UDK [528.13+519.242.5]:528.31/38
Originalan znanstveni rad

GLOBALNI KRITERIJI TAČNOSTI GEODETSKIH MREŽA KAO MOGUĆE CILJ FUNKCIJE KOD MATEMATIČKE OPTIMIZACIJE PROJEKTOVANJA II REDA*

*Toša NINKOV — Beograd***

UVOD

Poslednjih godina mnogi su se geodeti bavili problemom optimizacije u geodeziji ali se, bar za sada, može reći da problem nije u potpunosti rešen. Problem do sada nije rešen pre svega zbog kompleksnosti problema ali i zbog ograničenih moći numeričke matematike koja se u ovim slučajevima veoma mnogo koristi.

Poseban problem, koji još nije u potpunosti rešen je izbor šta optimirati u jednom geodetskom zadatku, koji mogu biti veoma različiti i zavisiti uglavnom od oblasti geodezije u kojoj se optimizacija primenjuje. U većini geodetskih zadataka može se izvršiti optimizacija tačnosti ili pak vremena, rada ili sredstava za koje se može postići određena tačnost parametara mreža. Sa stanovišta geodetske struke mnogo je korisnije rešenje optimizacije tačnosti parametara mreže jer je ona uglavnom faktor od kojeg zavisi kvalitet izvršenja nekog geodetskog zadatka. Radovi mnogih geodeta u ovoj oblasti ipak nisu rešili problem u potpunosti jer do sada nisu određeni neki opšte važeći kriterijumi ocene kvaliteta nekog rešenja geodetskog problema.

U radovima [4], [5] i drugim mogu se naći izvesni kriterijumi kvaliteta geodetskih mreža izraženih pomoću sopstvenih vrednosti korelacione matrice Q koji bi se mogli smatrati opštevažećim. U ovom članku biće razmatrani kriteriji tačnosti, izotropije i homogenosti kao moguće cilj funkcije kod matematičke optimizacije projektovanja geodetskih mreža.

2. KRITERIJI TAČNOSTI, HOMOGENOSTI I IZOTROPIJE

Kao moguća merila kvaliteta jedne projektovane mreže mogu se javiti sledeći kriteriji:

1. **tačnost**

---

* Članak objavljen na VIII Internacionalnom kursu za inženjersku geodeziju u Cirihu 24. 09. 1980—1. 10. 1980.

** Adresa autora: Mr Toša Ninkov, dipl. inž. Građevinski fakultet, Institut za geodeziju, Beograd, Bulevar revolucije 73.

2. homogenost

3. izotropija

Varijanta projektovane mreže koja najbolje zadovoljava ova tri postavljena uslova ima prednost nad ostalima. Kriterij izotropije podrazumeva da su elipse grešaka svih tačaka krugovi, tj. sa istim poluosovinama. Kriterij homogenosti podrazumeva da su sve elipse grešaka međusobno jednake a u slučaju izotropne mreže da su svi krugovi istih dimenzija.

Sva tri navedena kriterija kvaliteta projektovane mreže mogu se izraziti pomoću sopstvenih vrednosti korelacione matrice $\underline{Q}$ jer je ona za usvojenu konfiguraciju i pretpostavljeno σ_0 (standard jedinice težine) iscrpan izvor informacija o kvalitetu mreže.

2.1. *Kriterij tačnosti geodetskih mreža*

Tačnost jedne mreže može se oceniti po tačnosti s kojom se mogu odrediti proizvoljne funkcije Fi, iz izravnatih koordinata mreže. Varijanta mreže koja daje najmanje vrednosti ovih funkcija može se smatrati najpogodnijom. Standard σ_i funkcije Fi određuje se poznatim formulama

$$\sigma_i^2 = \sigma_0^2 \underline{f}_i^T \underline{Q}\, \underline{f}_i, \tag{1}$$

gdje je σ_0 — standard jedinice težine

$$\underline{f}_i^T = [f_{i1}, f_{i2}, \ldots, f_{i2m}]_{1 \cdot 2m}$$

— vektor parcijalnih izvoda funkcije Fi po argumentima vektora nepoznatih $\underline{x}$

m — broj traženih tačaka

$$f_{i1} = \frac{\partial F_i}{\partial X_1}; \quad f_{i2} = \frac{\partial F_i}{\partial X_2}; \ldots; \quad f_{i2m} = \frac{\partial F_i}{\partial X_{2m}}$$

$\underline{Q}_{nn}$ — korelaciona matrica vektora nepoznatih.

Granične vrednosti u kojima će se nalaziti standard proizvoljne funkcije može se, prema [5], odrediti po sledećim formulama

$$\sigma_0 \|f_i\| \sqrt{\lambda \min} < \sigma_i < \sigma_0 \|\underline{f}_i\| \sqrt{\lambda \max}, \tag{2}$$

gdje je:

$\|\underline{f}_i\| = \sqrt{\underline{f}_i^T \underline{f}_i}$ — norma vektora

$\lambda \min$, $\lambda \max$ — min i max sopstvena vrednost korelacione matrice $\underline{Q}$.

Iz (2) se može zaključiti da standard proizvoljne funkcije Fi zavisi osim konstante σ_0, norme $\|\underline{f}_i\|$ i od sopstvenih vrednosti matrice $\underline{Q}$. Ukoliko se želi da standard proizvoljnih funkcija bude što manji mora se postići da gornja granica u (2) bude što je moguće manja. Iz ovoga sledi da se kao globalni kriterijum tačnosti jedne mreže može uzeti

$$\lambda \max \rightarrow \min \tag{3}$$

Može se konstatovati da smanjenjem vrednosti gornje granice u (2) povećava se tačnost ispitivane mreže. Vrednost gornje granice zavisi od σ_0, $\|\underline{f}\|$ i sopstvenih vrednosti korelacione matrice $\underline{Q}$ pa se samo njihovim menjanjem može dovesti do smanjenja gornje granice vrednosti standarda proizvoljne funkcije odnosno povećanja opšte tačnosti neke mreže.

2.2. *Kriterij homogenosti i izotropije*

Od jedne dobre mreže se zahteva da sve funkcije koordinata tačaka iste vrste imaju podjednaku tačnost. Minimalni odnosno maksimalni standardi proizvoljnih funkcija istih vrsta određuju se po formulama.

$$\begin{aligned} \sigma \min &= \sigma_0 \|\underline{f}\| \sqrt{\lambda \min} \\ \sigma \max &= \sigma_0 \|\underline{f}\| \sqrt{\lambda \max} \end{aligned} \tag{4}$$

Ukoliko su ove granice međusobno bliže utoliko je mreža homogenija, tj. homogenija je tačnost sračunatih funkcija.

Iz ovoga se može sračunati koeficijent homogenosti

$$q = \frac{\sigma \max}{\sigma \min} = \sqrt{\frac{\lambda \max}{\lambda \min}} \tag{5}$$

Ovaj odnos tačnosti u opštem slučaju je veći od 1, a samo u nekim idealnim slučajevima izotropne i homogene mreže jednak 1. U tim slučajevima sve sopstvene vrednosti korelacione matrice su međusobno jednake. Kriteriijum homogenost i izotropije može se izraziti kao

$$q = \sqrt{\frac{\lambda \max}{\lambda \min}} \Rightarrow 1 \tag{6}$$

Kod samo izotropnih mreža moraju biti jednake samo odgovarajuće sopstvene vrednosti (dve po dve) a kod samo homogenih mreža odgovarajuća polovina sopstveoih vrednosti mora biti jednaka $\lambda \max$ a druga polovina $\lambda \min$.

Poznavanje ekstremnih vrednosti λmax i λmin korelacione matrice $\underline{Qx}$, vektora koordinata tačaka mreže $\underline{x}$, daje veoma pouzdan uvid u tačnost te mreže kao i u njenu izotropiju i homogenost.

3. KORIŠĆENJE GLOBALNIH KRITERIJA KVALITETA MREŽE KAO CILJ FUNKCIJE KOD OPTIMIZACIJE PROJEKTOVANJA

Minimiranje postavljene cilj funkcije, kod optimizacije težina planiranih opažanja, može se sprovoditi različitim numeričkim putevima. U slučaju kada je cilj funkcija definisana u obliku det $\underline{Q} \rightarrow \min$ ili trag $\underline{Q} \rightarrow \min$ rešenje problema se može dobiti primenom linearnog ili nelinearnog programiranja. Gore navedeni kriterijumi pogodnosti geodetskih mreža izraženi su pomoću sopstvenih vrednosti λ korelacione matrice $\underline{Q}$. Matematički se može pokazati da je

$$\det \underline{Q} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_{2m} \tag{7}$$

$$\text{i trag } \underline{Q} = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_{2m} \tag{8}$$

pa će se u članku pokušati predložiti rešenje problema primenom nelinearnog programiranja i gore navedenih globalnih kriterijuma kao cilj funkcije.

A) *Optimizacija po kriteriju tačnosti*

U ovom slučaju matematički model bi bio sledećeg oblika:

$$\lambda\,\text{max} \rightarrow \text{min} \quad \text{— cilj funkcija}$$

Uslovi ograničenja bili bi oblika

$$pi < P\,\text{max}$$
$$pi > 0$$

pi — težina opažanja

P max — relano moguća, i željena ostvarljiva vrednost težine opažanja

B) *Optimizacija po kriteriju homogenosti i izotropije*

Matematički model bi bio sledećeg oblika:

$$\text{Cilj funkcija: } \lambda\,\text{max} \Rightarrow \frac{\text{trag } \underline{Q}}{2\,\text{m}}$$

Uslovi ograničenja

$$pi < P\,\text{max}$$
$$pi > 0$$

m — broj nepoznatih tačaka

pi i P max — isti kao u prethodnom modelu.

U oba slučaja dobijaju se matematički modeli koji imaju nelinearnu cilj funkciju i linearne nejednačine u uslovima ograničenja. Postavljene cilj funkcije su veoma kompleksnog oblika (relativno teško se numerički određuju sopstvene vrednosti korelacione matrice $\underline{Q}$ naročito kod velikih sistema) ali ipak se optimalno rešenje ovog problema može rešiti nekom od metoda nelinearnog programiranja.

Autoru članka, tek u neposrednoj budućnosti, predstoji pokušaj numeričkog rešavanja ovog problema i izbora najbolje metode nelinearnog programiranja koja bi mogla na zadovoljavajući način rešiti ovaj problem, te prema tome članak ne sadrži brojni primer kao ilustraciju predložene metode.

LITERATURA

[1] K. Mihailović: »Geodezija II, I i II deo, Građevinska knjiga, Beograd.

[2] E. Stepanih: »Uvod u matrični račun«, Predavanja na poslediplomskim studijama.

[3] M. Jovanović: »Elementi teorije verovatnoće i matematičke statistike«, predavanja na poslediplomskim studijama .

[4] H. Dupraz i W. Niemeier: »Beurteilungskriterium für geodätische Netze, II int. Symposium über Deformationsmessungen, Bonn 1978.

[5] Pelzer H.: »Criteria for reliability of geodetic networks« IAG. Symposium on Optimization of design and computation of control networks, Sopron 1977.

[6] Wenzel, H.: »Zur Optimierung von Schwerenetzen« ZfV, 102, 1977.

[7] Baarda W.: »Reliabiliti and precision of networks«, VII Internationaler Kurs for Ingenieermessungen hoher Präzision, Darmstadt 1976.

[8] G. Schmitt: »Zur Numerik der Gewichtsoptimierung in geodätischen Netzen«, DGK No 256, München 1979.

[9] B. Hadley: »Nonlinear and Dynamic Programming«, New York 1972.

SAŽETAK

U članku se predlaže korišćenje kriterija tačnosti homogenosti i izotropije geodetskih mreža (izraženih pomoću sopstvenih vrednosti korelacione matrice) datih u [4], kao cilj funkcije za matematičke optimizacije projektovanja mreža primenom metoda nelinearnog programiranja.

SUMMARY

In the present paper the author is proposing the application of the accuracy, homogeneity and isotropy criterion in geodetic networks (expressed by means of the own values of coorelative matrix) given in [4] as the objective functions in mathematical optimization of network design applying the nonlinear programming method.

Primljeno: 1980-11-25