UDK 528.482:693
693:513.4
Pregledni rad

ODREĐIVANJE TOČNOSTI IZVEDBE OBJEKTA CILINDRIČNOG OBLIKA

Petar CEROVAC — Split*

UVOD

Za izvedbu cilindra većih dimenzija kao što su cijevovodi hidroelektrana, razni kotlovi, trup podmornice i sl. objekti nameće se često potreba za provjerom izvedbe oblika objekta i položajem njegove osi. U većini slučajeva data su dozvoljena odstupanja u izvedbi tj. odstupanja optimalnih elemenata cilindra od teoretskih Kako su ta dozvoljena odstupanja redovito vrlo mala, to pogrešno interpretirani rezultati mjerenja mogu dovesi do neispravnih zaključaka o točnosti izvedbe [7] i [8]. U koliko se navedeni objekti grade iz više dijelova, za svaki dio odredit će se optimalna os. Da bi se dijelovi objekta spojili u jednu cjelinu moraju im se optimalne osi poklopiti. Jasno je da će doći do loma objekta, ako je kod bar jednog dijela objekta optimalna os pogrešno određena. I položaj niza naprava i instrumenata na objektu, postavljenih u odnosu na optimalnu os objekta, bit će pogrešan u koliko je ona pogrešno određena. Ponekad će trebati odrediti oblik cilindra na osnovi podataka jednog njegova segmenta. U svakom slučaju potrebno je posvetiti posebnu pažnju izmjeri i obradi podataka. U ovom prilogu obradit će se teoretski i praktično izvedba ovog zadatka.

ODREĐIVANJE OBLIKA

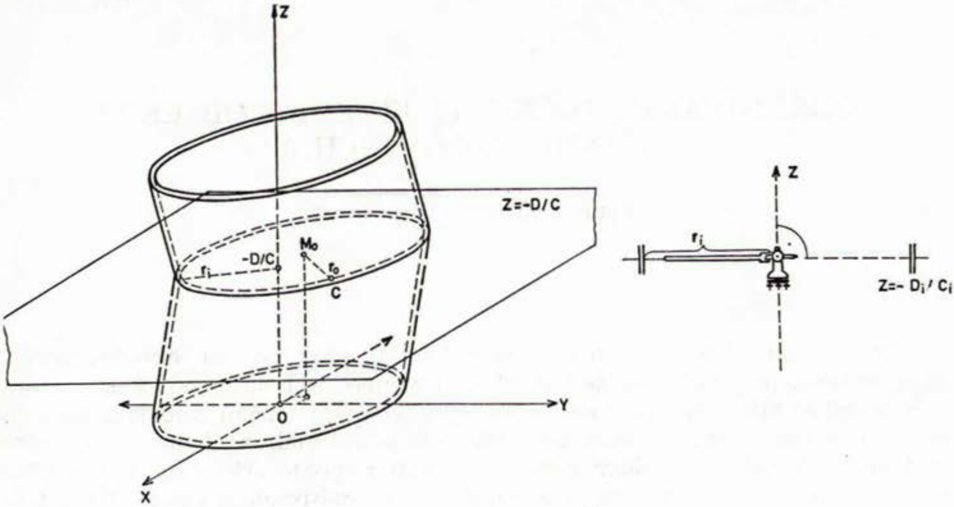
Oblik cilindra najlakše je odrediti u koliko mu je unutrašnja površina slobodna. Pri tom cilindar može biti vertikalan, kos ili horizontalan.

a) *Cilindar je vertikalan*

Cilindar će se postaviti s izvodnicom u vertikalan položaj pomoću instrumenta i odredit će mu se koordinatni sustav Oxyz (Sl. 1). Ishodište koordinatnog sustava odredit će se u osnovici cilindra iz nekoliko mjerenja. Nije neophodnog da ishodište koordinatnog sustava bude u centru (simetrije) osnovice cilindra, ono može u manjoj ili višoj mjeri od njega odstupati. Za prak-

* Adresa autora: Mr Petar Cerovac, dipl. inž., Građevinski institut OOUR Fakultet građevinskih znanosti Split, Veselina Masleše bb

tične radove nastoji se da odstupanja budu što manja, kako bi (vidjet će se to kasnije) dužine vizura, materijalizirane pomičnim mjerilom, bile približno jednake.



Sl. 1

Instrument će se postaviti s alhidadnom osi u koordinatnu os z, pa će se trasirati presječnica ravnine z = —D/C (definirana kolimacionom osi instrumenta prilikom njegova okretanja oko alhidadne osi) s unutrašnjom površinom cilindra, a potom će se odrediti polarne koordinate niza točaka na presječnici, na međusobnoj udaljenosti 5° do 20° polarnog kuta (Sl. 2a). Prelaz s polarnih na Descartesove koordinate provodi se po formulama

$$x = r \sin \varphi$$

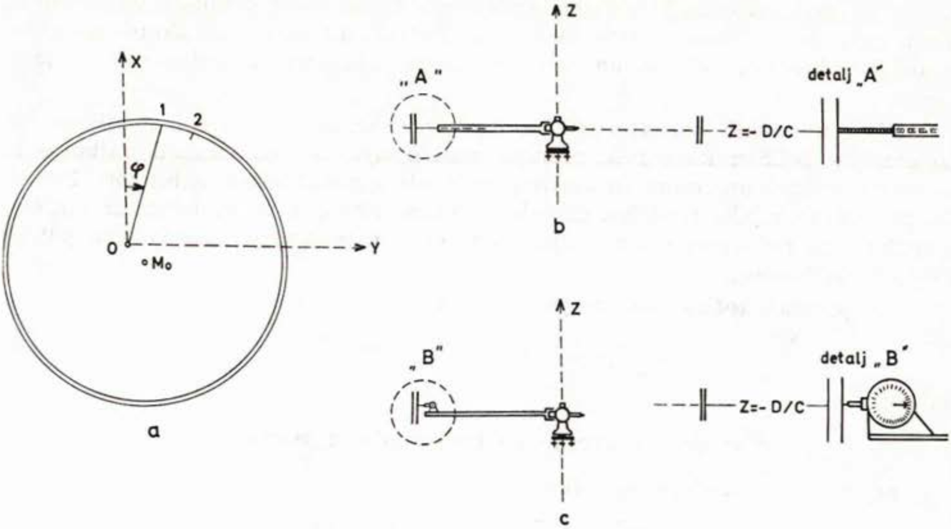
$$y = r \cos \varphi$$

gdje je

$$z = -D/C.$$

Ova mjerenja izvode se po volji odabranom broju presjeka, veći broj dat će bolji uvid u točnost izvedbe.

Kod određivanja polarnih koordinata točaka, poteškoću predstavlja jedino mjerenje polarnih radiusa, jer se polarni kutovi mjere lako i brzo. Polarne radiuse najlakše je odrediti pomoću »pomičnog mjerila« (Sl. 2b). Ako se dužini izmjerenoj na »pomičnom mjerilu« doda udaljenost od alhidadne osi do početka »pomičnog mjerila«, dobije se veličina polarnog radiusa. Točnost čitanja podjele na »pomičnom mjerilu« obično je 0,1 mm. Mogu se polarni radiusi odrediti i pomoću mjernog sata (Sl. 2c). U tom slučaju pomoću »pomičnog mjerila« odredi se polarni radius najmanje jedne točke, u odnosu na koji se potom, iz podataka dobivenih mjerenjem, mjernim satom, određuju polarni radiusi ostalih. Kod većine mjernih satova dužina mjerenja je 10 mm, a toč-

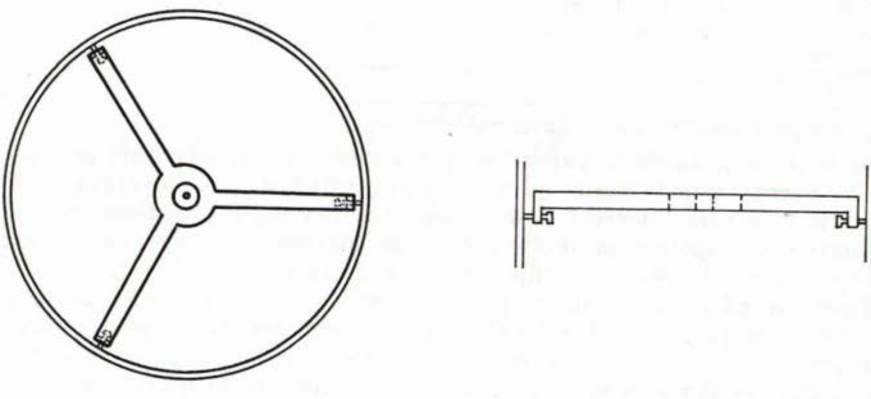


Sl. 2

nost čitanja je od 0,01 mm do 0,001 mm, ovisno o tipu.

Zbog neminovnih pogrešaka izvedbe presječnica neće biti pravilna matematička krivulja drugog reda, elipsa ili kružnica, već će od nje manje ili više odstupati.

U slučaju da je visina cilindra veća od maksimalne visine na koju se može postaviti stativ, izgradit će se »nosač« za instrument, (Sl. 3) i skela za operatora.



Sl. 3

Kako su kod praktičnih izvedbi odstupanja cilindra od projektiranih vrijednosti vrlo mala, to su veličine za koje se instrument može pomaknuti po glavi »nosača« dovoljne. da se on centrira iznad ishodišta koordinatnog sustava Oxyz.

Zbog tehničkih karakteristika optičkog viska instrumenta, kod visine instrumenta $>1{,}5$ m koristi se prisilno centriranje. U tom slučaju najbolje je poslužiti se instrumentom za optičke vertikale (optički visak, zenit lot). Pomoću podnožnih vijaka tronošca dovede se kolimaciona os instrumenta za optičke vertikale do poklapanja s osi z koordinatnog sustava Oxyz, na koji se potom postavi instrument.

Točnost položaja točke c na presječnici bit će

$$m_c^2 = m_x^2 + m_y^2 + m_s^2 \tag{2}$$

gdje su:

m_x i m_y — srednje pogreške po koordinatnim osima

m_s — srednja pogreška stabilizacije

$$m_x^2 = \sin^2\varphi \, m_r^2 + r^2 \cos^2\varphi \, m_\varphi^2$$

$$m_y^2 = \cos^2\varphi \, m_r^2 + r^2 \sin^2\varphi \, m_\varphi^2$$

Uvrsti li se m_x^2 i m_y^2 u formulu (2) dobije se

$$m_c^2 = r^2 \left(\frac{m_r}{r}\right)^2 + r^2 \left(\frac{m_\varphi}{\rho}\right)^2 + m_s^2 \tag{2 a}$$

gdje je

$\frac{m_r}{r}$ — relativna pogreška mjerenja polarnog radiusa.

Pogreška po koordinatnoj osi z (po visini) je zanemariva

$$m_z = 0, \qquad z = -D/C$$

Za ilustraciju dati su ovi podaci: $r = 3\,000$ mm, $m_\varphi = 60''$, $m_s = 1$ mm. Uvrštenjem ovih veličina u formulu (2a) dobiva se da je

$$m_c = 2{,}4\ \text{mm}$$

Ova točnost redovito zadovoljava zahtjeve prakse.

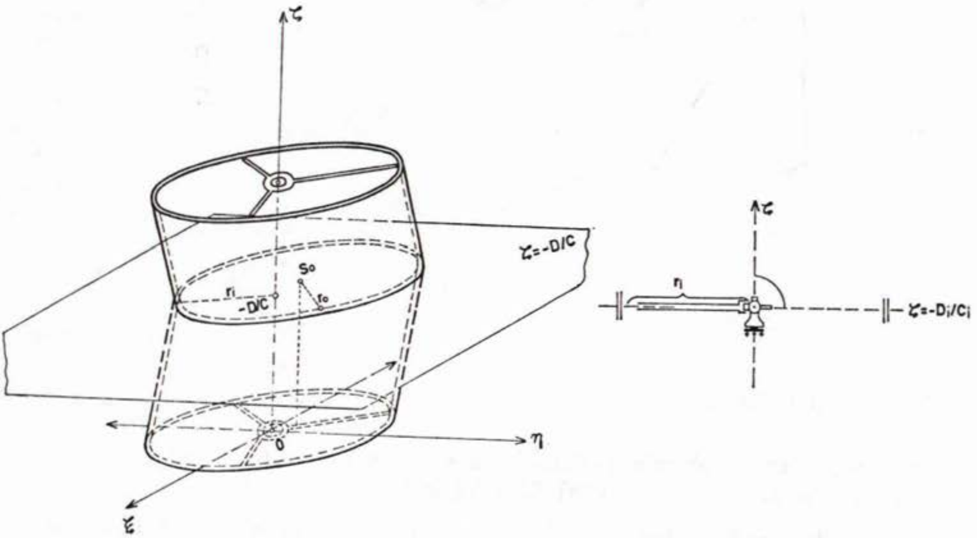
Jasno je da se postavljeni uvjeti mogu relativno lako ispuniti i da se s uspjehom navedena metoda mjerenja može primijeniti i za strožije kriterije. Zbog toga nije u formuli (2) uzeta u obzir pogreška centriranja instrumenta (prisilno centriranje upotrebom instrumenata za optičke vertikale, napr. Wildov ZNL — točnost 1/30000, uvećanje 10^x). Nije uzeta u obzir ni pogreška nevertikalnosti cilindra, jer je njegova izrada uvijek takve kvalitete, da omogućuje postavljanje u položaj, pri kojem se može zanemariti odstupanje uzdužne osi cilindra od osi z koordinatnog sustava Oxyz. Cilindar se u »vertikalan« položaj postavlja dovođenjem izvodnice u vertikalnu kolimacionu ravninu instrumenta. U slučaju da je ovo odstupanje znatnije, presječnica ravnine

$z = -D/C$ s unutrašnjom površinom cilindra i u slučaju da je kružni bit će elipsa. Zbog čega bi zaključak o obliku cilindra bio pogrešan.

Koordinate točaka (x_i, y_i, z_i), $i = 1, 2, \ldots, n$, presječnice ravnine $z = -D/C$ s unutrašnjom površinom cilindra mogle bi se odrediti i iz sfernih koordinata. Budući da je pogreška položaja točke na presječnici određena ovim načinom veća nego u prethodnom slučaju, to će se ovaj način u praksi koristiti samo u slučaju kad se prva metoda neće moći iz tehničkih razloga primijeniti.

b) *Cilindar je kos*

U ovom slučaju odredit će se približni centar (simetrije) obje osnovice i stabilizirati kao u prvom slučaju (a), iz nekoliko odmjeranja. To će se najjednostavnije izvesti graviranjem ili bušenjem rupice $<0{,}3$ mm na tankom limu koji se čvrsto veže uz glavu nosača. U brodograđevnoj praksi je za ovu napravu udomaćen izraz vizirka, pa će se zbog njegove praktičnosti usvojiti i u ovom prilogu.

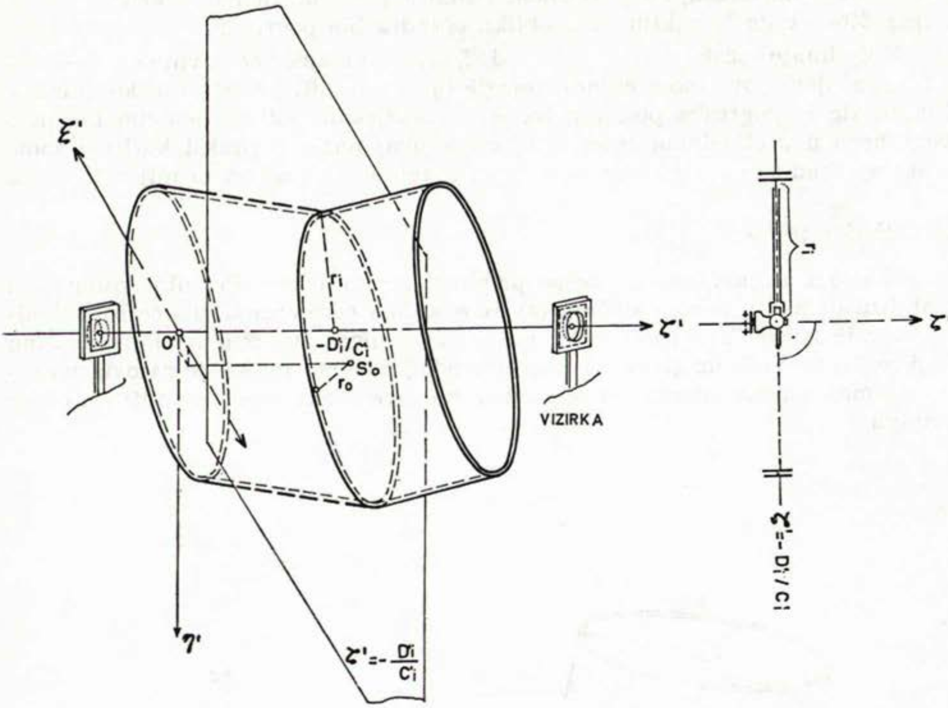


Sl. 4

Koordinatni sustav cilindra $O\eta\xi\vartheta$ određuje se uz uvjet, da se koordinatna os ϑ poklopi s uzdužnom osi cilindra, koja je određena vizirkama. Da bi se provjerio oblik cilindra postavit će se instrument s alhidadnom osi u koordinatnu os ϑ. Daljni postupak isti je kao i u prvom slučaju (a).

c) *Cilindar je horizontalan*

Postupak određivanja oblika cilindra isti je onom pokazanom u drugom slučaju (b). U ovom je slučaju postupak određivanja oblika cilindra u toliko olakšan, jer se uzdužna os cilindra (os ϑ' koordinatnog sustava cilindra $O\xi'\eta'\vartheta'$) može vizirkama stabalizirati i izvan cilindra (Sl. 5).



Sl. 5

OBRADA PODATAKA

Razmotrit će se obrada podataka za određivanje oblika kod prvog slučaja (a), jer je postupak za slučaj (b) i (c) isti.

Za zadani skup točaka (x_i, y_i), $i = 1,2,\ldots,n$, dobivenih mjerenjem, potrebno je odrediti funkciju koja će održavati zakonitost pojave, na osnovi koje se taj skup dobiva. Ovaj problem može se riješiti na više načina, ali najčešće se koristi kriterij najmanjih kvadrata, prema kojem je suma kvadrata odstupanja minimum. Ponekad će biti dovoljno točno da se navedeni problem riješi samo grafičkim putem.

Kako je već pokazano, presječnica ravnine $z = -D/C$ s unutrašnjom površinom cilindra je krivulja drugog reda. Traži se ona koja će se najbolje prilagoditi unutrašnjoj površini. Opća jednadžba krivulje drugog reda u pravokutnim koordinatama glasi

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \qquad (3)$$

s realnim koeficijentima, pri čemu mora bar jedan od a_{11}, a_{12}, a_{22} biti različit od nule. Uvedu li se još veličine a_{21}, a_{31} i a_{32} tako da je $a_{21} = a_{12}$, $a_{31} = a_{13}$

i $a_{32} = a_{23}$, mogu se koeficijenti a_{ij} (i,j = 1,2,3) svrstati u matricu A, koja je simetrična prema glavnoj dijagonali. Determinanta te matrice bit će

$$A = \begin{vmatrix} a_{11}\, a_{12}\, a_{13} \\ a_{21}\, a_{22}\, a_{23} \\ a_{31}\, a_{32}\, a_{33} \end{vmatrix}.$$

Označimo kofaktore elemenata a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{31} i a_{32} s

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22}\, a_{23} \\ a_{32}\, a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} a_{11}\, a_{13} \\ a_{31}\, a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11}\, a_{12} \\ a_{21}\, a_{22} \end{vmatrix}, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} a_{12}\, a_{13} \\ a_{22}\, a_{23} \end{vmatrix} \text{ i}$$

$$A_{32} = \begin{vmatrix} a_{13}\, a_{11} \\ a_{23}\, a_{21} \end{vmatrix}.$$

Pomoću determinante matrice A i kofaktora A_{11}, A_{22} i A_{33}, mogu se definirati svi mogući slučajevi egzistencije krivulja drugog reda.

Presječnica ravnine $z = -D/C$ sa cilindrom može biti i elipsa ili kružnica. U kojem slučaju će formula (3) predstavljati elipsu, a u kojem kružnicu vidjet će se iz slijedećih izlaganja

$$A \neq 0, A_{33} \neq 0 \begin{cases} a_{33} > 0, a_{11} A < 0 & \text{— realna elipsa} \\ a_{33} < 0, a_{11} A > 0 & \text{— imaginarna elipsa} \end{cases} \tag{4 a}$$

Za

$$a_{12} = 0 \text{ i } a_{11} = a_{22} \qquad \text{— elipsa prelazi u kružnicu} \tag{4 b}$$

Prema formuli (3) za određivanje matematičkog oblika elipse potrebno je odrediti 5 nepoznanica. Ako se formula (3) podijeli sa a_{33} slijedi

$$\frac{a_{11}}{a_{33}} x^2 + 2 \frac{a_{12}}{a_{33}} xy + \frac{a_{22}}{a_{33}} y^2 + 2 \frac{a_{13}}{a_{33}} x + 2 \frac{a_{23}}{a_{33}} y + 1 = 0.$$

Uvedu li se zamjene

$$\frac{a_{11}}{a_{33}} = \alpha_1, 2 \frac{a_{12}}{a_{33}} = \alpha_2, \frac{a_{22}}{a_{33}} = \alpha_3, 2 \frac{a_{13}}{a_{33}} = \alpha_4 \text{ i } 2 \frac{a_{23}}{a_{33}} = \alpha_5.$$

Bit će

$$E \equiv \alpha_1 x^2 + \alpha_2 xy + \alpha_3 y^2 + \alpha_4 x + \alpha_5 y + 1 = 0 \tag{5}$$

Da se odrede koeficijenti α_1, α_2, α_3, α_4 i α_5 potrebno je mjerenjem odrediti parove (x,y) za najmanje 5 točaka. U slučaju prekobrojnog broja merenja, odredit će se ona elipsa, koja se najbolje prilagođava unutrašnjoj površini cilindra, u promatranom presjeku [2] i [4]. Što je broj prekobrojnih mjerenja veći, to će i ovo prilagođavanje biti bolje.

Iz egzistencije minimuma funkcije E formula (5)

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_1} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \alpha_2} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \alpha_3} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \alpha_4} = 0 \text{ i } \frac{\partial F}{\partial \alpha_5} = 0.$$

Slijede normalne jednadžbe:

$$\begin{aligned} [x^2 x^2]\alpha_1 + [x^2 xy]\alpha_2 + [x^2 y^2]\alpha_3 + [x^2 x]\alpha_4 + [x^2 y]\alpha_5 + [x^2] &= 0 \\ [xy xy]\alpha_2 + [xy y^2]\alpha_3 + [xy x]\alpha_4 + [xy y]\alpha_5 + [xy] &= 0 \\ [y^2 y^2]\alpha_3 + [y^2 x]\alpha_4 + [y^2 y]\alpha_5 + [y^2] &= 0 \\ [x^2]\alpha_4 + [xy]\alpha_5 + [x] &= 0 \\ [y^2]\alpha_5 + [y] &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

Matrično zapisano, simetrična matrica prema glavnoj dijagonali, bit će

$$\mathbf{D}\alpha = k \tag{6 a}$$

Rješenjem matrične jednadžbe

$$\alpha = \mathbf{D}^{-1} k, \qquad \alpha_i = \frac{1}{D}\sum_{i=1}^{n} D_{ij} k_{ij} \tag{6 b}$$

dobit će se najvjerojatnije vrijednosti koeficijenata α_1, α_2, α_3, α_4 i α_5 (optimalna elipsa). Ako se u formulu (5) uvrste vrijednosti koordinata x i y za svaku točku dobit će se odstupanja V. Da bi se zadovoljile formule (5), popravit će se koordinate svake točke za V_x i V_y. Do rješenja će se doći primjenom uvjetnih mjerenja. Za svaku točku dobit će se jednadžba oblika

$$\alpha_1 (x + V_x)^2 + \alpha_2 (x + V_x)(y + V_y) + \alpha_3 (y + V_y)^2 + \alpha_4 (x + V_x) + \alpha_5 (y + V_y) + \\ + 1 = 0 \tag{7}$$

Izvedu li se naznačene računske operacije, te zanemare kvadrati veličina V_x i V_y dobit će se

$$(2\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_4) V_x + (2\alpha_3 y + \alpha_2 x + \alpha_5) V_y + V = 0. \tag{7 a}$$

Uvedu li se zamjene

$$2\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_4 = a_1 \text{ i } 2\alpha_3 y + \alpha_2 x + \alpha_5 = a_2,$$

za svaku točku dobit će se jednadžba

$$a_1 V_x + a_2 V_y + V = 0. \tag{7 b}$$

Normalna jednadžba glasit će

$$[aa] K + V = 0. \tag{7 c}$$

Njenim rješenjem dobit će se:

$$K = -\frac{V}{a_1^2 + a_2^2} \text{ te, } V_x = -\frac{a_1 V}{a_1^2 + a_2^2} \text{ i } V_y = -\frac{a_2 V}{a_1^2 + a_2^2}. \tag{7 d}$$

Ako se pojedine koordinate točaka poprave sa V_x i V_y dovest će se one na optimalnu elipsu.

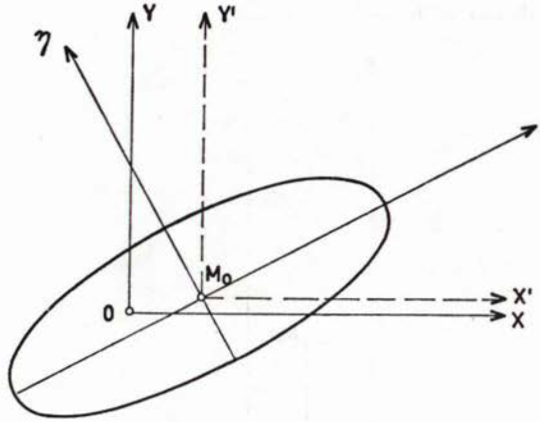
Srednje pogreške po koordinatnim osima bit će

$$m_x = \left(\frac{[V_x^2]}{r}\right)^{1/2} \text{ i } m_y = \left(\frac{[V_y^2]}{r}\right)^{1/2}.$$

Iz podataka dobivenih u formuli (6b) odredit će se centar (simetrije)

$$X_{M_{oi}} = \frac{A_{31}}{A_{33}} \quad Y_{M_{oi}} = \frac{A_{32}}{A_{33}}, \quad i = 1, 2, \cdots, n \left\{ \begin{array}{l} \text{broj presjeka,} \\ \text{ravnina opažanja} \end{array} \right.$$

Prijelazom na oblik osi odredit će se velika i mala poluos (Sl. 6).



Sl. 6

Iz (xOy) — sistema u sistem ($x'M_0y'$) prijeći će se formulama za translaciju

$$x = x' + x_{M_0}$$
$$y = y' + y_{M_0}.$$

Iz sistema ($x'M_0y'$) prijeći će se u sistem ($\xi M_0 \eta$) formulama za rotaciju

$$x' = \xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi$$
$$y' = \xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi$$

gdje je

$$\mathrm{tg}\, 2\varphi = \frac{2\, a_{12}}{a_{11} - a_{22}}.$$

Isti postupak provest će se također i na ostalim presjecima.

Iz podataka dobivenih navedenim postupkom izvest će se zaključak o točnosti (uspjehu) izvedbe cilindra.

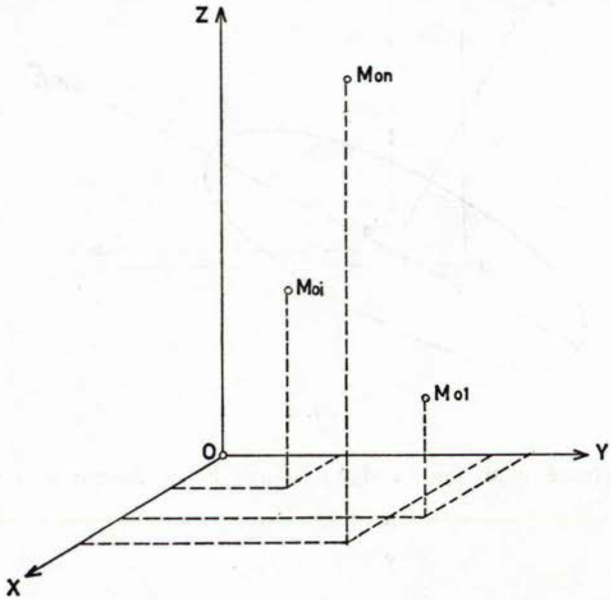
U slučaju da elementi iz formule (6b) zadovoljavaju uvjete iz formule (4b), elipsa prelazi u kružnicu. Daljnji postupak obrade podataka isti je kao za elipsu. Polumjer optimalne kružnice sračunat će se po formuli $r_0 = (a_{13}^2/a_{11}^2 + a_{23}^2/a_{11}^2 - a_{33}/a_{11})^{1/2}$, dok će se koordinate centra sračunati po formulama $x_0 = -a_{13}/a_{11}$, $y_0 = -a_{23}/a_{11}$, za $a_{33}/a_{11} > (a_{13}/a_{11})^2 + (a_{23}/a_{11})^2$, formula (3) ne predočuje realnu krivulju, dok za $a_{33}/a_{11} = (a_{13}/a_{11})^2 + (a_{23}/a_{11})^2$, zadovoljava samo točku M_0 (x_0, y_0).

ODREĐIVANJE OPTIMALNE OSI

Optimalna os cilindra odredit će se kao pravac u prostoru, uz uvjet, da suma kvadrata odstupanja centara (simetrije)

$$M_{oi}(x_{oi}, y_{oi}, z_i),\ _{i=1,2,\dots,n}, \{S_{oi}(\xi_{oi}, \eta_{oi}, \xi_i),\ _{i=1,2,\dots,n}, S'_{oi}(\xi'_{oi}, \eta'_{oi}, \xi'_i),\ _{i=1,2,\dots,n}\}$$

krivulja drugog reda, elipse ili kružnice, u odnosu na taj pravac bude minimum (vidi određivanje oblika a, b i c).



Sl. 7

Jednadžba pravca u prostoru prikazat će se kao jednadžba pravca u dvijema ravninama projiciranja:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= k_0 + k_1 z \qquad (8\,a) \\ y_0 &= h_0 + h_1 z \qquad (8\,b) \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Svaka od ovih dviju jednadžbi određuje ravninu koja projicira pravac na ravnine Oxy i Oyz.

Za dati niz parova vrijedi (x_{oi}, z_i), $i = 1,2, \dots, n$, u ravnini Oxy, odnosno (y_{oi}, z_i), $i = 1,2, \dots, n$, u ravnini Oyz, iz porodice funkcija oblika $x_o = F_1(z_i, k_o, k_1, \dots, k_n)$ u ravnini Oxy, odnosno $y_o = F_2(z_i, h_o, \dots, h_n)$ u ravnini Oyz, uz uvjet da je linearna, odredit će se ona, za koju su odstupanja:

$$R_1(k_0, k_1) = \sum_{i=0}^{n} (F_1(z_i, k_0, k_1) - x_{oi})^2 \quad \text{minimalna} \qquad (9\,a)$$

odnosno

$$R_2(h_0, h_1) = \sum_{i=0}^{n} (F_2(z_i, h_0, h_1) - y_{oi})^2 \quad \text{minimalna} \qquad (9\,b)$$

Iz egzistencije minimuma funkcija R_1

$$\frac{\partial R_1}{\partial k_0} = 0 \quad i \quad \frac{\partial R_1}{\partial k_1} = 0$$

odnosno R_2

$$\frac{\partial R_2}{\partial h_0} = 0 \quad i \quad \frac{\partial R_2}{\partial h_1} = 0$$

slijede normalne jednadžbe

$$\begin{aligned} n\,k_0 + [z]\,k_1 - [x_0] &= 0 \\ [z]\,k_0 + [z^2]\,k_1 - [x_0 z] &= 0 \end{aligned} \qquad (10\ a)$$

i

$$\begin{aligned} n\,h_0 + [z]\,h_1 - [y_0] &= 0 \\ [z]\,h_0 + [z^2]\,h_1 - [y_0 z] &= 0. \end{aligned} \qquad (10\ b)$$

Matrično zapisane bit će:

$$\mathbf{A}\,k = c \qquad (10\ a.\ a)$$

i

$$\mathbf{B}\,h = e. \qquad (10\ b.\ a)$$

Rješenjem matrične jednadžbe (10 a.a)

$$k = \mathbf{A}^{-1}\,c, \qquad k_i = \frac{1}{A}\sum_{i=1}^{n} A_{ij}\,k_j \qquad (10\ a.\ b)$$

odredit će se jednadžba pravca, koji je najbolja aproksimacija niza parova vrijednosti (x_{oi}, z_i), $i = 1,2,\ldots,n$, u ravnini Oxz, odnosno rješenjem matrične jednadžbe (10 b.a)

$$h = \mathbf{B}^{-1}\,e, \qquad h_i = \frac{1}{B}\sum_{i=1}^{n} B_{ij}\,h_j \qquad (10\ b.\ b)$$

odredit će se jednadžba pravca, koji je najbolja aproksimacija niza parova vrijednosti (y_{oi}, z_i), $i = 1,2,\ldots,n$, u ravnini Oyz.

Na ovaj način određen je pravac, koji je najbolja aproksimacija datog skupa točaka (x_{oi}, y_{oi}, z_i) $i = 1,2,\ldots,n$, (optimalni pravac) [5] i [6].

Ako se u formulu (8 a) uvrste vrijednosti koordinata x_0 i z za svaku točku dobit će se odstupanja V''' u ravnini Oxz, odnosno ako se u formuli (8 b) uvrste vrijednosti koordinata y_0 i z za svaku točku dobit će se odstupanja V'' u ravnini Oyz. Da bi se zadovoljile formule (8 a) popravit će se koordinate svake točke za V_{x^0}''' i V_z''', a da bi se zadovoljile formule (8 b) popravit će se koordinate svake točke za V_{y^0}'' i V_z''.

Za rješenje zadatka primjenit će se, kao i za određivanje oblika cilindra, uvjetna mjerenja, te za svaku točku dobiti jednadžba oblika:

$$V_{x_o}^{\prime\prime\prime} - k_1 V_z^{\prime\prime\prime} + V^{\prime\prime\prime} = 0 \qquad (11\ a)$$

odnosno

$$V_{y_o}^{\prime\prime} - h_1 V_z^{\prime\prime} + V^{\prime\prime} = 0 \qquad (11\ b)$$

ako se formula (11 a) napiše u obliku

$$a_1 V_{x_o}^{\prime\prime\prime} - a_2 V_z^{\prime\prime\prime} + V^{\prime\prime\prime} = 0 \qquad (11\ a.\ a)$$

a formula (11 b) u obliku

$$b_1 V_{y_o}^{\prime\prime} - b_2 V_z^{\prime\prime} + V^{\prime\prime} = 0 \qquad (11\ b.\ a)$$

slijede normalne jednadžbe:

$$[aa]\, k_1 + V^{\prime\prime\prime} = 0 \qquad (11\ a.\ b)$$

odnosno

$$[bb]\, k_2 + V^{\prime\prime} = 0. \qquad (11\ b.\ b)$$

Rješenjem formule (11 a.b) dobit će se:

$$K_1 = -\frac{V^{\prime\prime\prime}}{a_1^2 + a_2^2}, \text{ te } V_{x_o}^{\prime\prime\prime} = -\frac{a_1 V^{\prime\prime\prime}}{a_1^2 + a_2^2} \text{ i } V_z^{\prime\prime\prime} = -\frac{a_2 V^{\prime\prime\prime}}{a_1^2 + a_2^2}. \qquad (11\ a.\ c)$$

Dok će se rješenjem formule (11 b.b) dobiti:

$$K_2 = -\frac{V^{\prime\prime}}{b_1^2 + b_2^2}, \text{ te } V_{y_o}^{\prime\prime} = -\frac{b_1 V^{\prime\prime}}{b_1^2 + b_2^2} \text{ i } V_z^{\prime\prime} = -\frac{b_2 V^{\prime\prime}}{b_1^2 + b_2^2}. \qquad (11\ b.\ c)$$

Ako se pojedine koordinate točaka u ravnini Oxz, poprave s V_{x^o}''' i V_z''' dovest će se one na pravac koji je najbolja aproksimacija niza parova veličina (x_{oi}, z_i), $i = 1,2, \ldots, n$, odnosno ako se pojedine koordinate točaka u ravnini Oyz poprave s V_{y^o}'' i V_z'' dovest će se one na pravac, koji je najbolja aproksimacija niza parova veličina (y_{oi}, z_i), $i = 1,2, \ldots, n$.

Srednje pogreške po koordinatnim osima u ravnini Oxz bit će:

$$m_{x_o}^{\prime\prime\prime} = \left(\frac{[V_y^{\prime\prime\prime 2}]}{r}\right)^{1/2} \text{ i } m_z^{\prime\prime\prime} = \left(\frac{[V_z^{\prime\prime\prime 2}]}{r}\right)^{1/2}$$

odnosno u ravnini Oyz

$$m_{y_o}^{\prime\prime} = \left(\frac{[V_y^{\prime\prime 2}]}{r}\right)^{1/2} \text{ i } m_z^{\prime\prime} = \left(\frac{[V_z^{\prime\prime 2}]}{r}\right)^{1/2}.$$

Da bi se iskolčila optimalna os, sračunat će se njeno probodište s ravninama u kojima se želi označiti. Najlakše ju je označiti u ravninama opažanja (vidi određivanje oblika, slučaj a, b i c). Kako su presječnice ravnina opažanja s unutrašnjom površinom cilindra već trasirane, nije teško postaviti vizirke u ravnine opažanja i na njima označiti probodišta osi. Radi toga izrazit će se jednadžba pravca formula (8) u parametarskom obliku:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= k_1 t + k_0 \\ y_0 &= h_1 t + h_0 \\ z &= t. \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Gdje je

t — parametar

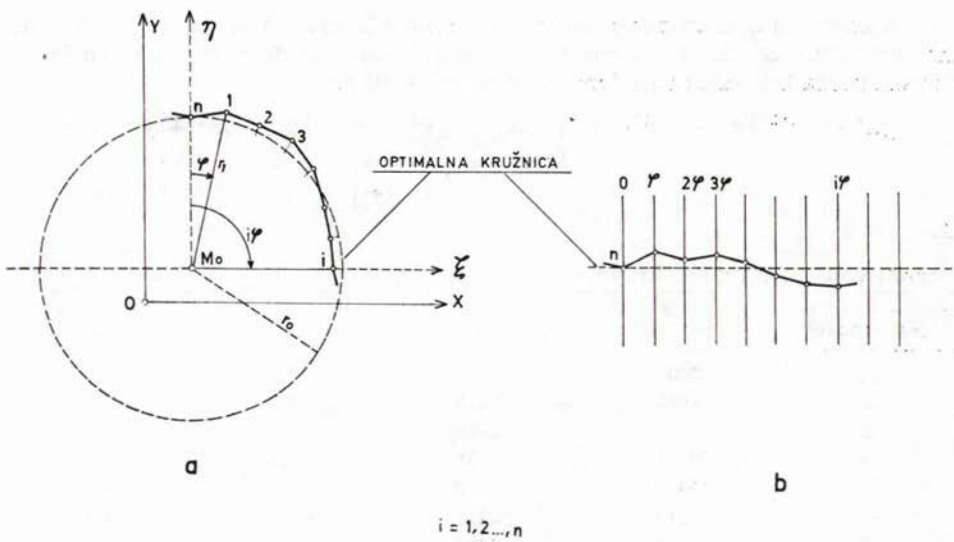
Za z = —D/C dobit će se t = —D/C, pa će tražene koordinate probodišta biti:

$$\left.\begin{aligned} x_{prob.} &= -\,k_1\,D/C + k_0 \\ y_{prob.} &= -\,h_1\,D/C + h_0. \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

ODREĐIVANJE HRAPAVOSTI

Ako se pri određivanju oblika cilindra polarne koordinate mjere ne samo na razmaku 5° — 20°, nego u što većem broju tj. u što manjim razmacima polarnog kuta, moći će se odrediti hrapavost kao udaljenost točaka (x_i, y_i), $i = 1,2,\ldots, n$, od optimalne krivulje drugog reda. Ako je optimalna krivulja kružnica, tada se hrapavost može odrediti i na slijedeći način: U optimalnom centru kružnice $M_0\,(x_0, y_0)$ u ravnini opažanja, centrirat će se instrument uz iste uvjete kao i pri određivanju oblika. Odredit će se polarne koordinate, kao i u prethodnom slučaju uz »minimalno« rastojanje polarnog kuta. Razlika polarnog radiusa r_i i optimalnog radiusa r_0, predstavlja veličinu hrapavosti za φ_i polarni kut.

Radi zornosti prikaza, najbolje je, ako se hrapavost interpretira i grafičkim putem. Može biti prikazana u polarnom dijagramu (Sl. 8 a) ili u pravokutnom sistemu (Sl. 8 b).



Sl. 8

Mogla bi se hrapavost, u slučaju da je optimalna krivulja kružnica, odrediti i na još jedan način: Instrument bi se centrirao također u centru optimalne kružnice $M_0 (x_0, y_0)$. Grafičkim putem, u pravokutnom sistemu, mogla bi se automatski registrirati odstupanja optimalnog radijusa r_0 od polarnog radijusa r_i, za točke na dodirnoj površini udaljene jedna od druge, na rastojanju beskonačno malog polarnog kuta (vidi sl. 2 a).

Određujući hrapavost u više presjeka, dobit će se detaljniji uvid u kvalitet izvedbe.

ZAKLJUČAK

Navedeni postupak određivanja oblika i optimalne osi može se s uspjehom primjeniti i za cilindar s nepotpunim presjekom. Karakterističan primjer je navoz, mjesto na kojem se grade plovni objekti gdje je kontura klizne površine dio kružnice radiusa 1500 m do 10000 m. Optimalna kružnica navoza određuje se u odnosu na izvedeno stanje.

Iz provedene analize vidi se, da se isti ili slični problemi s uspjehom mogu riješiti primjenom geodetskih mjernih metoda. Ovisno o traženoj točnosti rezultata mjerenja, odabrat će se, adekvatan instrumentarij.

PRIMJER

Odrediti optimalnu os kružnog cilindra postavljenog vertikalno, slučaj (a). Cilindar je presječen s ravninom z = o, z = 1000, z = 2000 i z = 3000. Koordinate točaka presječnice odnose se na unutrašnju površinu cilindra. Svi podaci dati su u milimetrima.

Određivanje optimalne kružnice

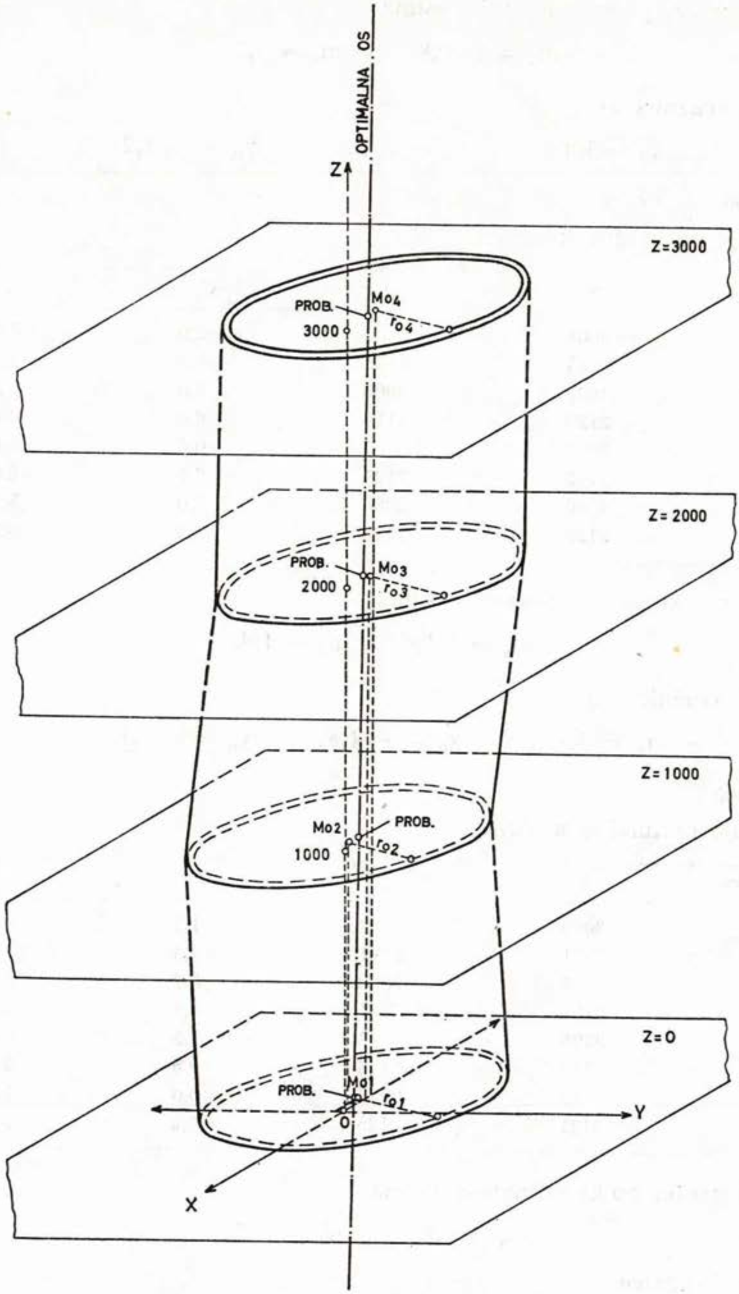
Kako je samim zadatkom uvjetovan oblik cilindra, to pri određivanju optimalnih kružnica nisu korištene jednadžbe (6) (vidi određivanje oblika slučaj a), već su normalne jednadžbe formirane na slijedeći način:

$$\begin{aligned}
[(x^2+y^2)^2]\,\alpha_1 + [(x^2+y^2)\,x]\,\alpha_2 + [(x^2+y^2)\,y]\,\alpha_3 + [x^2+y^2] &= 0\\
[x^2]\,\alpha_2 + [xy]\,\alpha_3 + [x] &= 0\\
[y^2]\,\alpha_3 + [y] &= 0
\end{aligned}$$

Za z = o

Određivanje optimalne kružnice

Br. točke	x	y	V_x	V_y
1	−3005	0	1,3	0,0
2	−2121	2125	0,8	−0,8
3	0	3000	0,0	−1,3
4	2121	−2119	−0,4	0,3
5	2996	0	−0,1	0,0
6	2119	−2121	−0,4	0,4
7	0	2996	0,0	2,7
8	−2121	−2123	−1,4	−1,4


OPTIMALNA OS
Z
Z=3000
PROB.
Mo4
3000
ro4
Z= 2000
PROB.
Mo3
2000
ro3
Z=1000
Mo2
PROB.
1000
ro2
Z=0
PROB.
Mo1
ro1
0
Y
X

Sl. 9

Srednje pogreške po koordinatnim osima

$$m_x = -0{,}8, \qquad m_y = 1{,}2$$

Parametri kružnice su

$$r_0 = 3000, \qquad x_0 = -3{,}8, \qquad y_0 = -1{,}2$$

Za z = 1000

Određivanje optimalne kružnice

Br. točke	x	y	V_x	V_y
1	−3001	0	−2,0	0,0
2	−2123	2125	2,3	−2,3
3	4000	3000	0,0	−0,9
4	2125	−2119	0,0	0,0
5	3000	0	−0,6	0,0
6	2123	−2121	0,0	0,0
7	4000	2966	0,0	3,1
8	−2125	−2123	0,2	0,2

Srednje pogreške po koordinatnim osima

$$m_x = 1{,}1, \qquad m_y = 1{,}4,$$

Parametri kružnice su

$$r_0 = 3001, \qquad x_0 = -1{,}8, \qquad y_0 = -2{,}1,$$

Za z = 2000

Određivanje optimalne kružnice

Br. točke	x	y	V_x	V_y
1	−3005	2	1,3	0,0
2	−2121	2121	−1,3	1,3
3	0	3002	0,0	−2,8
4	2121	−2121	−0,5	0,5
5	2996	2	1,5	0,0
6	2119	−2123	−0,5	0,5
7	0	2998	0,0	1,2
8	2121	−2125	−0,6	−0,6

Srednje pogreške po koordinatnim osima

$$m_x = 0{,}9, \qquad m_y = 1{,}2,$$

Parametri kružnice

$$r_0 = 3001, \qquad x_0 = -3{,}1, \qquad y_0 = -1{,}4$$

Za z = 3000

Određivanje optimalne kružnice

Br. točke	x	y	V_x	V_y
1	−3007	0	3,1	0,0
2	−2119	2125	−0,3	0,4
3	− 2	3000	0,0	−1,6
4	2119	−2119	−0,5	0,5
5	2994	0	0,4	0,0
6	2117	−2121	−0,5	0,5
7	− 2	2996	0,0	2 4
8	−2119	−2123	−2,2	−2,2

Srednje pogreške po koordinatnim osima

$$m_x = 1{,}4, \qquad m_y = 1{,}3$$

Parametri kružnice su

$$r_0 = 2999, \qquad x_0 = -4{,}7, \qquad y_0 = -0{,}8$$

Određivanje optimalne osi

Br. točke	x_0	y_0	z
1	−3,8	−1,2	0
2	−1,8	−2,1	1000
3	−3,1	−1,4	2000
4	−4,7	−0,8	3000

Jednadžba optimalnog pravca je

$$x_0 = -2{,}7 - 0{,}0004\,z$$
$$y_0 = -1{,}6 - 0{,}0002\,z$$

Br. točke	$V'''x_0$	$V'''z$
1	1,1	0,0
2	−1,4	0,0
3	−0,4	0,0
4	0,8	0,0

Br. točke	$V''y_0$	$V''z$
1	−0,5	0,0
2	0,6	0,0
3	0,1	0,0
4	−0,2	0,0

Srednje pogreške po koordinatnim osima u ravnini Oxz

$$m_{x_0}^{III} = -0{,}9, \qquad m_z^{III} = 0{,}0$$

Srednje pogreške po koordinatnim osima u ravnini Oyz

$$m_{y_0}^{III} = 0{,}4, \qquad m_z^{II} = 0{,}0$$

Koordinate probodišta optimalnog pravca kroz ravnine

z = −D/C = 0	$x_{prob.} = -2{,}7$	$y_{prob.} = -1{,}6$
z = −D/C = 1000	$x_{prob.} = -3{,}1$	$y_{prob.} = -1{,}5$
z = −D/C = 2000	$x_{prob.} = -3{,}5$	$y_{prob.} = -1{,}3$
z = −D/C = 3000	$x_{prob.} = -3{,}9$	$y_{prob.} = -1{,}1$

LITERATURA

[1] Bertolino M.: Numerička analiza, Beograd 1977.
[2] Čubranić N.: Teorija pogrešaka s računom izjednačenja, Zagreb 1967.
[3] L. S. JUE, D. A. Horn: Measuring sumbarine hull circularity, Burean of ships journal, March 1963.
[4] Petković V.: »Arena« — Amfiteatar u Puli izrada planova za konzervatorsku službu i rekonstrukciju, Geodetski list br. 1—3 i 4—6, Zagreb 1965.
[5] Protić Lj i drugi: Zbirka zadataka iz numeričke analize, Beograd 1978.
[6] Trifunović D. i drugi: Zbirka zadataka iz matematike II, Beograd 1972.
[7] Štulhofer D.: Provjera odstupanja od kružnosti izvedenog cilindra većeg promjera, Strojarstvo br. 11—12, Zagreb 1968.
[8] Štulhofer D.: Provjera kružnosti cilindra većeg promjera, Strojarstvo br. 5/6, Zagreb 1973.

KRATKI SADRŽAJ

Na cilindru većih dimenzija, proizvoljnog položaja prema navedenim mjerenjima, uz uvjet da mu se odredi oblik, po volji odabranom broju mjesta, kao i optimalna os, dati su opći izrazi za rješenje problema. Osim toga dat je i način određivanje hrapavosti.

ABSTRACT

On the cylinder which has rather big dimensions and which is in an arbitrary position according to the mentioned measurements, under condition that its form is determined by arbitrarily chosen places, general expressions are given in order to solve the problem. Besides, the way of determining the roughness is given.

Primljeno 1981-02-20