UDK 528.143
Originalan znanstveni rad

IZRAVNAVANJE DIREKTNO MERENIH VELIČINA SA USLOVIMA, NEMERENIM NEPOZNATAMA I PSEUDO MERENJIMA

Ivan MOLNAR — Novi Sad*

1. UVOD

Do sada se smatralo i zastupalo (npr. u [1]) da najopštiji slučaj izravnanja jeste izravnanje po metodi uslovnih merenja sa nepoznatim veličinama, tačnije, izravnanje direktno merenih veličina sa uslovima i nemerenim nepoznatama. U nastavku, biće učinjen pokušaj, da se pomenuti »najopštiji« slučaj izravnanja, posredstvom ataširanih peseudo merenja, dalje uopšti.

Postupak izravnanja koji se u ovom radu predlaže, u odnosu na konvencionalno izravnanje po metodi uslovnih mrenja, razlikuje se po tome, što se merenja ostvaruju samo za deo nepoznatih, za preostali deo nepoznatih merenja se ne vrše. Uslovi se mogu zadovoljiti samo tada, kad se u izravnanje uključe i nemerene nepoznate. Pored toga, nemerene nepoznate (ili jedan njihov deo), takođe, treba da međusobno zadovolje određene uslove. Zadovoljenje tih uslova, ostvaruje se pomoću pseudo merenja.

2. USLOVNE I PSEUDO JEDNAČINE

Neka je ostvareno n direktnih merenja, koja se smatraju očekivanim vrednostima slučajno promenljivih

$$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$$

Izravnate vrednosti očekivanih vrednosti su

$$I_1, I_2, \ldots, I_n$$

Neka u uslovnim jednačinama, sem navedenih, figuriše još i g slučajno promenljivih koje se ne mogu direktno meriti

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_g$$

* Adresa autora: Dr Ivan Molnar, dipl. inž. Pokrajinska geodetska uprava, Novi Sad, Bulevar Maršala Tita broj 16

Njihove izravnate vrednosti su

$$X_1, X_2, \ldots, X_g$$

Opšti oblik r uslovnih jednačina slučajno promenljivih, odnosno izravnatih vrednosti, ima sledeći oblik

$$\varphi_i(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_g = c_i \qquad i = 1, 2, \ldots, r \tag{1}$$

odnosno,

$$\varphi_i(I_1, I_2, \ldots, I_n, X_1, X_2, \ldots, X_g = c_i \qquad i = 1, 2, \ldots r \tag{2}$$

Ako se priraštaji privremenih vrednosti nepoznatih obeleže sa x, tada izravnate vrednosti nepoznatih X pretstavljaju zbir privremenih vrednosti i priraštaja,

$$X = x_0 + x \tag{3}$$

dok se izravnate vrednosti merenih rezultata dobijaju kao zbir merenih rezultata i popravaka dobijenih iz izravnanja

$$I = L + v \tag{4}$$

Pseudo jednačine se, poput uslovnih jednačina, po potrebi linearizuju i poprimaju sledeći izgled

$$E_1 x_1 + E_2 x_2 + \ldots + E_g x_g + 0 = 0 \tag{5}$$

Broj nezavisnih pseudo jednačina m, nalaze se u razmaku $1 \leq m \leq 4$, tj. m uzima vrednosti defekta slobodne mreže.

Razvijanjem u red uslovnih i pseudo jednačina, kao i odgovarajućim sređivanjem, dobija se

$$\begin{array}{r}
a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n + A_1 x_1 + A_2 x_2 + \ldots + A_g x_g + a = 0 \\
b_1 v_1 + b_2 v_2 + \ldots + b_n v_n + B_1 x_1 + B_2 x_2 + \ldots + B_g x_g + b = 0 \\
\hline
r_1 v_1 + r_2 v_2 + \ldots + r_n v_n + R_1 x_1 + R_2 x_2 + \ldots + R_g x_g + r = 0 \\
\alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2 + \ldots + \varepsilon_1 x_g + 0 = 0 \\
\alpha_2 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \varepsilon_2 x_g + 0 = 0 \\
\hline
\alpha_g x_1 + \beta_g x_2 + \ldots + \varepsilon_g x_g + 0 = 0
\end{array}$$

Uslovne i pseudo jednačine, mogu se napisati i na pregledniji način

$$\left.\begin{array}{r} B^T v + C^T x + l = 0 \\ D\ x + 0 = 0 \end{array}\right\} \tag{6}$$

gde su

$$\underset{(r,n)}{B^T} = \left\| \begin{array}{l} a_1 a_2 \ldots a_n \\ b_1 b_2 \ldots b_n \\ \hline \hline r_1 r_2 \ldots r_n \end{array} \right\| \quad \underset{(r,g)}{C^T} = \left\| \begin{array}{l} A_1 A_2 \ldots A_g \\ B_1 B_2 \ldots B_g \\ \hline \hline R_1 R_2 \ldots R_g \end{array} \right\| \quad \underset{(m,g)}{D} = \left\| \begin{array}{l} \alpha_1 \beta_1 \ldots \varepsilon_1 \\ \alpha_2 \beta_2 \ldots \varepsilon_2 \\ \hline \hline \alpha_g \beta_g \ldots \varepsilon_g \end{array} \right\| \quad \begin{array}{l} \underset{(1,n)}{v^T} = \| v_1 v_2 \ldots v_n \| \\ \underset{(1,g)}{x^T} = \| x_1 x_2 \ldots x_g \| \\ \underset{(1,r)}{l^T} = \| a\ b\ \ldots\ r \| \end{array}$$

Izravnanje se, u nastavku, može realizovati na dva načina

2.1 *Izvršenje izravnanja uvođenjem korelata*

Prvi način rešavanja napred izloženog zadatka, ostvaruje se uvođenjem tzv. Lagranžovih multiplikatora. U cilju zadovoljenja uslova minimuma, koeficijente uz vektore priraštaja: popravaka, nepoznatih i korelata, treba izjednačiti sa nulom. Na osnovu toga dobijamo, iz izravnanja po metodi uslovnih merenja nam poznate, jednačine korelata,

$$v = p^{-1} B k \tag{7}$$

i sistem linearnih normalnih jednačina, koji sadrži (r + g) nepoznatih

$$\left.\begin{aligned} \underset{(r,r)}{(B_p^{T-1} B)} \underset{(r,1)}{k} + \underset{(r,g)}{C^T} \underset{(g,1)}{x} + \underset{(r,1)}{1} &= \underset{(r,1)}{0} \\ \underset{(g,r)}{C} \underset{(r,1)}{k} \pm \underset{(g,m)}{D^T} \underset{(m,g)}{D} \underset{(g,1)}{x} + \underset{(g,1)}{0} &= \underset{(g,1)}{0} \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

U matričnom obliku, normalne jednačine glase

$$\begin{Vmatrix} (B_p^{T-1} B) & C^T \\ C & D^T D \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} k \\ x \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \end{Vmatrix} = 0 \tag{9}$$

ili pisanjem na tradicionalan način

$$\begin{array}{l}
\left[\frac{aa}{p}\right] k_a + \left[\frac{ab}{p}\right] k_b + \ldots + \left[\frac{ar}{p}\right] k_r + A_1 x_1 + A_2 x_2 + \ldots + A_g x_g + a = 0 \\
\left[\frac{ab}{p}\right] k_a + \left[\frac{bb}{p}\right] k_b + \ldots + \left[\frac{br}{p}\right] k_r + B_1 x_1 + B_2 x_2 + \ldots + B_g x_g + b = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\left[\frac{ar}{p}\right] k_a + \left[\frac{br}{p}\right] k_b + \ldots + \left[\frac{rr}{p}\right] k_r + R_1 x_1 + R_2 x_2 + \ldots + R_g x_g + r = 0 \\
A_1 k_a + B_1 k_b + \ldots + R_1 k_r + [\alpha\alpha] x_1 + [\alpha\beta] x_2 + \ldots + [\alpha\varepsilon] x_g + 0 = 0 \\
A_2 k_a + B_2 k_b + \ldots + R_2 k_r + [\alpha\beta] x_1 + [\beta\beta] x_2 + \ldots + [\beta\varepsilon] x_g + 0 = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
A_g k_a + B_g k_b + \ldots + R_g k_r + [\alpha\varepsilon] x_1 + [\beta\varepsilon] x_2 + \ldots + [\varepsilon\varepsilon] x_g + 0 = 0
\end{array}$$

Rešenjem normalnih jednačina dobijamo, priraštaje nepoznatih i korelate, a zatim iz jednačina korelata, popravke merenih rezultata.

Računsku kontrolu ostvarujemo primenom izraza

$$v^T p v = - k^T 1 \tag{10}$$

Kvadrat srednje greške jedinice težine iznosi

$$\mu_0^2 = v^T p v (r + m - g)^{-1} \tag{11}$$

Odredimo, u nastavku, matricu koeficijenata težina izravnatih vrednosti nepoznatih. Napišimo iznova normalne jednačine i uvedimo oznaku $(B^T p^{-1} B) = N$

$$N k + C^T x + 1 = 0 \tag{12}$$

$$C k \pm D^T D x + 0 = 0 \tag{13}$$

Eliminišimo iz ovog sistema jednačine korelata. U tom cilju izmnožimo (12) a $C N^{-1}$, oduzmimo od (13) i odredimo vektor priraštaja nepoznatih,

$$x = -\,[(C\,N^{-1}\,C^T) \pm D^T D]^{-1}\,C\,N^{-1}\,l \tag{14}$$

a zatim iz (12) i vektor korelata

$$k = -\,N^{-1}(C^T x + l) \tag{15}$$

Matricu koeficijenata težina izravnatih vrednosti nepoznatih, dobijamo primenom opšteg zakona rasprostiranja grešaka

$$Q_x = [(C\,N^{-1}\,C^T) \pm D^T D]^{-1}\,(C N^{-1}\,C^T)\,[C\,N^{-1}\,C^T) \pm D^T D]^{-1} \tag{16}$$

Varijanc-kovarijanc matricu nepoznatih određujemo pomoću zavisnosti

$$K_x = \mu_0^2\,Q_x \tag{17}$$

2.2 Izvršenje izravnanja smanjenjem broja nepoznatih

Kad se izravnanje ostvaruje na ovaj način, tada iz m pseudo jednačina treba izraziti m nepoznatih, posredstvom preostalih (g-m) nepoznatih. Na taj način se, prvobitne uslovne jednačine koje su sadržale g nepoznatih, transformišu u r uslovnih jednačina koje sadrže, samo, (g-m) međusobno nezavisnih nepoznatih

$$\underset{(r,n)}{B^T}\;\underset{(n,1)}{v} + \underset{(r,g-m)}{\overline{C}^T}\;\underset{(g-m,1)}{x} + \underset{(r,1)}{l} = \underset{(r'1)}{0} \tag{18}$$

(Nadvučena matrica $\overline{C}^T$ ukazuje na izmenjenost pojedinih elemenata, u odnosu na elemente, prvobitne matrice C^T). Ovom intervencijom zadatak se svodi na, iz literature nam poznato, izravnanje direktno merenih veličina sa uslovima i nemerenim nepoznatama.

Ako zadatak rešavamo na ovaj način, tada se izravnanje ostvaruje u sledećim etapama:

— usvajamo, sa dovoljnom približnošću, privremene vrednosti nepoznatih x_0

— uspostavljamo r uslovnih jednačina, koje proizilaze iz n ostvarenih merenja,

$$B^T v + C^T x + l = 0 \tag{19}$$

kao i matricu težina merenja p

— obrazujemo, u zavisnosti od defekta mreže, m pseudo jednačina

$$D\,x + 0 = 0 \qquad 1 \leq m \leq 4 \tag{20}$$

— izrazimo m nepoznatih, iz m pseudo jednačina, pomoću preostalih (g-m) nepoznatih

— dobijene nepoznate, izražene iz pseudo jednačina, smenjujemo u uslovne jednačine, a zatim ih sređujemo. Transformirane uslovne jednačine sadrže samo (g-m) nepoznatih

$$B^T v + \overline{C}^T x + l + 0 \tag{21}$$

— na osnovu transformisanih uslovnih jednačina, obrazujemo normalne jednačine. Zatim, određujemo (g-m) nepoznatih i r korelata

$$\left\| \begin{array}{cc} \underset{(r,r)}{N} & \underset{(r,g-m)}{\overline{C}^T} \\ \underset{(g-m,r)}{\overline{C}} & \underset{(g-m,\ g-m)}{O} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \underset{(r,1)}{k} \\ \underset{(g-m,1)}{x} \end{array} \right\| + \left\| \begin{array}{c} \underset{(r,1)}{1} \\ \underset{(g-m,1)}{0} \end{array} \right\| \underset{(r+g-m,1)}{= 0} \qquad (22)$$

$$x = -(\overline{C}N^{-1}\overline{C}^T)^{-1}\overline{C}N^{-1}1 \qquad (23$$

$$k = -(\overline{C}^T x + 1) \qquad (24)$$

— preostalih m nepoznatih određujemo iz pseudo jednačina

— popravke merenih rezultata dobijamo iz jednačina korelata

$$v = p^{-1}Bk \qquad (25)$$

— računamo izravnate vrednosti nepoznatih,

$$X = x_0 + x \qquad (26)$$

a zatim i izravnate vrednosti merenih rezultata

$$I = L + v \qquad (27)$$

— računsku kontrolu ostvarujemo na osnovu relacije

$$v^T p v = -k^T 1 \qquad (28)$$

— srednju grešku jedinice težine računamo prema izrazu

$$\mu_0^2 = v^T p v (r - g + m)^{-1} \qquad (29)$$

— matricu koeficijenata težina izravnatih vrednosti nepoznatih, određujemo primenom opšteg zakona rasprostiranja grešaka

$$Q_x = S(\overline{C}N^{-1}\overline{C}^T)^{-1}S^T \qquad (30)$$

gde se matricom S izražava zavisnost vektora $\underset{(g,1)}{x}$ i $\underset{(g-m,1)}{x}$

$$\underset{(g,1)}{x} = \underset{(g,g-m)}{S}\ \underset{(g-m,1)}{x} \qquad (31)$$

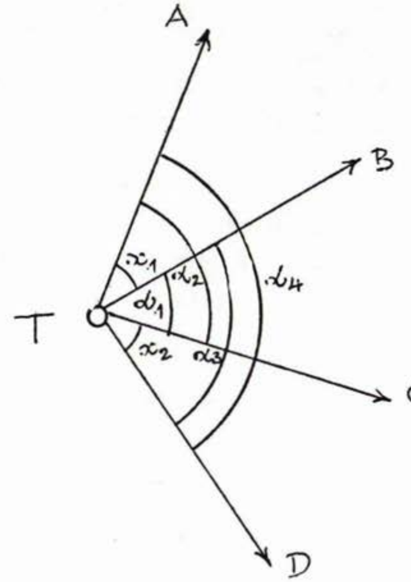
— varijanc-kovarijanc matricu nepoznatih određujemo primenom zavisnosti

$$K_x = \mu_0^2 Q_x = \mu_0^2 S(\overline{C}N^{-1}\overline{C}^T)^{-1}S^T \qquad (32)$$

3. ZADATAK

Izmereni su, prema sl. 1, uglovi α_1, α_2, α_3 i α_4, a ostali nemereni uglovi x_1 i x_2. Odredimo najverovatnije vrednosti pravaca A, B, C i D. Vrednosti merenih rezultata i broja girusa iznose:

$L\alpha_1 = 36° 23' 21''$ $p\alpha_1 = 1$
$L\alpha_2 = 66° 24' 30''$ $p\alpha_2 = 2$
$L\alpha_3 = 74° 53' 42''$ $p\alpha_3 = 2$
$L\alpha_4 = 104° 54' 46''$ $p\alpha_4 = 3$



Sl. 1

Usvojimo za privremene vrednosti pravaca sledeće vrednosti

$$A_0 = 0^\circ\,00'\,00'' \quad B_0 = 30^\circ\,01'\,10'' \quad C_0 = 66^\circ\,24'\,30'' \quad D_0 = 104^\circ\,54'\,50''$$

3.1 Ako se izravnanje ostvaruje uvođenjem korelata, tada treba napisati 4 nezavisne ulovne jednačine. Odaberimo sledeću varijantu

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= -X_A + X_B - X_C + X_D + I\alpha_1 - I\alpha_4 = 0;\\
\varphi_2 &= -X_A + X_B + I\alpha_1 - I\alpha_2 = 0;\\
\varphi_3 &= -X_C + X_D + I\alpha_1 - I\alpha_3 = 0;\\
\varphi_4 &= -X_B + X_C - I\alpha_1 = 0;\\
l_1 &= -A_0 + B_0 - C_0 + D_0 + L\alpha_1 - L\alpha_4 = 5''\\
l_2 &= -A_0 + B_0 + L\alpha_1 - L\alpha_2 = 1''\\
l_3 &= -C_0 + D_0 + L\alpha_1 - L\alpha_3 = -1''\\
l_4 &= -B_0 + C_0 - L\alpha_1 = -1''
\end{aligned}$$

Na osnovu toga, odgovarajuće matrice i vektor iznose

$$\underset{(4,4)}{B^T} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \quad \underset{(4,4)}{C^T} = \begin{Vmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{Vmatrix} \quad \underset{(4,1)}{l} = \begin{Vmatrix} 5'' \\ 1'' \\ 1'' \\ 1'' \end{Vmatrix} \quad \underset{(4,4)}{p} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{Vmatrix}$$

Kako je defekt mreže d = 1, pseudo jednačina glasi

$$x_A + x_B + x_C + x_D + 0 = 0, \text{ tj. } \underset{(1,4)}{D} = \| 1\ 1\ 1\ 1 \|$$

Obrazujmo normalne jednačine prema (9)

$$\frac{1}{6}\begin{Vmatrix} 8 & 6 & 6 & -6 & -6 & 6 & -6 & 6 \\ 6 & 9 & 6 & -6 & -6 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 6 & 9 & -6 & 0 & 0 & -6 & 6 \\ -6 & -6 & -6 & 6 & 0 & -6 & 6 & 0 \\ -6 & -6 & 0 & 0 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 0 & -6 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ -6 & 0 & -6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 6 & 0 & 6 & 0 & 6 & 6 & 6 & 6 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} k_a \\ k_b \\ k_c \\ k_d \\ x_A \\ x_B \\ x_C \\ x_D \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} = 0$$

Rešenjem normalnih jednačina, dobijaju se korelate i priraštaji pravaca

$$k = \begin{Vmatrix} -2{,}143 \\ 2{,}143 \\ 2{,}143 \\ 0 \end{Vmatrix} \qquad x = \begin{Vmatrix} 2'',143 \\ -2'',071 \\ 1'',071 \\ -1'',143 \end{Vmatrix}$$

Popravke merenja iznose kontrola

$$v = p^{-1}\,B\,k = \begin{Vmatrix} 2'',143 \\ -1'',072 \\ -1'',072 \\ 0'',714 \end{Vmatrix} \qquad \begin{array}{c} v^T p\, v = -k^T L \\ 10{,}718 = 10{,}715 \end{array}$$

Izravnate vrednosti pravaca, merenih i nemerenih uglova iznose

$$X = x_0 + x = \begin{Vmatrix} 0°00'02''143 \\ 30°01'07''929 \\ 66°24'31''071 \\ 104°54'48''857 \end{Vmatrix} \qquad I = L + v = \begin{Vmatrix} 36°23'23''143 \\ 66°24'28''928 \\ 74°53'40''928 \\ 104°54'46''714 \end{Vmatrix}$$

$$i = \begin{Vmatrix} B - A \\ D - C \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 30°01'05''786 \\ 38°30'17''786 \end{Vmatrix}$$

Matricu koeficijenata težina izravnatih vrednosti pravaca određujemo prema (16)

$$Q_x = \frac{1}{56}\begin{Vmatrix} 11 & -2 & 2 & 3 \\ -2 & 15 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 15 & -2 \\ 3 & 2 & -2 & 11 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 5 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 3 & 0 \\ -3 & -2 & 0 & 5 \end{Vmatrix} \frac{1}{56} \begin{Vmatrix} 11 & -2 & 2 & 3 \\ -2 & 15 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 15 & -2 \\ 3 & 2 & -2 & 11 \end{Vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{112}\begin{Vmatrix} 15 & -11 & -3 & -1 \\ -11 & 23 & -9 & -3 \\ -3 & -9 & 23 & -11 \\ -1 & -3 & -11 & 15 \end{Vmatrix}$$

a kvadrat srednje greške jedinice težine prema (11)

$$\mu_0^2 = \frac{10,718}{4-4+1} = 10,718$$

3.2 Rešimo zadatak, sada, smanjenjem broja nepoznatih. Ako pseudo jednačinu rešimo npr. po x_A, dobijamo $x_A - x_B - x_C - x_D$;

$$\underset{(4,4)}{B^T} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \quad \underset{(4,3)}{\overline{C}^T} = \begin{Vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{Vmatrix} \quad \underset{(4,4)}{p} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{Vmatrix} = \langle 1, 2, 3, \rangle$$

$$\underset{(4,1)}{l} = \begin{Vmatrix} 5'' \\ 1'' \\ -1'' \\ -1'' \end{Vmatrix}$$

Normalne jednačine, u ovom slučaju, obrazujemo prema (22)

$$\frac{1}{6}\begin{Vmatrix} 8 & 6 & 6 & -6 & 12 & 0 & 12 \\ 6 & 9 & 6 & -6 & 12 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 9 & -6 & 0 & -6 & 6 \\ -6 & -6 & -6 & 6 & -6 & 6 & 0 \\ 12 & 12 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -6 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 6 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} k_a \\ k_b \\ k_c \\ k_d \\ x_B \\ x_C \\ x_D \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} = 0$$

Rešenjem normalnih jednačina, dobijaju se korelate i deo priraštaja pravaca

$$k = \begin{Vmatrix} k_a \\ k_b \\ k_c \\ k_d \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -2,143 \\ 2,143 \\ 2,143 \\ 0 \end{Vmatrix} \qquad x = \begin{Vmatrix} x_B \\ x_C \\ x_D \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -2'',071 \\ 1'',071 \\ -1'',143 \end{Vmatrix}$$

Odredimo, iz pseudo jednačine, preostali priraštaj pravca x_A

$$x_A = -(x_B + x_C + x_D) = 2'',143$$

Elementi matrice normalnih jednačina dela priraštaja pravaca i inverzna matrica ove matrice iznose,

$$(\overline{C}N^{-1}\overline{C}^T) = 2\begin{Vmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 3 & 6 & 5 \\ 3 & 5 & 8 \end{Vmatrix} \qquad (\overline{C}N^{-1}\overline{C}^T)^{-1} = \frac{1}{112}\begin{Vmatrix} 23 & -9 & -3 \\ -9 & 23 & -11 \\ -3 & -11 & 15 \end{Vmatrix}$$

dok matrica S iznosi

$$S = \begin{Vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

Matricu koeficijenata težina izravnatih vrednosti pravaca određujemo na osnovu (30)

$$Q_x = \begin{Vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \frac{1}{112} \begin{Vmatrix} 23 & -9 & -3 \\ -9 & 23 & -11 \\ -3 & -11 & 15 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{112} \begin{Vmatrix} 15 & -11 & -3 & -1 \\ -11 & 23 & -9 & -3 \\ -3 & -9 & 23 & -11 \\ -1 & -3 & -11 & 15 \end{Vmatrix}$$

Popravke merenja se dobijaju prema (25) kontrola:

$$v = p^{-1} B k = \begin{Vmatrix} 2'',143 \\ -1''\,072 \\ -1'',072 \\ 0'',714 \end{Vmatrix} \qquad \begin{array}{c} v^T p v = -k^T l \\ 10,718 = 10,715 \end{array}$$

Izravnate vrednosti pravaca, merenih i nemerenih uglova iznose

$$X = x_0 + x = \begin{Vmatrix} 0°00'02''143 \\ 30°01'07''929 \\ 66°24'31''071 \\ 104°54'48''857 \end{Vmatrix} \qquad l = L + v = \begin{Vmatrix} 36°23'23''143 \\ 66°24'28''928 \\ 74°53'40''928 \\ 104°54'46''714 \end{Vmatrix}$$

$$i = \begin{Vmatrix} B - A \\ D - C \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 30°01'05''786 \\ 38°30'17''786 \end{Vmatrix}$$

Kvadrat srednje greške računamo prema (29),

$$\mu_0^2 = \frac{10,718}{4 - 4 + 1} = 10,718$$

a varijanc — kovarijanc matricu pravaca na osnovu (32)

$$K_x = \frac{10,718}{112} \begin{Vmatrix} 15 & -11 & -3 & -1 \\ -11 & 23 & -9 & -3 \\ -3 & -9 & 23 & -11 \\ -1 & -3 & -11 & 15 \end{Vmatrix}$$

4. ZAKLJUČNA RAZMATRANJA

U radu je izložena mogućnost daljeg uopštavanja izravnanja po metodi uslovnih merenja sa nepoznatim veličinama. Osnovno polazište ovakvog načina izravnanja je okolnost da se, u cilju određivanja svih veličina u slobodnoj mreži, u zavisnosti od defekta mreže, obrazuju od jedne do četiri pseudo jednačine merenja. Na taj način se, u odnosu na izravnanje po metodi uslovnih merenja sa nepoznatim veličinama, ostvaruju realnije vrednosti nepoznatih, verodostojnija ocena tačnosti, smanjenje korelisanosti izravnatih veličina, a ujedno omogućuje i određivanje objektivnijih kriterijuma u izvršenju apriorne ocene tačnoti merenih veličina.

LITERATURA

[1] Mihailović, K.: Teorija izravnanja i ocena tačnosti korelativno zavisnih veličina, Skripta za posle diplomske studije, Beograd 1969. g.

[2] Čubranić, N.: Teorija pogrešaka s računom izjednačenja, Zagreb 1967. g.

REZIME

U radu je saopšten nov pustupak izravnanja direktno merenih veličina sa uslovima, nemerenim nepoznatama i pridodatim pseudo merenjima. Ostvareno je dalje uopštavanje izravnanja po metodi uslovnih merenja sa nepoznatim veličinama. Primenom predloženog postupka mogu se rešavati gotovo svi zadaci u oblasti izravnanja slobodnih mreža.

Izvedeni izrazi u radu, ilustrovani su brojnim primerom.

ABSTRACT

This article decribes a new procedure for adjustment of directly measured value in conditions of unmeasured unknowns and added pseudo measurements. A further compilation of adjustment by the conditional measurement method with unknown values is accomplished. The application of the suggested procedure can solve almost all problems in the adjustment of independent networks.

The terms outlined in the article are illustrated by numerical examples.

Primljeno: 1981-03-09