UDK 528.181
Originalan znanstveni rad

REALNA OCENA TAČNOSTI LINEARNIH VELIČINA

Ivan MOLNAR — Novi Sad*

Pri uspostavljanju bazisnih mreža, kod ispitivanja elekrooptičkih instrumenata za merenje odstojanja kao i u svim ostalim slučajevima određivanja merenih dužina, prisutne su različite informacije o postignutoj tačnosti i stepenu korelisanosti traženih veličina.

Primenom klasičnog postupka obrade podataka (bilo metodom direktnih, posrednih ili uslovnih) merenja, proizvoljno se usvaja, kao apriori tačna, pozicija početnog položaja linearnog merenja. Shodno ovoj proizvoljnosti, dobijaju se veličine srednjih grešaka traženih rezultata. Stiče se utisak da su najverovatnije vrednosti dužina, koje su udaljenije od pozicije početnog merenja, određene sa manjom tačnošću. Na taj način, srednje greške pružaju informaciju isključivo o apsolutnoj tačnosti u odnosu na poziciju početnog položaja merenog odstojanja. Pored toga, ovako određene linearne veličine odlikuju se visokim stepenom korelisanosti.

Određivanje najverovatnijih vrednosti i ocenu tačnosti traženih i merenih veličina treba ostvariti primenom savremenog polazišta, da se u postupku izravnanja dužina (apcisnih odstojanja) svaka pozicija merenja smatra traženom veličinom. Samo se tako može ostvariti realna ocena tačnosti i znatno smanjenje korelisanosti linearnih veličina. Najzad, primenom realne ocene tačnosti omogućaje se uspostavljanje pravilnijih kriterijuma u realizaciji apriorne ocene tačnosti linearnih merenja.

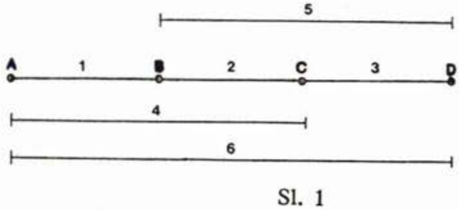
Ilustrujmo napred izloženo na sledećem primeru. Na osnovici $\overline{AD}$ izmereno je šest dužina (sl. 1) koje smo označili arapskim brojevima. Recipročne vrednosti ovih dužina uzete su za težine merenja.

Rezultati merenja:

$L_1 = 200{,}04$ m $L_4 = 400{,}00$ m

$L_2 = 200{,}01$ m $L_5 = 400{,}02$ m

$L_3 = 199{,}98$ m $L_6 = 599{,}96$ m



Sl. 1

Odredimo najverovatnije vrednosti dužina (apcisnih odstojanja) $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ i $\overline{AD}$.

1. KLASIČNI POSTUPAK (METODA POSREDNIH MERENJA)

Obzirom da se tražene veličine dobijaju polazeći od tačke A, to se usvaja da je pozicija početnog položaja merenja A = 0. Ova okolnost nalaže da se vrednost A u jednačinama grešaka naprosto izostavi.

* Dr. Ivan Molnar, dipl. inž., Pokrajinska geodetska uprava Novi Sad Bul. Maršala Tita 16

Usvojimo, najpre, približne vrednosti traženih veličina

$$B_0 = 200{,}00\ \text{m} \qquad C_0 = 400{,}00\ \text{m}, \qquad D_0 = 600{,}00\ \text{m}$$

Jednačine grešaka glase

$$\begin{aligned}
v_1 &= x_B + (B_0 - L_1),\\
v_2 &= x_C - x_B + (C_0 - B_0 - L_2),\\
v_3 &= x_D - x_C + (D_0 - C_0 - L_3),\\
v_4 &= x_C + (C_0 - L_4),\\
v_5 &= x_D - x_B + (D_0 - B_0 - L_5).\\
v_6 &= x_D + (D_0 - L_6).
\end{aligned} \tag{1}$$

Prema tome, matrica A i vektor l iznose

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \qquad l = \begin{Vmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \\ 4 \end{Vmatrix}. \tag{2}$$

Da bi težine figurisale u celobrojnim vrednostima, za merenu vrednost jedinice težine uzeta je dužina od 1200 m.

$$p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1200}{200} = 6, \quad p_4 = p_5 = \frac{1200}{400} = 3, \quad p_6 = \frac{1200}{600} = 2 \tag{3}$$

Matrica težina, dakle, glasi

$$P = \begin{Vmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{Vmatrix} = \langle 6, 6, 6, 3, 3, 2 \rangle \tag{4}$$

Odredimo elemente normalnih jednačina

$$N = A^T P A = \begin{Vmatrix} 15 & -6 & -3 \\ -6 & 15 & -6 \\ -3 & -6 & 11 \end{Vmatrix} \qquad n = A^T P l = \begin{Vmatrix} -12 \\ -18 \\ 14 \end{Vmatrix}. \tag{5}$$

Traženi priraštaji nepoznatih se određuju primenom sledeće zavisnosti

$$x = -N^{-1}n = -\begin{Vmatrix} 0{,}1086 & 0{,}0707 & 0{,}0682 \\ 0{,}0707 & 0{,}1313 & 0{,}0909 \\ 0{,}0682 & 0{,}0909 & 0{,}1591 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} -12 \\ -18 \\ 14 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1{,}62 \\ 1{,}94 \\ 0{,}23 \end{Vmatrix} \text{ cm.} \tag{6}$$

Izravnate vrednosti traženih veličina su

$$X = \begin{Vmatrix} B_0 \\ C_0 \\ D_0 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} x_B \\ x_C \\ x_D \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 200{,}0162 \\ 400{,}0194 \\ 600{,}0023 \end{Vmatrix} \text{ m.} \tag{7}$$

Popravke merenja iznose

$$v = Ax + l = \begin{Vmatrix} -2{,}38 \\ -0{,}68 \\ +0{,}29 \\ +1{,}95 \\ -3{,}39 \\ +4{,}23 \end{Vmatrix} \text{ cm,} \tag{8}$$

dok su izravnate vrednosti merenih rezultata

$$I = L + v = \begin{Vmatrix} 200{,}0162 \\ 200{,}0032 \\ 199{,}9829 \\ 400{,}0194 \\ 399{,}9861 \\ 600{,}0023 \end{Vmatrix} \text{ m.} \tag{9}$$

Računska kontrola:

$$v^T Pv = l^T P A x + l^T P l$$
$$118{,}82 = 118{,}82. \tag{10}$$

Srednja greška jedinice težine je

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{v + Pv}{n - \mu}} = \sqrt{\frac{118{,}82}{6 - 3}} = \pm 6{,}3, \tag{11}$$

dok su srednje greške traženih veličina

$$\begin{aligned} \mu_B &= \mu_0 \sqrt{Q_{BB}} = 6{,}3 \sqrt{0{,}1086} = \pm 2{,}1 \text{ cm,} \\ \mu_C &= \mu_0 \sqrt{Q_{CC}} = 6{,}3 \sqrt{0{,}1313} = \pm 2{,}3 \text{ cm,} \\ \mu_D &= \mu_0 \sqrt{Q_{DD}} = 6{,}3 \sqrt{0{,}1591} = \pm 2{,}5 \text{ cm.} \end{aligned} \tag{12}$$

Koeficijenti korelacija dužina $\overline{BC}$ i $\overline{CD}$ iznose

$$\mu_{\overline{BC}} = \frac{C_{BC}}{|\mu_B||\mu_C|} = \frac{Q_{BC}}{\sqrt{Q_{BB}\,Q_{CC}}} = \frac{0{,}0707}{\sqrt{0{,}1086 \cdot 0{,}1313}} = 0{,}59,$$

$$\mu_{\overline{CD}} = \frac{Q_{CD}}{|\mu_C||\mu_D|} = \frac{Q_{CD}}{\sqrt{Q_{CC}\,Q_{DD}}} = \frac{0{,}0909}{\sqrt{0{,}1313 \cdot 0{,}1591}} = 0{,}63. \tag{13}$$

Odredimo i veličine srednjih grešaka merenih dužina $\overline{BC}$, i $\overline{CD}$ i $\overline{BD}$. Izravnate vrednosti dužina $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ i $\overline{BD}$ su funkcije sledećih izravnatih veličina

$$\overline{BC} = C - B, \quad \overline{CD} = D - C, \quad \overline{BD} = D - B.$$

Matrica koja sadrži funkcije po izravnatim vrednostima parcijalnih derivacija ima sledeći oblik

$$G = \begin{Vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}. \tag{14}$$

Matrica koeficijenata traženih funkcija se određuje primenom zakona rasprostiranja grešaka

$$Q_F = GQ_X\,G^T = \begin{Vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0{,}1086 & 0{,}0707 & 0{,}0682 \\ 0{,}0707 & 0{,}1313 & 0{,}0909 \\ 0{,}0682 & 0{,}0909 & 0{,}1591 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 0{,}0985 & -0{,}0379 & 0{,}0606 \\ -0{,}0379 & 0{,}1086 & 0{,}0707 \\ 0{,}0606 & 0{,}0707 & 0{,}1313 \end{Vmatrix} \tag{15}$$

Srednje greške izravnatih dužina $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ i $\overline{BD}$ iznose

$$\mu_{C-B} = \mu_0\sqrt{Q_{C-B}} = 6{,}3\sqrt{0{,}0985} = \pm 2{,}0 \text{ cm},$$

$$\mu_{D-C} = \mu_0\sqrt{Q_{D-C}} = 6{,}3\sqrt{0{,}1086} = \pm 2{,}1 \text{ cm}, \tag{16}$$

$$\mu_{D-B} = \mu_0\sqrt{Q_{D-B}} = 6{,}3\sqrt{0{,}1313} = \pm 2{,}3 \text{ cm}.$$

Još je moguće odrediti i srednje greške neizravnatih rezultata merenja. Ove vrednosti se računaju tako što se srednja greška jedinice težine određuje iz izravnanja, dok se za koeficijente težina usvajaju težine uspostavljene pre izravnanja.

$$\mu_i' = \mu_0 \sqrt{\frac{1}{p_i}} \qquad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

$$\mu_1' = \mu_2' = \mu_3' = 6{,}3 \sqrt{\frac{1}{6}} = \pm 2{,}6 \text{ cm}$$

$$\mu_4' = \mu_5' = 6{,}3 \sqrt{\frac{1}{3}} = \pm 3{,}6 \text{ cm} \tag{17}$$

$$\mu_6' = 6{,}3 \sqrt{\frac{1}{2}} = \pm 4{,}6 \text{ cm.}$$

Na osnovu upoređenja (12) i (16) sa (17) se vidi da su vrednosti srednjih grešaka dužina, usled izravnanja, smanjene i do 50%.

2. SAVREMENI POSTUPAK

Jednačine grešaka sada glase

$$\begin{aligned}
v_1 &= x_B - x_A + (B_0 - A_0 - L_1),\\
v_2 &= x_C - x_B + (C_0 - B_0 - L_2),\\
v_3 &= x_D - x_C + (D_0 - C_0 - L_3),\\
v_4 &= x_C - x_A + (C_0 - A_0 - L_4),\\
v_5 &= x_D - x_B + (D_0 - B_0 - L_5),\\
v_6 &= x_D - x_A + (D_0 - A_0 - L_6),\\
v_f &= x_A + x_B + x_C + x_D.
\end{aligned} \tag{18}$$

Približne vrednosti traženih veličina su

$$A_0 = 0{,}00 \text{ m} \quad B_0 = 200{,}00 \text{ m} \quad C_0 = 400{,}00 \text{ m} \quad D_0 = 600{,}00 \text{ m}$$

Matrica A i vektor 1 poprimaju vrednosti

$$A_m = \begin{Vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \qquad l_m = \begin{Vmatrix} -4\\ -1\\ 2\\ -2\\ 4 \end{Vmatrix} \tag{19}$$

$$A_f = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix} \qquad l_f = 0$$

Matrica težina merenih veličina je ista kao i (4), dok je težina foktvinog merenja $p_f = 1$.

Elementi normalnih jednačina iznose

$$N = N_m + N_f = A_m^T P_m A_m + A_f^T A_f = \begin{Vmatrix} 12 & -5 & -2 & -1 \\ -5 & 16 & -5 & -2 \\ -2 & -5 & 16 & -5 \\ -1 & -2 & -5 & 12 \end{Vmatrix}$$

$$n = n_m = A_m^T P_m l_m = \begin{Vmatrix} 16 \\ -12 \\ -18 \\ 14 \end{Vmatrix}. \tag{20}$$

Tražene vrednosti priraštaja su sledeće

$$x = -N^{-1}n = -\begin{Vmatrix} 0{,}1162 & 0{,}0543 & 0{,}0429 & 0{,}0366 \\ 0{,}0543 & 0{,}1010 & 0{,}0518 & 0{,}0429 \\ 0{,}0429 & 0{,}0518 & 0{,}1010 & 0{,}0543 \\ 0{,}0366 & 0{,}0429 & 0{,}0543 & 0{,}1162 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 16 \\ -12 \\ -18 \\ 14 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -0{,}95 \\ +0{,}67 \\ +0{,}99 \\ -0{,}72 \end{Vmatrix} \text{cm}. \tag{21}$$

Najverovatnije vrednosti traženih veličina su

$$X = \begin{Vmatrix} A_0 \\ B_0 \\ C_0 \\ D_0 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \\ x_D \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -0{,}0095 \\ 200{,}0067 \\ 400{,}0099 \\ 599{,}9928 \end{Vmatrix} \text{m}. \tag{22}$$

Popravke merenja iznose

$$v_m = A_m x + l_m = \begin{Vmatrix} -2{,}38 \\ -0{,}68 \\ +0{,}29 \\ +1{,}94 \\ -3{,}39 \\ +4{,}23 \end{Vmatrix} \text{cm}, \tag{23}$$

dok su izravnati rezultati merenja

$$I = L + v_m = \begin{Vmatrix} 300{,}0162 \\ 200{,}0032 \\ 199{,}9829 \\ 400{,}0194 \\ 399{,}9861 \\ 600{,}0023 \end{Vmatrix} \text{m}. \tag{24}$$

Računska kontrola:

$$v_m^T\, P_m\, v_m = l_m^T P_m\, A_m\, x + l_m^T\, P_m\, l_m$$

$$118{,}82 = 118{,}82. \tag{25}$$

Srednja greška jedinice težine iznosi

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{v_m^T\, P_m\, v_m}{n - \operatorname{rang} A_m}} = \sqrt{\frac{118{,}82}{6-3}} = \pm 6{,}3.$$

Matrica koeficijenata težina izravnatih vrednosti se određuje primenom opšteg zakona rasprostiranja grešaka

$$Q_X = S\, Q_x\, S^T = S\, N^{-1}\, S,$$

gde je S simetrična matrica kojom se definiše zavisnost izravnatih veličina. Ova matrica (u slučaju određivanja dužina, uglova i nadmorskih visina) glasi

$$S = S^T = \frac{1}{n} \begin{Vmatrix} n-1 & -1 & . & . & . & -1 \\ -1 & n-1 & . & . & . & -1 \\ - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - \\ -1 & -1 & . & . & . & n-1 \end{Vmatrix},$$

$$Q_x = \frac{1}{4} \begin{Vmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0{,}1162 & 0{,}0543 & 0{,}0429 & 0{,}0366 \\ 0{,}0543 & 0{,}1010 & 0{,}0518 & 0{,}0429 \\ 0{,}0429 & 0{,}0518 & 0{,}1010 & 0{,}0543 \\ 0{,}0366 & 0{,}0429 & 0{,}0543 & 0{,}1162 \end{Vmatrix} \frac{1}{4} \begin{Vmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 0{,}0537 & -0{,}0082 & -0{,}0196 & -0{,}0259 \\ -0{,}0082 & 0{,}0385 & -0{,}0107 & -0{,}0196 \\ -0{,}0196 & -0{,}0107 & 0{,}0385 & -0{,}0082 \\ -0{,}0259 & -0{,}0196 & -0{,}0082 & 0{,}0537 \end{Vmatrix}. \tag{26}$$

Srednje greške traženih veličina su

$$\mu_A = \mu_0 \sqrt{Q_{AA}} = 6{,}3 \sqrt{0{,}0537} = \pm 1{,}5 \text{ cm},$$

$$\mu_B = \mu_0 \sqrt{Q_{BB}} = 6{,}3 \sqrt{0{,}0385} = \pm 1{,}2 \text{ cm},$$

$$\mu_C = \mu_0 \sqrt{Q_{CC}} = 6{,}3 \sqrt{0{,}0385} = \pm 1{,}2 \text{ cm},$$

$$\mu_D = \mu_0 \sqrt{Q_{DD}} = 6{,}3 \sqrt{0{,}0537} = \pm 1{,}5 \text{ cm}.$$

Sračunajmo koeficijente korelacije dužina $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{CD}$

$$\mu_{\overline{AB}} = \frac{C_{AB}}{|\mu_A|\,|\mu_B|} = \frac{Q_{AB}}{\sqrt{Q_{AA}\,Q_{BB}}} = \frac{-0{,}0082}{\sqrt{0{,}0537 \cdot 0{,}0985}} = -0{,}18,$$

$$\mu_{\overline{BC}} = \frac{C_{BC}}{|\mu_B|\,|\mu_C|} = \frac{Q_{BC}}{\sqrt{Q_{BB}\,Q_{CC}}} = \frac{-0{,}0107}{\sqrt{(0{,}0385)^2}} = -0{,}28; \qquad (28)$$

$$\mu_{\overline{CD}} = \frac{C_{CD}}{|\mu_C|\,|\mu_D|} = \frac{Q_{CD}}{\sqrt{Q_{CC}\,Q_{DD}}} = \frac{-0{,}0082}{\sqrt{0{,}0385 \cdot 0{,}0537}} = -0{,}18.$$

Odredimo srednje greške merenih dužina $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ i $\overline{BD}$. Izravnate vrednosti ovih dužina su funkcije sledećih izravnatih veličina.

$$\overline{BC} = C - B, \qquad \overline{CD} = D - C, \qquad \overline{BD} = D - B.$$

Matrice funkcija po parcijalnim derivacijama poprimaju izgled

$$G = \begin{Vmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

dok se matrica koeficijenata ovih funkcija određuje primenom zakona rasprostiranja grešaka

$$Q_F = G Q_x G^T =$$

$$= \begin{Vmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0{,}1162 & 0{,}0543 & 0{,}0429 & 0{,}0366 \\ 0{,}0543 & 0{,}1010 & 0{,}0518 & 0{,}0429 \\ 0{,}0429 & 0{,}0518 & 0{,}1010 & 0{,}0543 \\ 0{,}0366 & 0{,}0429 & 0{,}0543 & 0{,}1162 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix} = \qquad (29)$$

$$= \begin{Vmatrix} +0{,}0985 & -0{,}0379 & +0{,}0606 \\ -0{,}0379 & +0{,}1086 & +0{,}0707 \\ +0{,}0606 & +0{,}0707 & +0{,}1313 \end{Vmatrix}.$$

Srednje greške ovih dužina iznose

$$\mu_{\overline{CB}} = \mu_0 \sqrt{Q_{C-B}} = 6{,}3\sqrt{0{,}0958} = \pm 2{,}0 \text{ cm},$$

$$\mu_{\overline{CD}} = \mu_0 \sqrt{Q_{D-C}} = 6{,}3\sqrt{0{,}1086} = \pm 2{,}1 \text{ cm}, \qquad (30)$$

$$\mu_{\overline{BD}} = \mu_0 \sqrt{Q_{D-B}} + 6{,}3\sqrt{0{,}1313} = \pm 2{,}3 \text{ cm}.$$

Odredimo, primenom identičnog postupka, matricu funkcija i srednje greške traženih dužina $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ i $\overline{AD}$

$$Q_F = \begin{Vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ & & & \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0{,}1162 & 0{,}0543 & 0{,}0429 & 0{,}0366 \\ 0{,}0543 & 0{,}1010 & 0{,}0518 & 0{,}0429 \\ 0{,}0429 & 0{,}0518 & 0{,}1010 & 0{,}0435 \\ 0{,}0366 & 0{,}0429 & 0{,}0543 & 0{,}1162 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 0{,}1086 & 0{,}0707 & 0{,}0682 \\ 0{,}0707 & 0{,}1313 & 0{,}0909 \\ 0{,}0682 & 0{,}0909 & 0{,}1591 \end{Vmatrix} \tag{31}$$

$$\begin{aligned} \mu_{\overline{AB}} &= \mu_0 \sqrt{Q_{B-A}} = 6{,}3 \sqrt{0{,}1086} = \pm 2{,}1 \text{ cm}, \\ \mu_{\overline{AC}} &= \mu_0 \sqrt{Q_{C-A}} = 6{,}3 \sqrt{0{,}1313} = \pm 2{,}3 \text{ cm}, \\ \mu_{\overline{AD}} &= \mu_0 \sqrt{Q_{D-A}} = 6{,}3 \sqrt{0{,}1591} = \pm 2{,}5 \text{ cm}. \end{aligned} \tag{32}$$

3. UKLAPANJE SAVREMENO IZRAVNATIH DUŽINA U DUŽINE IZRAVNATE KLASIČNIM POSTUPKOM

Određivanje najverovatnijih vrednosti i ocenu tačnosti traženih veličina treba, najpre, ostvariti primenom postupka prikazanim pod a. Nakon toga, klasično izravnate dužine se translatorno pomeraju po apcisnoj osovini sve dotle dok suma kvadrata razlika dužina dobijena primenom klasičnog postupka i dužina koje će se dobiti nakon izrvnanja, ne bude minimum.

Traženi priraštaji dužina, određuju se primenom izraza

$$x_i = x_{ki} - \varepsilon$$
$$i = 1, 2, \ldots n, \quad n + 1$$

gde je

$$\varepsilon = (n + 1)^{-1} \sum_{i=1}^{n} x_{ki},$$

dok se matrica koeficijenata izravnatih vrednosti dobija primenom zakona rasprostiranja grešaka

$$Q_X = S\, Q_X\, S^T = S\, N^{-1}\, S^T,$$

gde je S matrica kojom se definiše zavisnost izravnatih dužina

$$S = \frac{1}{n+1} \begin{Vmatrix} -1 & -1 & -1 & . & . & . & -1 \\ n-1 & -1 & & . & . & . & -1 \\ -1 & n & -1 & . & . & . & -1 \\ \hdashline -1 & -1 & -1 & . & . & . & n \end{Vmatrix}.$$

U našem primeru su:

$$x_{k1} = 1{,}62\ \text{cm}\quad x_{k2} = 1{,}94\ \text{cm}\quad x_{k3} = 0{,}23\ \text{cm},\quad n = 3,\quad x_{k0} = 0{,}00\ \text{cm}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{4}(1{,}62 + 1{,}94 + 0{,}23) = 0{,}95\ \text{cm} \qquad (33)$$

$$\begin{aligned} x_1 &= x_A = x_{k0} - \varepsilon = -0{,}95\ \text{cm} & X_A &= A_0 + x_A = -0{,}095\ \text{m},\\ x_2 &= x_B = x_{k1} - \varepsilon = 0{,}67\ \text{cm}, & X_B &= B_0 + x_B = 200{,}0067\ \text{m},\\ x_3 &= x_C = x_{k2} - \varepsilon = 0{,}99\ \text{cm}, & X_C &= C_0 + x_C = 400{,}0099\ \text{m},\\ x_4 &= x_D = x_{k3} - \varepsilon = -0{,}72\ \text{cm}, & X_D &= D_0 + x_D = 599{,}9928\ \text{m}, \end{aligned}$$

$$Q_X = \frac{1}{4}\begin{Vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0{,}1086 & 0{,}0707 & 0{,}0682 \\ 0{,}0707 & 0{,}1313 & 0{,}0909 \\ 0{,}0682 & 0{,}0909 & 0{,}1591 \end{Vmatrix} \frac{1}{4} \begin{Vmatrix} -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 0{,}0537 & -0{,}0082 & -0{,}0196 & -0{,}0259 \\ -0{,}0082 & 0{,}0385 & -0{,}0107 & -0{,}0196 \\ -0{,}0196 & -0{,}0107 & 0{,}0385 & -0{,}0082 \\ -0{,}0259 & -0{,}0196 & -0{,}0082 & 0{,}0537 \end{Vmatrix}. \qquad (35)$$

Analizom postignutih rezultata izravnanja, ostvarenih klasičnim u odnosu na savremeni postupak, može se zaključiti:

— da se izravnate vrednosti priraštaja traženih veličina razlikuju za konstantnu vrednost (upoređivanjem izraza (6) i (21) i kontrolom, koja se ostvaruje primenom izraza (33))

— da su izravnate vrednosti merenih veličina iste (upoređivanjem izraza (9) i (24))

— da su srednje greške izravnatih vrednosti traženih veličina različite, tj. da srednje greške dobijene primenom savremenog postupka realnije karakterišu relativnu tačnost traženih apscisnih odstojanja (upoređivanjem izraza (12) i (27))

— da su srednje greške merenih veličina iste (upoređivanjem izraza (12) sa (32) kao i (61) sa (30))

— da se najverovatnije vrednosti dužina određene primenom savremenog postupka odlikuju manjom korelisanošću (upoređivanjem izraza (13) sa (28)).

LITERATURA

[1] Hazay I.: Kiegyenlito szamitasok, Budapest 1968.
[2] Mihailović K.: Uklapanje lokalnih nivelmanskih mreža u postojeću nivelmansku mrežu, Geodetska služba br. 17, Beograd 1977. god.
[3] Molnar I.: Prilog izravnanju nivelmanskih mreža podelom u redove, Geodetski list br. 10.—12, Zagreb 1979, str. 296—305.

REZIME

Objektivna informacija o postignutoj tačnosti i korelisanosti linearnih veličina se dobija primenom savremenog postupka obrade podataka merenja. Savremeni postupak izravnanja dužina (apscisnih odstojanja) podrazumeva, da se svaka pozicija merenja smatra traženom veličinom.

Primljeno: 1980-03-19