UDK 528.14:528.33
Originalan znanstveni rad

UTICAJ BROJA MERENJA NA ODREĐIVANJE SLOBODNIH NIVELMANSKIH MREŽA

*Ivan MOLNAR — Novi Sad**

Slobodne mreže određene posredstvom geometrijskog ili trigonometrijskog nivelanja nazivaju se slobodnim nivelmanskim mrežama. One se, u novije vreme, ne priključuju na nivelmanske mreže viših redova, odnosno na repere, ili reper, čije su nadmorske visine poznate, nego svi reperi mreže, u postupku izravnanja, dobijaju popravke. U inženjerskoj geodeziji slobodne mreže su, po pravilu, manje lokalne mreže, koje se uspostavljaju u cilju iskolčenja i stalne kontrole objekata kao i osmatranja njihovog sleganja i deformacija.

Sve su brojniji radovi i studije u kojima se razmatra problematika obrade podataka merenja izvršenih u slobodnim mrežama. Pri brojnim radovima u oblasti ineženjerske geodezije, primenjuju se takve tehnologije gradnje i montaže, koje se obavezno zasnivaju na precizno određenim slobodnim geodetskim mrežama.

Izložimo, ukratko, karakteristike postupka određivanja slobodnih mreža za slučaj, kad se ne raspolaže informacijom o datim tačkama. To je, zapravo, takva situacija kad, pri bilo kom merenju, može nastati promena koordinata svih tačaka u mreži, obzirom da nedostaju podaci o koordinatama datih tačaka. Otuda proističe da se slobodne mreže mogu, bilo u horizontalnom ili vertikalnom smislu, izmeštati ili rotirati, izdizati ili spuštati.

Kako se u slobodnim mrežama, izvesnom broju nepoznatih, ne daju određene vrednosti (početni direkcioni ugao, koordinate jedne tačke, nadmorska visina jednog repera), to obrazovanje jednačina popravaka merenja prouzrokuje singularnost matrice normalnih jednačina. U cilju suzbijanja te singularnosti postavljaju se uslovi, ili uslov, koje treba da zadovolje nepoznate veličine. Broj prisilnih uslovnih jednačina, kojima se zadovoljavaju uslovi, je saglasan sa defektom mreže. Defekt mreže se pak, kao što je poznato, definiše kao razlika reda i ranga matrice normalnih jednačina. Prisilne uslovne jednačine se mogu pojmovno shvatiti i kao dopunske posredne jednačine, odnosno kao popravke tzv. pseudo opažanja.

U slobodnim nivelmanskim mrežama defekt mreže je $d = 1$, što proizilazi iz izvršenih nivelanja

$$\Sigma \Delta H = 0 \tag{1}$$

* Adresa autora: dr Ivan Molnar, dipl. inž., Pokrajinska geodetska uprava, Novi Sad Bulevar M Tita 16.

Znači, sve približne vrednosti nadmorskih visina repera u mreži, u procesu izravnanja, trpe popravku ΔH_i. Međutim, zbir ovih popravaka treba da je nula, radi eliminacije defekta mreže.

U slobodnim mrežama mogu nastati okolnosti, da je broj nepoznatih veličina veći od broja merenja (u slobodnim nivelmanskim mrežama, u krajnjem slučaju, broj nepoznatih veličina je jednak broju merenja), a da se, pri tome, izravnavanje i ocena tačnosti traženih veličina uspešno realizuju. Međutim, primenu u nastavku prikazanog postupka izravnanja slobodnih mreža ne treba isključivo vezivati za prevazilaženje problematike određivanja većeg, ili jednakog, broja nepoznatih veličina u odnosu na broj merenja, ma da je i ta okolnost od nesumnjivog značaja. Postupak je podjednako efiasan i u slučajevima, kad je broj merenja veći od broja nepoznatih veličina, pa i tada, kad je broj merenja maksimalan, tj. kad se mere sve veličine u mreži.

U oblasti analize merenja, izvršena su brojna i veoma značajna istraživanja, koja su imala za cilj postizanje veće, odnosno optimalne, tačnosti merenih rezultata. Zapaženi uspesi na tom polju, doprineli su da se izravnanjem ostvare verovatnije vrednosti i verodostojnija ocena tačnosti traženih veličina. Stiče se utisak, međutim, da je istovremeno neopravdano izostala, odnosno da je nedovoljno razvijena, analiza uticaja parametara geometrijskog oblika mreža, na rezultate dobijene određivanjem i ocenom tačnosti traženih veličina.

Obzirom na izneto, pažnju zaslužuju nastojanja okrenuta ka podrobnijim izučavanjima uticaja parametara geometrijskog oblika mreža na određivanje i ocenu tačnosti traženih veličina. Značajniji rezultati u tom pravcu, mogu se postići intenziviranjem i prestrukturiranjem dosadašnjih istraživanja.

U nastavku se daje prikaz i analizira, prema predhodno izloženim teorijskim postavkama, uticaj broja merenja na tačnost određivanja repera slobodnih nivelmanskih mreža.

Jedinstvene jednačine popravaka, pored jednačina popravaka merenja v_m sadrže i dopunske (pseudo) jednačine popravaka v_f.

$$v = Ax + f, \tag{2}$$

gde su

$$v = \left\| \begin{matrix} v_m \\ v_f \end{matrix} \right\|, \quad A = \left\| \begin{matrix} A_m \\ a_f \end{matrix} \right\|, \quad f = \left\| \begin{matrix} f_m \\ 0 \end{matrix} \right\|, \quad x^T = \| \Delta H_1 \, \Delta H_2 \ldots \Delta H_u \|.$$

Priraštaji nadmorskih visina repera, određuju se rešenjem matrice normalnih jednačina

$$x = -M^{-1} m, \tag{3}$$

gde su

$$\begin{aligned} M^{-1} &= (A_m^T A_m + a_f^T a_f)^{-1} = (M_m + M_f)^{-1}, \\ m &= A_m^T f_m. \end{aligned} \tag{4}$$

Matrica koeficijenata težina izravnatih veličina se dobija primenom opšteg zakona rasprostiranja grešaka

$$Q_x = (M_m + M_f)^{-1} M_m (M_m + M_f)^{-1}. \tag{5}$$

Srednje greške i kovarijacije izravnatih veličina možemo odrediti iz varijanc-kovarijanc matrice

$$K = \mu_o^2 Q_x. \tag{6}$$

Srednja greška jedinice težine se dobija primenom zavisnosti

$$\mu_o^2 = \frac{v_m^T v_m}{N - \operatorname{rang} A_m}, \tag{7}$$

Srednje greške traženih veličina su članovi sa glavne dijagonale matrice (6), tj.

$$\mu_i^2 = \mu_o^2 Q_{ii} \quad i = 1, 2, \cdots u. \tag{8}$$

Koeficijenti korelacije se računaju prema relaciji

$$r_{ij} = \frac{Q_{ij}}{\sqrt{Q_{ii} Q_{jj}}}. \tag{9}$$

Kako je, uprošćenja radi, uzeto da su sva merenja izvršena sa istom tačnošću (merenja različite tačnosti se mogu uvek lako svesti na merenja iste tačnosti), to je proizašla mogućnost da se većina gornjih izraza prikažu u funkciji broja repera slobodne mreže. Srednja greška jedinice težine (7) zavisi i od merenih rezultata i od broja repera mreže.

Inverzna matrica normalnih jednačina (4) i matrica koeficijenata težina izravnatih veličina (5), poprimaju šematsku strukturu u procesu izravnanja repera. One se supstituišu matricom Q, čiji su elementi u funkciji broja repera n, koji obrazuju slobodnu nivelmansku mrežu. Prikažimo izgled matrice Q u slučaju, kad je broj merenja u mreži jednak broju repera i broju visinskih razlika.

a) Broj merenja u mreži je jednak broju repera, N = n

$$Q = \frac{1}{q} \left\| \begin{matrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & \cdots & q_{13} & q_{13} & q_{12} \\ q_{12} & q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{13} & q_{13} & q_{13} \\ - & - & - & - & - & - & - \\ q_{12} & q_{13} & q_{13} & \cdots & q_{13} & q_{12} & q_{11} \end{matrix} \right\| \tag{10}$$

gde su

— za inverznu matricu normalnih jednačina, tj. $Q = M^{-1}$

$$\text{u mreži koju čine} \begin{cases} \text{3 i 4 repera} & q = n(n-2), \quad q_{11} = 2n - 5, \quad q_{12} = 0, \quad q_{13} = 3 - n \\ \text{5 i više repera} & q = 5n, \quad q_{11} = 3n - 4, \quad q_{12} = n - 4, \quad q_{13} = -4 \end{cases}$$

— za matricu koeficijenata težina izravnatih veličina, tj. $Q = Q_x$

u mreži koju čine
- 3 i 4 repera $q = n^2, \quad q_{11} = 3n - 7, \quad q_{12} = -1, \quad q_{13} = 5 - 2n$
- 5 i više repera $q = 5n, \quad q_{11} = 3n - 5, \quad q_{12} = n - 5, \quad q_{13} = -5$

b) Broj merenja u mreži je jednak broju visinskih razlika, $N = \frac{n(n-1)}{2}$

$$Q = \frac{1}{q} \begin{Vmatrix} q_{11} \, q_{12} \cdots q_{12} \\ q_{12} \, q_{11} \cdots q_{12} \\ - \quad - \quad - \quad - \\ q_{12} \, q_{12} \cdots q_{11} \end{Vmatrix} \tag{11}$$

gde su

— za inverznu matricu normalnih jednačina, tj. $Q = M^{-1}$

$$q = n, \quad q_{11} = 1, \quad q_{12} = 0;$$

— za matricu koeficijenata težina izravnatih vrednosti, tj. $Q = Q_x$

$$q = n^2, \quad q_{11} = n - 1, \quad q_{12} = -1.$$

U slobodnim nivelmanskim mrežama koje sadrže tri repera, nema mogućnosti za ostvarivanje dijagonalnih veza (broj repera je jednak broju visinskih razlika). Otuda mreža takve konfiguracije predstavlja specijalan slučaj, za koji važi da su odgovarajući elementi matrica (10) i (11) međusobno jednaki.

U cilju određivanja šematske matrice Q, neophodno je raspolagati samo informacijom o broju repera, koji obrazuju mrežu. Prema tome, umesto primene složenijeg računskog postupka određivanja matrica (4) i (5), na veoma jednostavan način se uspostavlja matrica (10) ili (11). Na osnovu matrice Q, moguće je ostvariti uvid u ocenu tačnosti i korelisanosti izravnatih veličina. Evo nekih pokazatelja.

Srednja greška jedinice težine se može smanjiti preciznijim merenjima, tj. manjim iznosom kvadrata popravaka merenja $v_m^T v_m$, kao i povećanjem broja merenja u granicama od n-trag A_m do $n(n-1)2^{-1}$ — trag A_m. Elementi na glavnoj dijagonali matrice koeficijenata težina izravnatih veličina variraju u razmaku od $(3n-5)(5n)^{-1}$ odnosno od $(3n-7)n^{-2}$ u mreži od 3 i 4 repera do $(n-1)n^{-2}$. Koeficijenti korelacije poprimaju vrednosti u rasponu od $(n-5)(3n-5)^{-1}$ odnosno od $-(3n-7)^{-1}$ u mreži od 3 i 4 repera do $-(n-1)^{-1}$.

Na kraju, u tabeli 1, ilustrovani su rezultati ocene tačnosti i korelisanosti izravnatih veličina u mreži od četiri repera. Povećanjem broja merenja sa 4 na 6, smanjene su brojne vrednosti na glavnoj dijagonali matrice koeficijenata težina izravnatih veličina sa 5/16 na 3/16, a povećala korelisanost sa — 1/5 na — 1/3 i broj stepeni slobode sa 1 na 3.

Tabela 1.

Broj merenja u funkciji broja repera mreže kojih ima $n = 4$	Inverzna matrica normalnih jednačina M^{-1}	Matrica koeficijenata težina izravnatih veličina Q_x	Broj stepeni slobode N-trag A_m	Članovi na glavnoj dijagonali matrice Q_x		Koeficijent korelacije	
				Merenja ostvarena samo prema susednim reperima Q_{ii}	Pored merenja prema susednim reperima ostvarene i dijagonalne veze Q_{ii}	Merenja ostvarena samo prema susednim reperima r_{ij}	Pored merenja prema susednim reperima ostvarene i dijagonalne veze r_{ij}
$N = n = 4$	$\frac{1}{8}\begin{Vmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{Vmatrix}$	$\frac{1}{16}\begin{Vmatrix} 5 & -1 & -3 & -1 \\ -1 & 5 & -1 & -3 \\ -3 & -1 & 5 & -1 \\ -1 & -3 & -1 & 5 \end{Vmatrix}$	1	5/16	—	—1/5	—
$N = n + 1 = 5$	$\frac{1}{8}\begin{Vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{Vmatrix}$	$\frac{1}{16}\begin{Vmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 & -3 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -3 & -1 & 5 \end{Vmatrix}$	2	5/16	3/16	$-1/\sqrt{15}$	—1/3
$N = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = 6$	$\frac{1}{4}\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$	$\frac{1}{16}\begin{Vmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{Vmatrix}$	3	3/16	3/16	—1/3	—1/3

LITERATURA:

[1] Mittermayer, E.: Zur Ausgleichung freier Netze, ZfV, 1972.
[2] Molnar, I.: Prilog izravnanju slobodnih mreža, Geodetska služba 1980, 26, 5—10.
[3] Reissmann, G.: Zur Ausgleichung freier Höhennetze, Vermessungstechnik, 1976, 8, 306—309.

REZIME

U radu je interpretiran model izravnanja slobodnih nivelmanskih mreža za slučaj, kad se ne raspolaže informacijom o datim reperima. Ako su merenja u mreži izvršena sa istom tačnošću (reperi se nalaze na međusobno podjednakom rastojanju) — saopštava se — inverznu matricu normalnih jednačina (4) i matricu koeficijenata težina izravnatih veličina (5), moguće je prikazati, i bez invertovanja matrice normalnih jednačina i primene opšteg zakona rasprostiranja grešaka, na veoma jednostavan način. Naime, matrice (4) i (5) poprimaju šematsku strukturu, u funkciji su broja repera u mreži i supstituišu se: matricom (10) ako je broj merenja u mreži jednak broju repera, odnosno matricom (11) ako je broj merenja u mreži jednak broju visinskih razlika. Pored toga, omogućeno je, pre izravnanja, određivanje ocene tačnosti i korelisanosti izravnatih veličina.

Tabelom 1, ilustrovane su neke od brojnih vrednosti veličina, dobijenih u procesu izravnanja slobodne nivlemanske mreže, koju obrazuju četiri repera.

Primljeno: 1980-12-19