j$, biće srednja greška izravnate vrednosti L_i:

$$M_i^2 = m_0^2 \frac{T_{ii}}{p_i} = m_i^2 T_{ii}. \quad (48)$$

Ako se primeni poznat postupak za rasprostiranje grešaka na jednačinu (47), dobiće se:

$$M_i^2 = T_{i1}^2 m_1^2 + T_{i2}^2 m_2^2 + \ldots + T_{ij}^2 m_j^2 + \ldots + T_{in}^2 m_n^2 \quad (48.1)$$

ili s obzirom da je:

$$m_j^2 = \frac{m_0^2}{p_j} \quad (48.2)$$

biće:

$$M_i^2 = \sum \frac{T_{ij}^2}{p_j} m_0^2 \quad (48.3)$$

Na osnovu jednačina (46) i (47), ako se p_j izvuče ispred zagrade, dobijamo:

$$\begin{aligned} \frac{T_{ij}^2}{p_j} &= \\ &= \frac{p_j^2}{p_j} (a_j a_j a_i a_i Q_{xx} Q_{xx} + a_j a_j a_i b_i Q_{xx} Q_{xy} + a_j b_j a_i a_i Q_{xx} Q_{xy} + a_j b_j a_i b_i Q_{xx} Q_{yy} + \\ &+ a_j a_j a_i b_i Q_{xx} Q_{xy} + a_j a_j b_i b_i Q_{xy} Q_{xy} + a_j b_j a_i b_i Q_{xy} Q_{xy} + a_j b_j b_i b_i Q_{xy} Q_{yy} + \\ &+ a_j b_j a_i a_i Q_{xx} Q_{xy} + a_j a_i b_j b_i Q_{xy} Q_{xy} + a_i b_j a_i b_j Q_{xy} Q_{xy} + b_j b_j a_i b_i Q_{xy} Q_{yy} + \\ &+ a_j b_j a_i b_i Q_{xx} Q_{yy} + a_j b_j b_i b_i Q_{xy} Q_{yy} + b_j b_j a_i b_i Q_{xy} Q_{yy} + b_j b_j b_i b_i Q_{yy} Q_{yy}). \quad (48.4) \end{aligned}$$

* Vidi formule (48.1) do (48.7).

Ako se na osnovu ove jednačine formira suma po j, pošto se prethodno obavi skraćivanje sa p_j a zatim izmnoži zagrada sa p_j, i obave odgovarajuća sređivanja, biće:

$$\sum \frac{T_{ij}^2}{p_j} = a_i a_i Q_{xx} ([paa] Q_{xx} + [pab] Q_{xy}) + a_i b_i Q_{xx} ([paa] Q_{xy} + [pab] Q_{yy}) + \\ + a_i b_i Q_{xy} ([paa] Q_{xx} + [pab] Q_{xy}) + b_i b_i Q_{xy} ([paa] Q_{xy} + [pab] Q_{yy}) + \\ + a_i a_i Q_{xy} ([pab] Q_{xx} + [pbb] Q_{xy}) + a_i b_i Q_{xy} ([pab] Q_{xy} + [pbb] Q_{yy}) + \\ + a_i b_i Q_{yy} ([pab] Q_{xx} + [pbb] Q_{xy}) + b_i b_i Q_{yy} ([pab] Q_{xy} + [pbb] Q_{yy}). \tag{48.5}$$

U ovoj jednačini su, s obzirom na jednačine (42) izrazi u prvoj, trećoj, šestoj i osmoj zagradi jednaki jedinici, a u drugoj, četvrtoj, petoj i sedmoj zagradi jednaki nuli. S obzirom na ovo i jednačine (48.3) i (48.5) biće:

$$M_i^2 = m_0^2 \sum \frac{T_{ij}^2}{p_j} = m_0^2 (a_i a_i Q_{xx} + a_i b_i Q_{xy} + a_i b_i Q_{xy} + b_i b_i Q_{yy}). \tag{48.6}$$

Ako desnu stranu pomnožimo i podelimo sa p_i, biće s obzirom na (46):

$$M_i^2 = m_0^2 \frac{T_{ii}}{p_i} = m_i^2 T_{ii}. \tag{48.7}$$

3.2. *Slučaj uslovnog izravnavanja sa dve jednačine*

Uslovne jednačine nakon linearizovanja su:

$$\begin{aligned} a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots a_n v_n + [al'] + f_a (l_{0i}) &= 0, \\ b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots b_n v_n + [bl'] + f_b (l_{0i}) &= 0. \end{aligned} \tag{49}$$

Neka su u ovim jednačinama:

$$\begin{aligned} f_a (l_{0i}) &= a_0, \\ f_b (l_{0i}) &= b_0. \end{aligned}$$

Jednačine popravaka dobivene na poznat način u funkciji korelata su:

$$v_i = \frac{a_i}{p_i} K_1 + \frac{b_i}{p_i} K_2. \tag{50}$$

Normalne jednačine su:

$$\begin{aligned} \left[\frac{aa}{p}\right] K_1 + \left[\frac{ab}{p}\right] K_2 &= - w_a = - [al'] - a_0, \\ \left[\frac{ab}{p}\right] K_1 + \left[\frac{bb}{p}\right] K_2 &= - w_b = - [bl'] - b_0. \end{aligned} \tag{51}$$

Rešenje za korelate je dato inverznim jednačinama:

$$\begin{aligned} K_1 &= - N_{aa} w_a - N_{ab} w_b, \\ K_2 &= - N_{ab} w_a - N_{bb} w_b. \end{aligned} \tag{52}$$

Ako se na isti način kao kod izloženog postupka za posredno izravnavanje, zamene korelate iz (52) u (51), dobiće se dve jednačine koje će da budu identički zadovoljene, slično kao kod jednačina (41) i (42) ako je:

$$\begin{aligned}
\left[\frac{aa}{p}\right] N_{aa} + \left[\frac{ab}{p}\right] N_{ab} &= 1,\\
\left[\frac{aa}{p}\right] N_{ab} + \left[\frac{ab}{p}\right] N_{bb} &= 0,\\
\left[\frac{ab}{p}\right] N_{aa} + \left[\frac{bb}{p}\right] N_{ab} &= 0,\\
\left[\frac{ab}{p}\right] N_{ab} + \left[\frac{bb}{p}\right] N_{bb} &= 1.
\end{aligned} \tag{53}$$

Ove jednačine odgovaraju izrazu (32).

Zamenom korelata u jednačine popravaka, dobijamo:

$$v_i = -\left(\frac{a_i}{p_i} N_{aa} + \frac{b_i}{p_i} N_{ab}\right) w_a - \left(\frac{a_i}{p_i} N_{ab} + \frac{b_i}{p_i} N_{bb}\right) w_b. \tag{54}$$

Sa novim oznakama za izraze u zagradama, biće:

$$v_i = A_i w_a + B_i w_b. \tag{55}$$

S obzirom na jednačine (51) ovaj izraz postaje:

$$\begin{aligned}
v_i = A_i (a_0 + a_1 l_1' + a_2 l_2' + \ldots + a_n l_n') +\\
+ B_i (b_0 + b_1 l_1' + b_2 l_2' + \ldots + b_n l_n').
\end{aligned} \tag{56}$$

odnosno

$$\begin{aligned}
v_i = A_i a_0 + B_i b + (A_i a_1 + B_i b_1)\, l_1' &+\\
+ (A_i a_2 + B_i b_2)\, l_2' &+\\
+ (A_i a_3 + B_i b_3)\, l_3' &+\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &\\
+ (A_i a_i + B_i b_i)\, l_i' &+\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &\\
+ (A_i a_n + B_i b_n)\, l_n'&.
\end{aligned} \tag{57}$$

Izravnate vrednosti su:

$$\begin{aligned}
L_i = l_{0i} + l_i' + v_i = A_i a_0 + B_i b_0 + (A_i a_1 + B_i b_1)\, l_1' &+\\
+ (A_i a_2 + B_i b_2)\, l_2' &+\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &\\
+ l_{0i} + (1 + A_i a_i + B_i b_i)\, l_i' &+\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &\\
+ (A_i a_n + B_i b_n)\, l_n'&.
\end{aligned} \tag{58}$$

Sa novim oznakama R ovaj izraz postaje:

$$L_i = R_{i0} + R_{i1}l'_1 + R_{i2}l'_2 + \ldots + l_{0i} + R_{ii}l'_i + \ldots + R_{in}l'_n. \tag{59}$$

I ovde oznake R_{ij} predstavljaju koeficijente transformacije iz sistema merenih u sistem izravnatih vrednosti merenih veličina koje se uvode u izravnavanje.

S obzirom na navedeno pravilo**, možemo direktno da napišemo izraz za srednju grešku izravnatih vrednosti:

$$M_i^2 = m_0^2 \frac{R_{ii}}{p_i} \tag{60}$$

ili:

$$M_i^2 = m_i^2 R_{ii} \tag{61}$$

Primenom klasičnog postupka na jednačinu (59) ako hoćemo da dobijemo srednju grešku izravnate vrednosti L_i, dobićemo:

$$M_i^2 = R_{i1}^2 m_1^2 + R_{i2}^2 m_2^2 + \ldots + R_{ij}^2 m_j^2 + \ldots R_{in}^2 m_n^2. \tag{61.1}$$

Ovde je posebno interesantan izraz R_{ii}^2:

$$R_{ii}^2 = 1 + 2(A_i a_i + B_i b_i) + (A_i a_i + B_i b_i)^2. \tag{61.2}$$

Pošto je:

$$m_j^2 = \frac{m_0^2}{p_j} \tag{61.3}$$

može jednačina (61.1) da se napiše:

$$M_i^2 = m_0^2 \sum \frac{R_{ij}^2}{p_j} \tag{61.4}$$

odnoson, s obzirom na jednačinu (61.2):

$$\sum \frac{R_{ij}^2}{p_j} = \frac{1 + 2(A_i a_i + B_i b_i)}{p_j} + \sum \frac{(A_i a_j + B_i b_j)^2}{p_j} \tag{61.5}$$

Možemo označiti izraz pod znakom sumiranja sa S_i, koji s obzirom na izraz (59) kao i na (54) i (55) dobija oblik:

$$S_i = \sum \frac{1}{p_j} \left\{ \left(\frac{a_i}{p_i} N_{aa} + \frac{b_i}{p_i} N_{ab} \right) a_j + \left(\frac{a_i}{p_i} N_{ab} + \frac{b_i}{p_i} N_{bb} \right) b_j \right\}^2. \tag{61.6}$$

Nakon množenja ovaj izraz postaje:

$$S_i = \sum \frac{1}{p_j} \left(\frac{a_i a_j}{p_i} N_{aa} + \frac{b_i a_j}{p_i} N_{ab} + \frac{a_i b_j}{p_i} N_{ab} + \frac{b_i b_j}{p_i} N_{bb} \right)^2. \tag{61.7}$$

Kvadriranjem i množenjem sa $\frac{1}{p_i}$ biće:

** Vidi formule (61.1) do (61.13).

$$S_i = \sum \left(\frac{a_i a_i a_j a_j}{p_i p_i p_j} N_{aa} N_{aa} + \frac{a_i b_i a_j a_j}{p_i p_i p_j} N_{aa} N_{ab} + \frac{a_i a_i a_j b_j}{p_i p_i p_j} N_{aa} N_{ab} + \frac{a_i b_i a_j b_j}{p_i p_i p_j} N_{aa} N_{bb} + \right.$$
$$+ \frac{a_i b_i a_j a_j}{p_i p_i p_j} N_{aa} N_{ab} + \frac{b_i b_i a_j a_j}{p_i p_i p_j} N_{ab} N_{ab} + \frac{b_i a_i a_j b_j}{p_i p_i p_j} N_{ab} N_{ab} + \frac{b_i b_i a_j b_j}{p_i p_i p_j} N_{ab} N_{bb} +$$
$$+ \frac{a_i a_i a_j b_j}{p_i p_i p_j} N_{aa} N_{ab} + \frac{b_i a_i a_j b_j}{p_i p_i p_j} N_{ab} N_{ab} + \frac{a_i a_i b_j b_j}{p_i p_i p_j} N_{ab} N_{ab} + \frac{a_i b_i b_j b_j}{p_i p_i p_j} N_{ab} N_{bb} +$$
$$\left. + \frac{a_i b_i a_j b_j}{p_i p_i p_j} N_{aa} N_{bb} + \frac{b_i b_i a_j b_j}{p_i p_i p_j} N_{ab} N_{bb} + \frac{a_i b_i b_j b_j}{p_i p_i p_j} N_{ab} N_{bb} + \frac{b_i b_i b_j b_j}{p_i p_i p_j} N_{bb} N_{bb} \right). \tag{61.8}$$

Ako se obavi sumiranje po j i izvuku odgovarajući zajednički izrazi ispred zagrade, biće:

$$S_i = \frac{a_i a_i}{p_i p_i} N_{aa} \left(\left[\frac{aa}{p}\right] N_{aa} + \left[\frac{ab}{p}\right] N_{ab} \right) + \frac{a_i b_i}{p_i p_i} N_{aa} \left(\left[\frac{aa}{p}\right] N_{ab} + \left[\frac{ab}{p}\right] N_{bb} \right) +$$
$$+ \frac{a_i b_i}{p_i p_i} N_{ab} \left(\left[\frac{aa}{p}\right] N_{aa} + \left[\frac{ab}{p}\right] N_{ab} \right) + \frac{b_i b_i}{p_i p_i} N_{ab} \left(\left[\frac{aa}{p}\right] N_{ab} + \left[\frac{ab}{p}\right] N_{bb} \right) +$$
$$+ \frac{a_i a_i}{p_i p_i} N_{ab} \left(\left[\frac{ab}{p}\right] N_{aa} + \left[\frac{bb}{p}\right] N_{ab} \right) + \frac{b_i a_i}{p_i p_i} N_{ab} \left(\left[\frac{ab}{p}\right] N_{ab} + \left[\frac{bb}{p}\right] N_{bb} \right) +$$
$$+ \frac{a_i b_i}{p_i p_i} N_{bb} \left(\left[\frac{ab}{p}\right] N_{aa} + \left[\frac{bb}{p}\right] N_{ab} \right) + \frac{b_i b_i}{p_i p_i} N_{bb} \left(\left[\frac{ab}{p}\right] N_{ab} + \left[\frac{bb}{p}\right] N_{bb} \right). \tag{61.9}$$

S obzirom na jednačine (53), ovde se izrazi u prvoj, trećoj, šestoj i osmoj zagradi jednaki jedinici, a u drugoj, četvrtoj, petoj i sedmoj zagradi jesu jednaki nuli. S obzirom na ovo izraz (61.9) postaje:

$$S_i = \frac{a_i a_i}{p_i p_i} N_{aa} + \frac{a_i b_i}{p_i p_i} N_{ab} + \frac{a_i b_i}{p_i p_i} N_{ab} + \frac{b_i b_i}{p_i p_i} N_{bb} \tag{61.10}$$

odnoson, s obzirom na (54) i (55)

$$S_i = -\frac{1}{p_i}(A_i a_i + B_i b_i). \tag{61.11}$$

Uzimajući u obzir ovaj izraz, kao i (61.5), jednačina (61.4) dobija oblik:

$$M_i^2 = \frac{m_0^2}{p_i} \left\{ 1 + 2\,(A_i a_i + B_i b_i) - (A_i a_i + B_i b_i) \right\} \tag{61.12}$$

i na kraju

$$M_i^2 = \frac{m_0^2}{p_i} \left(1 + A_i a_i + B_i b_i \right) = \frac{m_0^2}{p_i} R_{ii} = m_i R_{ii} \tag{61.13}$$

4. O ZAJEDNIČKOM POKAZATELJU TAČNOSTI IZRAVNATIH VREDNOSTI MERENIH VELIČINA

Pre izravnavanja se utvrđenim metodologijama definišu težine merenja. Nakon izravnavanja se na poznat način računa srednja greška jedinice težine, koja odgovara tom sistemu težina, kao zajednički pokazatelj tačnosti sa kojom su obavljena merenja, po jednačini:

$$m_0^2 = \frac{[pvv]}{n-k} \tag{62}$$

Ako se radi o slučajnim pogreškama izravnavanjem se povećava tačnost merenih podataka. U takvim se slučajevima upoređivanjem srednje greške izravnate vrednosti merenja sa srednjom greškom neposrednog merenja, stiče se uvid u stepen smanjenja srednje greške zbog izravnavanja. Može se za svako merenje utvrditi koliko je smanjena srednja greška izravnavanjem u apsolutnom a i u relativnom iznosu.

Međutim, nemamo mogućnosti kojima bi, slično kao za srednju grešku merenja, koja se računa po navedenoj jednačini (62) sračunali pokazatelj koji bi reprezentovao tačnost izravnatih podataka u njihovoj sveukupnosti. Posebno bi bio interesantan zajednički pokazatelj koji bi omogućavao uvid u relativno povećanje tačnosti koja se postiže izravnavanjem. U ovom odeljku će biti napravljen pokušaj da se do takvih pokazatelja dođe, bez pretenzije da se dâ i definitivno rešenje navedenog problema.

Jedan od mogućih pokazatelja tačnosti izravnatih vrednosti bi mogla da bude srednja kvadratna vrednost svih srednjih grešaka izravnatih vrednosti. Ako su merenja koja se uvode u izravnavanje jednake tačnosti, ovako dobivena srednja kvadratna vrednost bi mogla da bude logična. Ali za merenja različite tačnosti, teško bi se moglo reći da je takav pokazatelj prihvatljiv.

Jednačine (48) odnosno (61) glase:

$$\begin{aligned} M_i^2 &= T_{ii} m_i^2 = T_{ii} \frac{m_0^2}{p_i}, \\ M_i^2 &= R_{ii} m_i^2 = R_{ii} \frac{m_0^2}{p_i}. \end{aligned} \tag{63}$$

Na osnovu ovih jednačina se može napisati:

$$\begin{aligned} M_i^2 p_i &= T_{ii} m_0^2, \\ M_i^2 p_i &= R_{ii} m_0^2. \end{aligned} \tag{64}$$

Možemo postaviti pitanje: kakav je smisao proizvoda $M_i^2 p_i$?. U sistemu težina p_i, ako su u pitanju srednje greške merenja m_i, proizvod $m_i^2 p_i$ jednak je srednjoj grešci jedinice težine, dok $M_i^2 p_i$ sigurno to ne može da bude. Međutim, kako je:

$$\frac{M_i^2}{m_i^2} = \frac{\dfrac{m_0^2}{P_i}}{\dfrac{m_0^2}{p_i}} = \frac{p_i}{P_i} \tag{65}$$

može da se napiše

$$M_i^2 p_i = m_0^2 \frac{p_i}{P_i} = m_0^2 \frac{M_i^2}{m_i^2}, \tag{66}$$

pa može da se zaključi da proizvod $M_i^2 p_i$, koga ćemo obeležiti sa $\bar{M}_i^2$, predstavlja modifikovanu srednju grešku jedinice merenja, odnosno njeno smanjenje za relativno smanjenje srednje greške nakon izravnavanja u odnosu na srednju grešku pre izravnavanja. Kako je ovo relativno smanjenje različito za svaku veličinu koja se uvodi u izravnavanje, to će se i $\bar{M}_i$ međusobno razlikovati.

Za ocenu tačnosti izravnatih vrednosti svih veličina koje se uvode u izravnavanje, mogao bi da posluži zajednički pokazatelj:

$$\bar{M} = \sqrt{\frac{\Sigma \bar{M}_i^2}{n}} = \sqrt{\frac{\Sigma M_i^2 p_i}{n}} = m_0 \sqrt{\frac{\sum \frac{p_i}{P_i}}{n}} \tag{67}$$

koji se, za jednako tačna merenja, svodi na srednju kvadratnu vrednost svih srednjih grešaka izravnatih vrednosti.

4.1. Izraz za $\bar{M}$ za posredno izravnavanje

Iz jednačine (48) sledi:

$$\bar{M}_i^2 = M_i^2 p_i = T_{ii} m_0^2. \tag{68}$$

Uzimajući u obzir jednačinu (46), biće

$$\bar{M}_i^2 = (p_i a_i a_i Q_{xx} + p_i a_i b_i Q_{xy} + p_i a_i b_i Q_{xy} + p_i b_i b_i Q_{yy})\, m_0^2. \tag{69}$$

Odavde je::

$$\Sigma \bar{M}_i^2 = ([paa]\, Q_{xx} + [pab]\, Q_{xy} + [pab]\, Q_{xy} + [pbb]\, Q_{yy})\, m_0^2. \tag{70}$$

Prema jednačinama (42), zbir prva dva člana ove jednačine jednak je jedan, a isto je i za druga dva člana, pa će biti:

$$\Sigma \bar{M}^2 = 2m_0^2. \tag{71}$$

U navedenom slučaju je razmatrano posredno izravnavanje sa dve nepoznate. Nije teško po analogiji zaključiti da će za slučaj k nepoznatih biti:

$$\Sigma \bar{M}_i^2 = k m_0^2. \tag{72}$$

S obzirom na jednačinu (67) biće:

$$\bar{M}^2 = \frac{\Sigma \bar{M}_i^2}{n} = \frac{k}{n} m_0^2 \tag{73}$$

odnosno

$$\bar{M} = m_0 \sqrt{\frac{k}{n}}. \tag{74}$$

4.2. Izraz za $\bar{M}$ za uslovno izravnavanje

Na osnovu jednačine (60) može da se napiše:

$$\bar{M}_i^2 = M_i^2 p_i = m_0^2 R_{ii} \tag{75}$$

Na osnovu jednačina (58) i (59) dalje sledi:

$$\bar{M}_i^2 = (1 + A_i a_i + B_i b_i)\, m_0^2 \tag{76}$$

a ako se uzmu u obzir jednačine (54) i (55) biće:

$$\bar{M}_i^2 = \left\{1 - \left(\frac{a_i a_i}{p_i} N_{aa} + \frac{a_i b_i}{p_i} N_{ab} + \frac{a_i b_i}{p_i} N_{ab} + \frac{a_i b_i}{p_i} N_{bb}\right)\right\} m_0^2. \tag{77}$$

Odavde je:

$$\Sigma \bar{M}_i^2 = \left\{n - \left(\left[\frac{aa}{p}\right] N_{aa} + \left[\frac{ab}{p}\right] N_{ab} + \left[\frac{ab}{p}\right] N_{ab} + \left[\frac{bb}{p}\right] N_{bb}\right)\right\} m_0^2 \tag{78}$$

S obzirom na jednačine (53), u maloj zagradi je zbir prva dva člana jednak jedan, a isto tako i zbir druga dva člana, pa će biti:

$$\Sigma \bar{M}_i^2 = \{n - 2\}\, m_0^2 \tag{79}$$

Ovde je razmatran slučaj sa dve uslovne jednačine, a po analogiji može se zaključiti da će za r jednačina biti:

$$\bar{M}_i^2 = (n - r)\, m_0^2. \tag{80}$$

Odavde je:

$$\bar{M} = \sqrt{\frac{\Sigma M_i^2}{n}} = m_0 \sqrt{\frac{n - r}{n}}. \tag{81}$$

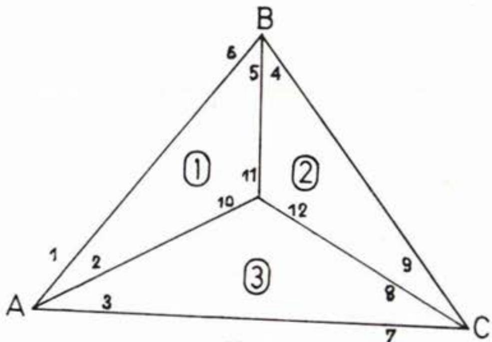
Poznato je da za datu mrežu mora da važi veza:

$$n - r = k \tag{82}$$

čime se dovodi u sklad posredno i uslovno izravnavanje pri računanju $\bar{M}$.

5. BROJNI PRIMER

Radi ilustracije navedenih izvođenja, obrađen je brojni primer centralnog sistema sa tri trougla i 12 pravaca jednake tačnosti, preuzet iz [2], str. 218.



Sl. 1

Matrica uslovnih jednačina — A je:

$$A = \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 & -6{,}58 \\ +1 & 0 & -1 & +10.02 \\ 0 & 0 & +1 & -3{,}44 \\ 0 & -1 & 0 & -1{,}41 \\ -1 & +1 & 0 & +10{,}46 \\ +1 & 0 & 0 & -9{,}05 \\ 0 & 0 & -1 & -6{,}29 \\ 0 & -1 & +1 & +8{,}56 \\ 0 & +1 & 0 & -2{,}27 \\ -1 & 0 & +1 & 0 \\ +1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & -1 & 0 \end{Vmatrix}$$

Inverzna matrica normalnih jednačina — N^{-1}, je:

$$N^{-1} = \begin{Vmatrix} +0{,}2504 & +0{,}1249 & +0{,}1249 & +0{,}0009 \\ +0{,}1249 & +0{,}2500 & +0{,}1250 & -0{,}0002 \\ +0{,}1249 & +0{,}1250 & +0{,}2500 & -0{,}0002 \\ +0{,}0009 & -0{,}0002 & -0{,}0002 & +0{,}0022 \end{Vmatrix}$$

Matrica transformacije sa merenih na izravnate podatke — R, prema jednačinama (25) i (26), pošto je $Q_1 = E$, je:

$$R = E - AN^{-1}A^{*} =$$

$$\begin{Vmatrix} +0{,}64 & +0{,}28 & +0{,}07 & -0{,}15 & +0{,}03 & +0{,}12 & -0{,}22 & +0{,}13 & +0{,}09 & -0{,}13 & +0{,}13 & 0{,}00 \\ +0{,}28 & +0{,}51 & +0{,}21 & +0{,}03 & -0{,}10 & +0{,}07 & +0{,}02 & -0{,}07 & +0{,}05 & +0{,}26 & -0{,}14 & -0{,}13 \\ +0{,}07 & +0{,}21 & +0{,}72 & +0{,}11 & +0{,}08 & -0{,}19 & +0{,}20 & -0{,}06 & -0{,}14 & -0{,}13 & +0{,}00 & +0{,}13 \\ -0{,}15 & +0{,}03 & +0{,}11 & +0{,}75 & +0{,}15 & +0{,}10 & -0{,}14 & -0{,}10 & +0{,}24 & -0{,}00 & -0{,}12 & +0{,}13 \\ +0{,}03 & -0{,}10 & +0{,}08 & +0{,}15 & +0{,}54 & +0{,}31 & +0{,}13 & -0{,}06 & -0{,}07 & -0{,}11 & +0{,}24 & -0{,}13 \\ +0{,}12 & +0{,}07 & -0{,}19 & +0{,}10 & +0{,}31 & +0{,}59 & +0{,}01 & +0{,}16 & -0{,}17 & +0{,}12 & -0{,}12 & +0{,}00 \\ -0{,}22 & +0{,}02 & +0{,}20 & -0{,}14 & +0{,}13 & +0{,}01 & +0{,}67 & +0{,}24 & +0{,}09 & +0{,}12 & +0{,}01 & -0{,}12 \\ +0{,}13 & -0{,}07 & -0{,}06 & -0{,}10 & -0{,}06 & +0{,}16 & +0{,}24 & +0{,}59 & +0{,}17 & -0{,}12 & -0{,}13 & +0{,}25 \\ +0{,}09 & +0{,}05 & -0{,}14 & +0{,}24 & -0{,}07 & -0{,}17 & +0{,}09 & +0{,}17 & +0{,}74 & -0{,}00 & +0{,}13 & -0{,}12 \\ -0{,}13 & +0{,}26 & -0{,}13 & -0{,}00 & -0{,}11 & +0{,}12 & +0{,}12 & -0{,}12 & -0{,}00 & +0{,}75 & +0{,}13 & +0{,}13 \\ +0{,}13 & -0{,}14 & -0{,}00 & -0{,}12 & +0{,}24 & -0{,}12 & +0{,}01 & -0{,}13 & +0{,}13 & +0{,}13 & +0{,}75 & +0{,}12 \\ 0{,}00 & -0{,}13 & +0{,}13 & +0{,}13 & -0{,}13 & +0{,}00 & -0{,}12 & +0{,}25 & -0{,}12 & +0{,}13 & +0{,}12 & +0{,}75 \end{Vmatrix}$$

Dijagonalni članovi matrice R pomnoženi sa m_0^2, daju kvadrate srednjih grešaka izravnatih vrednosti odgovarajućih pravaca. Preko ovih članova se stiče uvid u tačnost svakog pojedinog izravnatog pravca.

Zbir svih dijagonalnih članova iznosi 8,00, a zajednički pokazatelj tačnosti izravnatih vrednosti $\bar{M}$ bi bio:

$$\bar{M} = m_0 \sqrt{\frac{8}{12}} = \pm\, 0{,}82\ m_0.$$

Izravnavanjem, u proseku za sve pravce, povećava se tačnost za 18% za ovakav centralni sistem.

Treba napomenuti da za sve mreže koje su opažane sa jednakom tačnošću i koje imaju međusobno jednak broj merenja i jednak broj uslovnih jednačina, $\bar{M}$ ima istu vrednost. Na pr. za centralni sistem sa 3 trougla, $\bar{M}$ ne zavisi od oblika trouglova. Od oblika trouglova zavisi svako pojedinačno M_i. Međutim, kako je:

$$\Sigma M_i^2 = \text{const.}$$

pojava izuzetno malih srednjih grešaka nakon izravnavanja uslovljava i pojavu izuzetno velikih srednjih grešaka. Nema sumnje da pobuđuje interes analiza: koje veličine će nakon izravnavanja da postanu izuzetno tačnije, a na čiju tačnost se izravnavanje malo odražava.

LITERATURA

[1] Tienstra J. M.: An extension the thecnique of the methods of least squares to corelated observation, Buletin geodesique № 6, 1947.

[2] Čubranić N.: Teorija pogrešaka sa računom izjednačenja, Zagreb 1966.

[3] Grossman W.: Grundzüge der Ausgleichungsrechnung, Berlin (Göttingen) Heidelberg 1961.

[4] Reissman G.: Die Ausgleichungsrechnung, Veb Verlag für Bauwesen, Berlin 1962.

[5] Stevanović J.: Problem korelacije pri izravnavanju trigonometrijskih mreža po pravcima ako su mereni uglovi, Zbornik radova Rudarsko-geološko-metalurškog fakulteta i Instituta za bakar — Bor, 1971.

REZIME

Obavljena su izvođenja u opštem obliku za posredno i uslovno izravnavanje iz kojih sledi: Ako se izraze izravnate vrednosti u funkciji merenih vrednosti veličina koje se uvode u izravnavanje, odnosno ako se definiše transformacija iz sistema merenih u sistem izravnatih vrednosti, koeficijenti koji množe merene vrednosti (koeficijenti transformacije) jesu ujedno i koeficijenti sa kojima treba izmnožiti matricu koeficijenata težina merenih vrednosti, da bi se dobila korelaciona matrica izravnatih vrednosti. Ako su merenja jednake tačnosti, matrica transformacije je ujedno i korelaciona matrica izravnatih vrednosti.

Izvođenja su, osim u matričnom, obavljena i u klasičnom obliku za jednostavnije slučajeve.

Na kraju su izvedeni izrazi, koji mogu biti globalni pokazatelji tačnosti izravnatih vrednosti, odnosno preko kojih se može zaključiti koliko se povećava tačnost izravnavanjem.

Naveden je brojni primer centralnog sistema sa 3 trougla.

Primljeno: 1981-07-02