UDK 528.411.088.3
528.063.1
Originalan znanstveni rad

OCENA TAČNOSTI PRI TRANSFORMACIJI KOORDINATA TAČAKA

*Ivan MOLNAR — Novi Sad**

U radovima [1] i [2], predloženo je uklapanje lokalnih mreža u državni koordinatni sistem, primenom opštih jednačina za transformaciju koordinata iz jednog u drugi koordinatni sistem, kojima se u mreži efikasno suzbija deformacija (ostvaruje integralno očuvanje) linearnih i uglovnih veličina.

$$\left\| \begin{matrix} x' \\ y' \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} C_x \\ C_y \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\| \tag{1}$$

Kad se koeficijenti translacije C_x i C_y eliminišu i kordinate identičnih tačaka redukuju na težište, redukovane jednačine grešaka poprimaju sledeći izgled

$$\begin{aligned} v_{xi} &= -\bar{y}_i \Delta\varphi + \bar{x}_i - \bar{x}'_i \\ v_{yi} &= \bar{x}_i \Delta\varphi + \bar{y}_i - \bar{y}'_i \\ & \quad i = 1, 2, \dots n \end{aligned} \tag{2}$$

Iz uslova minimuma, određuje se priraštaj rotacionog ugla

$$\Delta\varphi = [\bar{y}'\bar{x} - \bar{y}\bar{x}'][\bar{x}^2 + \bar{y}^2]^{-1} \tag{3}$$

Ako koordinatni sistemi nisu međusobno mnogo zakošeni (usvaja se za približnu vrednost rotacionog ugla, $\varphi_0 = 0$), u cilju izvršenja ocene tačnosti, uspostavlja se jednostavniji oblik neredukovanih jednačina grešaka [2].

$$\begin{aligned} v_{xi} &= -y_i \Delta\varphi + C_x + x_i - x'_i \\ v_{yi} &= x_i \Delta\varphi + C_y + y_i - y'_i \\ & \quad i = 1, 2, \dots n \end{aligned} \tag{4}$$

odnosno,

$$v = R\,t + x - x' \tag{5}$$

gde su

$$v^T = \| v_{x1}\, v_{y1}\, v_{x2}\, v_{y2} \dots v_{xn}\, v_{yn} \| \qquad t^T = \| \Delta\varphi\, C_x\, C_y \|$$

* Adresa autora: Dr. Ivan Molnar, dipl. inž., Pokrajinska geodetska uprava Novi Sad, Bulevar Maršala Tita 16

$$R^T = \begin{Vmatrix} -y_1 & x_1 & -y_2 & x_2 & \dots & -y_n & x_n \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \end{Vmatrix} \qquad \begin{aligned} x^T &= \| x_1 \, y_1 \, x_2 \, y_2 \dots x_n \, y_n \| \\ x'^T &= \| x'_1 \, y'_1 \, x'_2 \, y'_2 \dots x'_n \, y'_n \| \end{aligned}$$

Primenom uslova minimuma, određuje se vektor traženih veličina

$$t = -(R^T R)^{-1} R^T (x - x'). \tag{6}$$

Dovde je postupak tekao na uobičajeni način, šta je opredelilo, u nastavku, da se vektor popravaka (5) izjednači sa nulom, nije sasvim jasno (valjda je trebalo da bude $[v_x] \approx [v_y] \approx 0$).

$$R t + x - x' = -R (R^T R)^{-1} R^T (x - x') + (x - x') = 0$$

odnosno

$$[E - R (R^T R)^{-1} R^T] \cdot (x - x') = 0 \tag{7}$$

Rešavanjem (7) i primenom uprošćenja, kako se čini u [2], da je matrica $[E - R (R^T R)^{-1} R^T]$ izražena u funkciji izravnatih veličina lokalne mreže, a da vektor koordinata državnog sistema x' ne utiče na relativne odnose unutar lokalno izravnate mreže, dobija se sledeća zavisnost

$$x' = [E - R (R^T R)^{-1} R^T] \cdot x = C \cdot x. \tag{8}$$

Primenom prethodne intervencije se smatra uspešno okončanim nastojanje, da se tražene veličine izraze u funkciji izravnatih veličina. Međutim, nije tako.

Razmotrimo još jednom kvantifikacije i matematička rasuđivanja, vezana za matričnu jednačinu (7), koja nisu u svemu privedena kraju.

Kako je matrica

$$C = [E - R (R^T R)^{-1} R^T] \neq 0 \tag{9}$$

to je

$$x - x' = 0$$

odnosno

$$x = x' \tag{10}$$

Dobija se da je vektor koordinata u sistemu X Y identičan vektoru koordinata u sistemu X'Y', tj. zaključuje da transformacionih računanja, zapravo, i nema. Očigledno, analizu matrične jednačine (7), trebalo je izvesti do kraja, pa tek onda, ako je moguće, činiti određena zanemarivanja i uprošćenja. Ovako, umesto određivanja traženih veličina u funkciji izravnatih veličina, što se htelo, proizašla je trivijalna konstatacija da su, kad je vektor popravaka nula, vektori koordinata lokalnog i državnog sistema jednaki.

Postavlja se pitanje kako i na koji način treba izvršiti adekvatnu ocenu tačnosti, pri transformaciji koordinata tačaka, primenom opštih transformacionih jednačina.

Matrica koeficijenata težina izravnatih veličina je, ustvari, inverzna matrica normalnih jednačina

$$Q = (R^T R)^{-1} \tag{11}$$

Srednje greške i kovarijance izravnatih veličina određuju se iz kovarijacione (varijanc-kovarijanc) matrice izravnatih veličina

$$K = \mu_0^2 Q = \mu_0^2 (R^T R)^{-1} \tag{12}$$

u kojoj se srednja greška jedinice težine računa primenom zavisnosti

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{v^T v}{2n - 3}}. \tag{13}$$

U cilju određivanja srednjih grešaka merenih veličina, matrica koeficijenata težina popravaka se dobija primenom opšteg zakona rasprostiranja grešaka

$$Q_v = RQR^T = R (R^T R)^{-1} R^T \tag{14}$$

dok je varijanc-kovarijanc matrica popravaka

$$K_v = \mu_0^2 Q_v = \mu_0^2 R (R^T R)^{-1} R^T. \tag{15}$$

Od interesa je, u nastavku, učiniti pokušaj, imajući u vidu ideju autora rada [2], da se tražene veličine zaista izraze u funkciji izravnatih veličina. Ocena tačnosti bi se, zatim, vršila primenom opšteg zakona rasprostiranja grešaka, korišćenjem matrice koeficijenata težina Q_x, dobijene u postupku izravnaja tačaka lokalne mreže. Za srednju grešku jedinice težine bi se, takođe, uzela vrednost dobijena na osnovu podataka izravnanja tačaka lokalne mreže.

Neka je F takva matrična funkcija, da važi jednakost

$$\begin{Vmatrix} x' \\ y' \end{Vmatrix} = F \begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix}. \tag{16}$$

Kad se transformaciona računanja vrše iz sistema X'Y' u sistem XY, tada je

$$\begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix} = F^{-1} \begin{Vmatrix} x' \\ y' \end{Vmatrix} \tag{17}$$

U cilju određivanja elemenata matrične funkcije F, uvedimo smenu

$$\begin{Vmatrix} x' \\ y' \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} u \\ v \end{Vmatrix} \tag{18}$$

i

$$\begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix} = \frac{1}{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} \begin{Vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} u \\ v \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} u \\ v \end{Vmatrix} \tag{19}$$

Rešimo (18) i (19) po u i v

$$\begin{Vmatrix} u \\ v \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} x' \\ y' \end{Vmatrix} \tag{20}$$

$$\begin{Vmatrix} u \\ v \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix} \tag{21}$$

Oduzimajući odgovarajuće jednačine (19) od jednačina (18), dobijamo sledeće veze

$$u = \frac{1}{2\sin\varphi}(y' - y), \qquad v = -\frac{1}{2\sin\varphi}(x' - x). \tag{22}$$

Smenjujući (22) u jednačine (21) dobijamo sledeću zavisnost

$$\begin{Vmatrix} x' \\ y' \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \cos 2\varphi & -\sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & \cos 2\varphi \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix} \tag{23}$$

Imajući u vidu (16), tražena matrična funkcija F glasi

$$F = \begin{Vmatrix} \cos 2\varphi & -\sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & \cos 2\varphi \end{Vmatrix} = \frac{1}{1 + tg^2\varphi} \begin{Vmatrix} 1 - tg^2\varphi & -2\,tg\,\varphi \\ 2\,tg\,\varphi & 1 - tg^2\varphi \end{Vmatrix}. \tag{24}$$

Funkcija tangesa ugla rotacije φ se, u nastavku, određuje tako, što se koordinate tačaka oba sistema redukuju na težište. Sem toga, za razliku od redukcija izvršenih u [2], potrebno je koordinate svih tačaka u lokalnom sistemu izmnožiti sa faktorom razmere m. Ovako redukovane koordinate označimo sa $\bar{x}'$ i $\bar{y}'$ u državnom, a sa $\bar{x}$ i $\bar{y}$ u lokalnom koordinatnom sistemu

$$\bar{x}'_i = x'_i - \frac{[x']}{n} = x'_i - x'_0 \qquad \bar{y}'_i = y'_i - \frac{[y']}{n} = y'_i - y'_0$$

$$\bar{x}_i = m\left(x_i - \frac{[x]}{n}\right) = m\left(x_i - x_0\right) \qquad y = m\left(y_i - \frac{[y]}{n}\right) = m\left(y_i - y_0\right) \tag{25}$$

$$i = 1, 2, \ldots n$$

Na osnovu (18) i (22), a imajući u vidu (25), mogu se napisati sledeće zavisnosti

$$\begin{Vmatrix} \bar{x}' \\ \bar{y}' \end{Vmatrix} = \frac{1}{2\sin\varphi} \begin{Vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} (\bar{y}' - \bar{y}) \\ (\bar{x} - \bar{x}') \end{Vmatrix}. \tag{26}$$

Prema tome, jednačine grešaka, u ovom slučaju, glase

$$\begin{aligned} v_{xi} &= -(\bar{y}'_i + \bar{y}_i)\,tg\,\varphi + \bar{x}_i - \bar{x}'_i \\ v_{yi} &= (\bar{x}'_i + \bar{x}_i)\,tg\,\varphi + \bar{y}_i - \bar{y}'_i \end{aligned} \tag{27}$$

$$i = 1, 2, \ldots n$$

odnosno

$$v = A\,tg\,\varphi + f, \tag{28}$$

gde su

$$v^T = \| v_{x1}\, v_{y1}\, v_{x2}\, v_{y2} \ldots v_{xn}\, v_{yn} \|$$

$$A^T = \| -(\bar{y}'_1 + \bar{y}_1)(\bar{x}'_1 + \bar{x}_1) - (\bar{y}'_2 + \bar{y}_2)(\bar{x}'_2 + \bar{x}_2) \ldots (\bar{y}'_n + \bar{y}_n)(\bar{x}'_n + \bar{x}_n) \|$$

$$f^T = \| (\bar{x}_1 - \bar{x}'_1)(\bar{y}_1 - \bar{y}'_1)(\bar{x}_2 - \bar{x}'_2)(\bar{y}_2 - \bar{y}'_2) \ldots (\bar{x}_n - \bar{x}'_n)(\bar{y}_n - \bar{y}'_n) \|.$$

Iz uslova minimuma, određuje se tražena veličina (funkcija tangensa rotacionog ugla)

$$\operatorname{tg}\varphi = 2\,[\bar{y}'\bar{x} - \bar{y}\bar{x}']\,[(\bar{x}' + \bar{x})^2 + (\bar{y}' + \bar{y})^2]^{-1} \tag{29}$$

Matricu koeficijenata težina izravnatih veličina funkcija, dobijamo primenom opšteg zakona rasprostiranja grešaka

$$Q_{\bar{x}} = C\,Q_x\,C^T \tag{30}$$

gde je

$$C = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\varphi}\left\|\begin{array}{cccccccc} 1-\operatorname{tg}^2\varphi & -2\operatorname{tg}\varphi & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2\operatorname{tg}\varphi & 1-\operatorname{tg}^2\varphi & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\operatorname{tg}^2\varphi & -2\operatorname{tg}\varphi & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\operatorname{tg}\varphi & 1-\operatorname{tg}^2\varphi & \dots & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1-\operatorname{tg}^2\varphi & -2\operatorname{tg}\varphi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2\operatorname{tg}\varphi & 1-\operatorname{tg}^2\varphi \end{array}\right\|. \tag{31}$$

Kada je lokalna mreža izravnata po postupku izravnanja mreža sa minimalnim tragom, tada je Q_x jednaka inverznoj matrici normalnih jednačina lokalne mreže, tj. $Q_x = N^{-1}$. Međutim, ako je lokalna mreža izravnata tradicionalnim postupkom (defekt mreže d = 3), inverznu matricu normalnih jednačina lokalne mreže N^{-1} treba, na odgovarajućem mestu, proširiti nultom, kvadratnom matricom trećeg reda. Npr.

$$Q_x = \left\|\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & N^{-1} \end{array}\right\| \tag{32}$$

Varijanc-kovarijanc matrica izravnatih veličina funkcija glasi

$$K_{\bar{x}} = \mu_0^2\,Q_{\bar{x}} = \mu_0^2\,C\,Q_x\,C^T, \tag{33}$$

gde je μ_0 srednja greška jedinice težine, sračunata iz podataka izravnanja lokalne mreže.

Naravno, ocena tačnosti bi se i u ovom slučaju transformacije koordinata mogla ostvariti i primenom izraza (11), (12), (13), (14) i (15), u kojima umesto R treba da figuriše A, umesto R^T da bude A^T, dok bi broj stepeni slobode trebalo uskladiti sa defektom mreže.

LITERATURA

[1] Mihailović, K.: Uklapanje lokalnih mreža u državni koordinantni sistem, Geodetska služba br. 1, Beograd 1971.

[2] Mihailović, K.: Transformacija koordinata, Geodetska služba br. 17, Beograd 1977.

REZIME

U radu se saopštava, da interpretaciju ocene tačnosti, u postupku uklapanja lokalnih mreža u državni koordinatni sistem primenom opštih transformacionih jednačina, u odnosu na izloženo u [2], treba dograditi i izvršiti pomoću izraza (11), (12), (13), (14) i (15). Međutim, kad se tražene veličine žele izraziti u funkciji izravnatih veličina, tada matričnu funkciju C treba odrediti prema (31) a ne na osnovu (9), kako je predloženo u [2].

ABSTRACT

The interpretation of accuracy estimation, in the procedure for fitting in, local networks into the national coordinate system by applying general conversion equations, in relation to the contents of [2], should be enlarged and completed using the terms (11), (12), (13), (14) and (15). However, when the required values need to be expressed in the function of adjusted values, then the matrix function »C« should be determined according to (31) and not on the basis (9), as suggested in [2].

Primljeno: 1981 - 01 - 06.