UDK 528.16
Originalan znanstveni rad

IZRAVNAVANJE PO METODI NAJMANJE SUME APSOLUTNIH VRIJEDNOSTI POPRAVAKA $\sum_i |v_i| = \min$

Njegoslav VUKOTIĆ — Beograd*

Kad je 1790. god. Ruđer Bošković upotrebio za izravnanje svoj kriterij (postavljen još 1755. godine):

$$\sum_i |v_i| = \min \tag{1}$$

i

$$\Sigma v = 0 \tag{2}$$

a 1799. god. Laplas sračunao elipsoid koristeći se istim uslovima bila je to tada najbolja metoda izravnanja. Teškoće u primjeni proizašle su kad je trebalo izravnavati veći broj nepoznatih. Stoga je metoda najmanjih kvadrata koju su pronašli i uspješno primjenili Gaus i Ležandr predstavljala nezamjenljiv kriterij izravnanja koji se održao i danas. Ako je u početku to bilo jedino rješenje za uspješno izravnanje s obzirom na dobivene rezultate i na tadašnje tehničke mogućnosti računanja danas ta metoda i dalje ima svoje mjesto zahvaljujući prije svega rezultatima koje ostvaruje. No pretpostavka za uspješnu primjenu metode najmanjih kvadrata je između ostalog uslov da veličine koje se ocjenjuju pripadaju normalnoj raspodjeli. Ako to nije ispunjeno tada se ne može tvrditi da su i rezultati izravnanja dobri. S druge strane izvor grešaka s kojima se ulazi u izravnanje ne moraju biti samo pogrešna mjerenja. To su i pogrešno identifikovane tačke, pogrešno upisani podaci, pogrešno formirane jednačine popravaka itd. Kad se s takvim podacima uđe u izravnanje izvor grešaka se ne mora uvijek otkriti, a ako se uoči neko veće odstupanje ne mora uvijek biti na pravom mjestu. Stoga je od izuzetnog značaja otkrivanje grubih grešaka kako bi izravnate vrijednosti bile najvjerovatnije.

Taj zadatak s velikim uspjehom rješava izravnanje uz uslov minimuma

$$\Sigma |v| = \min$$

kojim se, kao što se to iz funkcije cilja jasno vidi, postiže najmanja suma apsolutnih vrijednosti popravaka. Izravnata veličina naziva se medijana.

Primjena metode najmanjih kvadrata i najmanje sume apsolutnih vrijednosti može se ilustrovati slijedećim jednostavnim primjerom u jednodimenzionalnom prostoru:

* Adresa autora: dr Njegoslav Vukotić, dipl. inž., Republička geodetska uprava SR Srbije, Beograd, ul. Cara Dušana 1.

Primjer: Dužina l mjerena je 5 puta istom tačnošću i dobivene su slijedeće vrijednosti: $l_1 = 125{,}40$ m, $l_2 = 125{,}36$ m, $l_3 = 125{,}42$ m, $l_4 = 126{,}44$ m i $l_5 = 126{,}42$ m. Treba naći najvjerovatniju vrijednost dužine i veličine popravaka pojedinih mjerenja.

Po metodi najmanjih kvadrata najvjerovatnija vrijednost je:

$$l = 125 + \frac{0{,}40 + 0{,}36 + 0{,}42 + 1{,}44 + 1{,}42}{5} = 125 + 0{,}81 = 125{,}81$$

a popravke $v_i = l - l_i$:

$$\begin{aligned} v_1 &= 0{,}41 \\ v_2 &= 0{,}45 \\ v_3 &= 0{,}39 \\ v_4 &= -0{,}63 \\ v_5 &= -0{,}61 \\ \hline \Sigma v &= 0{,}01 \quad \Sigma |v| = 2{,}49. \end{aligned}$$

Po metodi najmanje sume apsolutnih vrijednosti popravaka $l = 125{,}42$. Ova vrijednost, medijana, dobije se kad se sva mjerenja poređaju po veličini i uzme srednje:

l_i	v_i
126,44	1,02
126,42	1,00
125,42	0
125,40	−0,02
125,36	−0,06

$l = 125{,}42 \; \Sigma v = 1{,}94 \qquad \Sigma |v| = 2{,}10.$

Suma apsolutnih vrijednoti popravaka se ne može dobiti manja nijednom drugom metodom. Suma popravaka ne mora biti nula.

Iz dobivenog rezultata jasno se uočavaju pogrešna mjerenja.

Važna osobina ovoga načina izravnanja je da se rezultat izravnjanja ili uopšte ne mijenja ili se dugo zadržava oko najvjerovatnije vrijednosti i pored prisustva više grubih grešaka.

Isti primjer može odmah poslužiti i kao ilustracija granice djelotvornosti metode najmanje sume apsolutnih vrijednosti popravaka. Da su tri mjerenja bila preko 126 m greška se ne bi mogla otkriti. Da je, međutim, treće pogrešno mjerenje bilo 124 m greške bi se opet pojavile na pravom mjestu i ukoliko je i dalje $l_3 = 125{,}42$ m i rezultat izravnanja bi ostao isti. Čak bi se sve ispravno dobilo i za četiri pogrešna mjerenja ako bi četvrto pogrešno mjerenje bilo npr. 123 m.

Uslov minimuma: $\Sigma |v| = \min$

je u matematici poznat kao L_1 linearna aproksimacija i kraće se naziva L_1 norma. Uopšte L_p norma nekog prostora R^n definiše se kao:

$$L_p = \sqrt[p]{\sum_i |v_i|^p} \tag{3}$$

Za p = 1 to je

$$L_1 = \sum_i |v_i|. \tag{4}$$

Funkcija cilja

$$\sum_i |v_i| = \min$$

uz uslove $v = Ax - f$.

A je matrica dimenzija (m, n), nije prilagođena opštem obliku linearnog programiranja jer se u funkciji cilja ne mogu pojavljivati apsolutne vrijednosti. Stoga je potrebno problem transformirati. Za popravke v_i može se pisati:

$$v_i = u_i - w_i \tag{5}$$

$$\begin{aligned} &\text{gdje je } u_i = 0 \text{ za } v_i \leq 0 \\ &\quad a\ w_i = 0 \text{ za } v_i > 0 \end{aligned} \tag{6}$$

i gdje su u_i, $w_i \geq 0$ za $i = 1, \ldots, m$.

Umjesto minimuma sume apsolutnih vrijednosti može se sada tražiti minimum sume novih nepoznatih u i w što je isto:

$$\sum_i (u_i + w_i) = \min \tag{7}$$

uz uslove: $u - W = Ax - f$ (8)

koji se mogu pisati:

$$Ax - u + w = f. \tag{9}$$

Funkcija cilja (7) se može pisati:

$$\sum_{j=1}^{n} o x_j + \sum_{i=1}^{m} (u_i + w_i) = \min, \tag{10}$$

jer se u uslovima nalaze i nepoznate **x**, tj. prvih n koeficijenata funkcije cilja su nule.

Problem je kanonski, funkcija cilja je definisana ostaje da se utvrdi nenegativnost nepoznatih x, u, i w. Za u i w već je postavljen zahtjev nenegativnosti. Nepoznate **x** taj zahtjev u opštem slučaju ne ispunjavaju, pa je potrebno uvesti nove nepoznate $\bar{x} \geq 0$ koje se definišu na slijedeći način:

$$\bar{x}_j = x_j + \bar{x}_{n+1},\ j = 1, 2, \ldots, n \tag{11}$$

gdje je

$$\bar{x}_{n+1} = \max(0, -\min x_j). \tag{12}$$

Matrica A se proširuje za jednu kolonu čiji su elementi:

$$a_{i,\,n+1} = -\sum_{j=1}^{n} a_{ij}, \qquad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{13}$$

Tako se lako dokaže ako se u

$$v_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n - f_i$$

nepoznate x_i zamjene novim nepoznatim $\bar{x}_i$. Biće:

$$v_i = a_{i1}(\bar{x}_1 - \bar{x}_{n+1}) + a_{i2}(\bar{x}_2 - \bar{x}_{n+1}) + \ldots + a_{in}(\bar{x}_n - \bar{x}_{n+1}) - f_i =$$
$$= a_{i1}\bar{x}_1 + a_{i2}\bar{x}_2 + \ldots + a_{in}\bar{x}_n - (\sum_{j=1}^{n} a_{ij})\,\bar{x}_{n+1} - f_i.$$

U funkciji cilja je sada prvih (n + 1) koeficijenata jednako nuli. Nove nepoznate $\bar{x}$ su nenegativne pa se problem konačno može napisati u obliku:

$$\sum_{i=1}^{m} (u_i + w_i) = \min \tag{14}$$

uz uslove:

$$\bar{A}\bar{x} - u + w = f \tag{15}$$

$$\bar{x}, u, w \geq 0 \tag{16}$$

gdje je

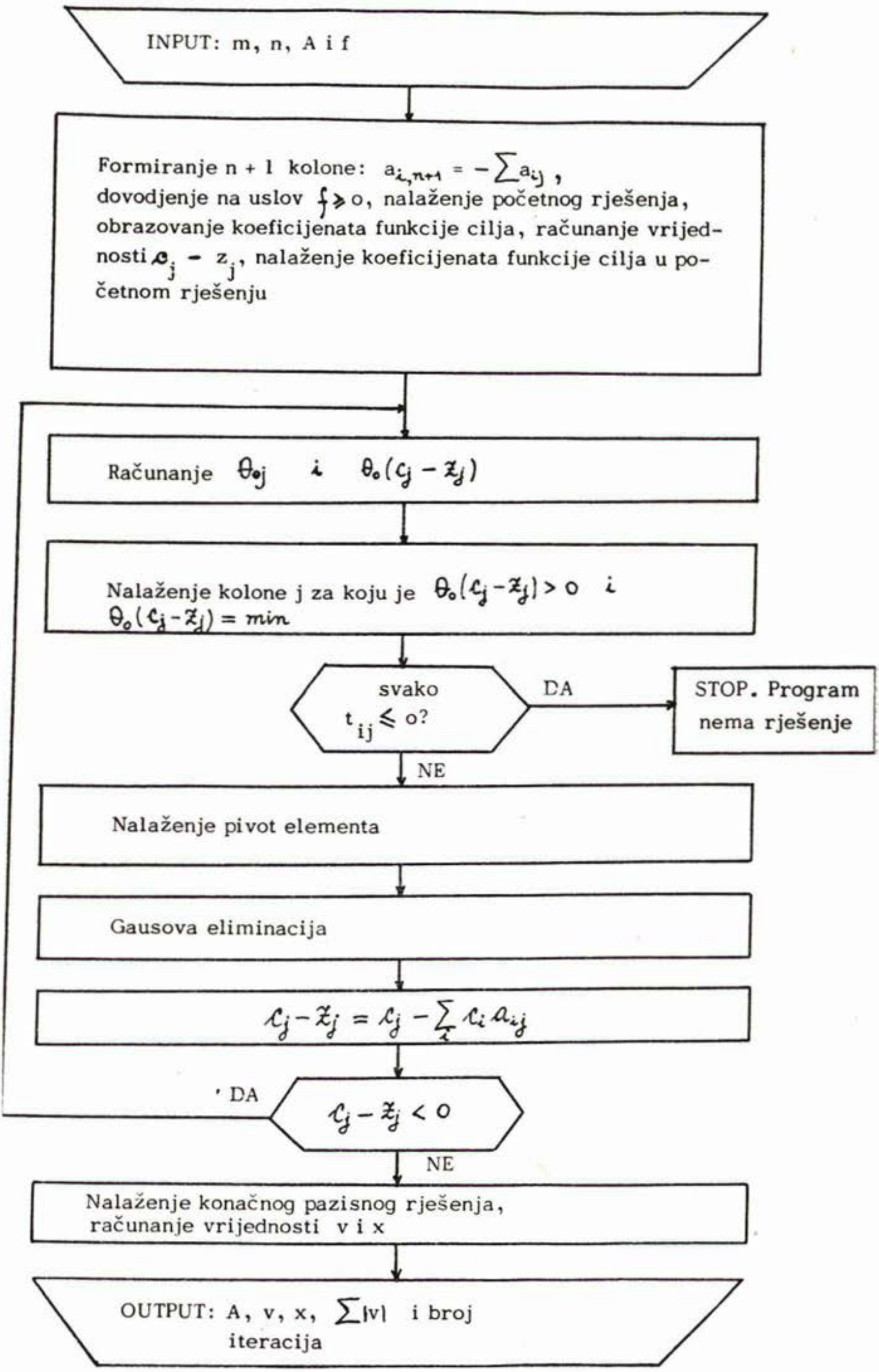
$$\bar{A} = \left[\begin{array}{c|c} & a_{1,\,n+1} \\ A & \vdots \\ & a_{i1,\,n+1} \end{array}\right].$$

Šematski prikazano izgleda ovako:

	n + 1				m				m				
	0	0	...	0	1	1	...	1	1	1	...	1	
m	a_{11}	a_{12}	...	$a_{1\,n+1}$	-1				1				f_1
	a_{21}	a_{22}	...	$a_{2\,n+1}$		-1				1			f_2
	$\vdots$	$\vdots$											$\vdots$
	a_{m1}	a_{m2}	...	$a_{m\,n+1}$				-1				1	f_m

Brojevi 0 i 1 iznad tabele su koeficijenti funkcije cilja. Tabela sadrži dvije jedinične matrice od kojih je prva negativna. Dimenzije tabele (bez vektora f) su m (2m + n + 1).

Radi smanjenja broja računskih operacija i potrebne memorije računara, čime se znatno dobiva i na vremenu, može se izostaviti jedna matrica dimenzija (m, m) pa se dimenzije tabele svode na m (m + n + 1). To se postiže tako što se može odmah naći početno rješenje. Na taj način otpada i vrijeme potrebno za nalaženje početnog rješenja. Uz pretpostavku da je $f \geq 0$ početno rješenje je $w = f$.


INPUT: m, n, A i f
Formiranje n + 1 kolone: $a_{i,n+1} = -\sum a_{ij}$,
dovodjenje na uslov $f \geqslant 0$, nalaženje početnog rješenja, obrazovanje koeficijenata funkcije cilja, računanje vrijednosti $c_j - z_j$, nalaženje koeficijenata funkcije cilja u početnom rješenju
Računanje θ_{0j} i $\theta_0(c_j - z_j)$
Nalaženje kolone j za koju je $\theta_0(c_j - z_j) > 0$ i $\theta_0(c_j - z_j) = min$
svako $t_{ij} \leqslant 0$?
DA
STOP. Program nema rješenje
NE
Nalaženje pivot elementa
Gausova eliminacija
$c_j - z_j = c_j - \sum_i c_i a_{ij}$
DA
$c_j - z_j < 0$
NE
Nalaženje konačnog pazisnog rješenja, računanje vrijednosti v i x
OUTPUT: A, v, x, $\sum |v|$ i broj iteracija

Iz teorije linearnog programiranja poznato je da se, u slučaju kada je problem moguć, vektor koji izađe iz baze više ne vraća u nju pa je dovoljno samo pamtiti koji je vektor u tekućoj bazi. Problem (14), (15), (16) je moguć jer je tako konstruisan. Neslaganje može nastupiti samo usled pogrešnog formiranja problema a to je tada greška računanja (odnosno kompjuterskog programa).

U slučaju da nije ispunjen uslov $f \geq 0$ tj. da postoji bar jedno $f_i < 0$ potrebno je najprije i-ti red pomnožiti sa -1 (to je inače uslov kod rješavanja kanonskog problema). Time u početno rješenje umjesto w_j ulazi u_{j-m}, pa se opet može izdvojiti jedinična matrica dimenzija (m, m) koja se ne mora koristiti. To, međutim, nisu više posljednjih m kolona pa je potrebno pamtiti koji su vektori u tekućem baričnom rješenju i koji je vektor w_j u skraćenoj tabeli upisan među vektore u_j. Po postignutom optimumu popravke v se računaju po formuli (5):

$$v = u - w \tag{17}$$

s tim što se u i w nikad ne pojavljuju zajedno za isto i pa je ili $v_i = u_i$ ili $v_i = -w_i$.

Osim direktnog nalaženja vrijednosti za v iz rezultata optimalne tabele mogu se koristiti i vrijednosti nepoznatih x i $\bar{x}$ i računati po formulama:

$$x_j = \bar{x}_j - \bar{x}_{n+1}$$

$$v = Ax - f$$

ili indirektno

$$v = \bar{A}\bar{x} - f \tag{18}$$

Vektor x se mora najprije sračunati. Za računanje popravaka v koriste se zatim početni podaci matrice A i vektor f koji se moraju sačuvati. Za računanje preko vektora $\bar{x}$ koriste takođe početni podaci i $(n + 1)$ — a kolona koja se ili sačuva ili ponovo formira. Vrijednost $\bar{x}$ se uzimaju direktno iz optimalne tabele.

U oba slučaja računanja popravaka v preko vektora x odnosno $\bar{x}$ zahtijeva se čuvanje početnih podataka što može predstavljati znatnu teškoću u korišćenju memorije računara. Prednost je, međutim, u tome što se ne moraju pamtiti vektori koji su u tekućoj bazi već se jednostavno odbaci matrica I a u slučaju negativnih komponenata vektora f matrica -1 se ne množi sa -1.

LITERATURA

[1] F. R. Helmert: Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der Kleinsten Quadrate — III izdanje — Leipzig — Berlin 1924.

[2] H. Wolf: Ausgleichnungsrechnung nach der Mehtode der Kleinsten Quadrate, Hannover — München 1968.

[3] V. S. Koroljk i drugi: Spravočnik po teoriji verjoatnostej i matematičeskoj statistike, Kiev 1978.

[4] E. Graferend i drugi: Optimierung geodätischer Messoperationen, Karlsruhe 1979.

[5] M. Mitić: Geodezija II — skripta, Beograd 1963.

[6] Lj. Martić: Matematičke metode za ekonomske analize II, Zagreb, 1972.
[7] B. V. Gnedenko: Kurs teorii verojatnostei, Moskva 1961.
[8] G. Radley: Linear Programming, London, 1962.
[9] * * * Flurbereiningungsgesetz BRD, 1953. i 1976.
[10] F. R. Helmert: Studien über rationelle Vermessung in Gebiet der höheren Geodäsie, Zf Math. und Phys. 13, 1968.
[11] Lj. Martić — A. Vadnal: Operativno istraživanje, Zagreb 1968.
[12] J. Köhr: Die Optimierung von Messungen auf Kostengrundlage. ZfV 92, 1967.
[13] G. B. Dantzig: Maximation of a Linear Function of Variables Subjects to Linear Inequalities, New York, 1960.
[14] G. B. Dantzig: Linear Programming and Extensions, Princeton 1963.
[15] D. Gale: The Theory of Linear Economic Models, New York, 1960.
[16] G. B. Dantzig: Computational Algorithm of Revised Simplex Method, Santa Monica, 1953.
[17] E. Reinhart: Exacte Abschätzung von Maximalfehlern aus vorgegebenen Toleranzen der Beobachtungsgrössen. DKG, Reihe C, sv. 211, München 1975.
[18] Nj. Vukotić: Primjena linearnog programiranja u računu izravnanja, Doktorska disertacija, Sarajevo 1981.

REZIME

U radu je obrađeno izravnanje po metodi najmanje sume apsolutnih vrijednosti popravaka $\sum_{i} |v_i| = \min$ koje je, na svoj način, još 1755. godine, postavio R. Bošković a koje se tek pojavom linearnog programiranja i SIMPLEX metode može rješavati i za višedimenzionalni problem.

ZUSAMMENFASSUNG

Es ist Ausgleichung nach der Methode der kleinste Absolutwertesumme der Verbesserungen $\sum_{i} |v_i| = \min$ beschrieben, der, auf seiner Art, schon in Jahre 1755. R. Bošković gegeben hat und der erst mit Linear Programmierung und SIMPLEX-Methode auch für mehrdimensionale Probleme lösbar ist.

Primljeno: 1981-08-07