UDK 528.181
Originalan znanstveni rad

IZRAVNANJE SLOBODNIH GEODETSKIH MREŽA

Ivan MOLNAR — Novi Sad*

U ovom radu daje se prikaz određivanja geodetskih tačaka slobodnih mreža po etodi posrednih merenja. Rezultati na ovaj način izravnatih vrednosti traženih ve-ina treba da su saglasni sa rezultatima koji bi se ostvarili primenom savremenog ostupka izravnanja mreža sa minimalnim tragom [2].

Jednačine grešaka, pri izravnanju po metodi posrednih merenja, glase

$$v = A\,x + l \ldots p \tag{1}$$

lnosno

$$\begin{Vmatrix} v_m \\ v_f \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} A_m \\ A_f \end{Vmatrix} x + \begin{Vmatrix} f_m \\ 0 \end{Vmatrix} \ldots \begin{Vmatrix} p_m & 0 \\ 0 & E \end{Vmatrix}$$

le su

$_n$ i p_m matrica koeficijenata odnosno težina merenih veličina

$$A_m = \begin{Vmatrix} a_1\, b_1 \ldots n_1 \\ a_2\, b_2 \ldots n_2 \\ \text{- - - - - - - -} \\ a_m\, b_n \quad n_n \end{Vmatrix} \qquad p_m = \begin{Vmatrix} p_1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & p_2 \ldots 0 \\ \text{- - -} & \text{- - - -} \\ 0 & 0 \ldots p_n \end{Vmatrix}$$

v_m i f_m vektor popravaka odnosno slobodnih članova jednačina grešaka

$$v_m^T = \| v_1\, v_2 \ldots v_n \| \qquad f_m^T = \| f_1\, f_2 \ldots f_n \|.$$

atrica koeficijenata fiktivnih jednačina grešaka A_f zavisi od defekta slobodnih mre-d. Prikažimo ovu matricu za slučajeve:

d = 2, izravnanje slobodnih mreža kad su orijentacija i razmera poznati, i

d = 1, izravnanje slobodnih nivelmanskih mreža

$$A_f = \begin{Vmatrix} 1\,0\,1\,0 \ldots 1\,0 \\ 0\,1\,0\,1 \ldots 0\,1 \end{Vmatrix} \qquad A_f = \| 1\;1 \ldots 1 \|$$

ektor x je vektor priraštaja približnih vrednosti nepoznatih

$$x^T = \| \Delta x_1\, \Delta x_2 \ldots \Delta x_u \|.$$

* Adresa autora: Dr. Ivan Molnar, dipl. inž. Pokrajinska geodetska uprava Novi Sad, B. aršala Tita 16

Minimiziranjem sume kvadrata popravaka

$$v^T p\, v = \text{minimum}, \qquad ($$

dobijaju se normalne jednačine

$$A^T p\, A\, x + A^T p\, l = 0 \qquad ($$

ili

$$\left\| A_m^T\, A_f^T \right\| \left\| \begin{matrix} p_m & 0 \\ 0 & E \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} A_m \\ A_f \end{matrix} \right\| x + \left\| A_m^T\, A_f^T \right\| \left\| \begin{matrix} p_m & 0 \\ 0 & E \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} f_m \\ 0 \end{matrix} \right\| = 0.$$

$$(A_m^T\, p_m\, A_m + A_f^T\, A_f)\, x + A_m^T\, p_m\, f_m = 0.$$

$$(N_m + N_f)\, x + n_m = 0$$

Odavde se određuje vektor priraštaja nepoznatih

$$x = -(N_m + N_f)^{-1}\, n_m. \qquad ($$

Matrica koeficijenata težina vektora priraštaja je dakle

$$Q_x = (N_m + N_f)^{-1}. \qquad ($$

Vektor popravaka se određuje iz jednačina grešaka merenih veličina

$$v_m = A_m\, x + f_m. \qquad ($$

Najverovatnije vrednosti nepoznatih veličina se računaju pomoću izraza

$$X = x_0 + x. \qquad ($$

Radi ostvarivanja računske kontrole, neophodno je uspostaviti zavisnost

$$v_m^T\, p_m\, v_m = f_m^T\, p_m\, A_m\, x + f_m^T\, p_m\, f_m. \qquad ($$

Srednja greška jedinice težine μ_0, računa se prema izrazu

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{v_m^T\, p_m\, v_m}{n - \text{rang}\, A_m}}. \qquad ($$

Matrica koeficijenata težina nepoznatih veličina Q_X se određuje primenom opšt zakona rasprostiranja grešaka

$$Q_X = S\, Q_X\, S^T = S\, (N_m + N_f)^{-1}\, S \qquad (1$$

pri kojem se simetričnom matricom S definiše zavisnost između izravnatih veliči u mreži. Prikažimo ovu matricu za slučajeve određivanja:

— pravouglih koordinata slobodnih geodetskih mreža, i

— nadmorskih visina repera slobodnih nivelmanskih mreža

$$S = S^T = \frac{1}{n} \left\| \begin{array}{cccccccc} n-2 & 0 & -2 & 0 & \dots & -2 & 0 \\ 0 & n-2 & 0 & -2 & \dots & 0 & -2 \\ \hdashline -2 & 0 & -2 & 0 & \dots & n-2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & \dots & 0 & n-2 \end{array} \right\| \qquad (1$$

$$S = S^{T} = \frac{1}{n} \begin{Vmatrix} n-1 & -1 \dots & -1 \\ -1 & n-1 \dots & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -1 \dots & n-1 \end{Vmatrix}. \tag{12}$$

Najzad, kovarijaciona matrica se određuje posredstvom izraza

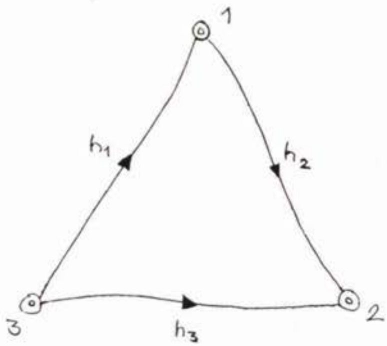
$$K_X = \mu_0^2 \, Q_X = \mu_0^2 \, S \, (N_m + N_f)^{-1} \, S. \tag{13}$$

Primer. Odredimo kote repera 1, 2 i 3 na sl. 1 [1], kad su nivelane visinske razlike, a međusobna rastojanja i približne vrednosti kota repera poznati.

$$x_{01} = 101 \text{ m} \quad s_{13} = 4 \text{ km.} \quad h_1 = 1{,}000 \text{ m}$$

$$x_{02} = 103 \text{ m} \quad s_{12} = 2 \text{ km} \quad h_2 = 2{,}000 \text{ m}$$

$$x_{03} = 100 \text{ m} \quad s_{23} = 1 \text{ km} \quad h_3 = 3{,}021 \text{ m}$$



Sl. 1

Obrazujmo matrice i vektore

$$A_m = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{Vmatrix} \quad p_m = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{Vmatrix} \quad A_f = \| \, 1 \; 1 \; 1 \, \| \quad f_m^T = \| \, 0 \; 0 \; -2 \; 1 \, \|.$$

Uspostavimo normalne jednačine prema (3)

$$N = N_m + N_f = \begin{Vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 7 & -3 \\ 0 & -3 & 6 \end{Vmatrix}$$

$$n_m = A_m^T \, p_m \, f_m = \begin{Vmatrix} 0 \\ -84 \\ +84 \end{Vmatrix}.$$

Vektor priraštaja traženih veličina se određuje primenom (4)

$$x = -(N_m + N_r)^{-1} n_m = -\frac{1}{42}\begin{Vmatrix} 11 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 4 \\ 1 & 4 & 9 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} 0 \\ -84 \\ +84 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2 \\ 8 \\ -10 \end{Vmatrix} \text{ mm.}$$

Popravke merenih veličina se dobijaju iz (6)

$$v_m = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} 2 \\ 8 \\ -10 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ -21 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 12 \\ 6 \\ -3 \end{Vmatrix} \text{ mm.}$$

Vektor najverovatnijih vrednosti nepoznatih se određpje primenom (7)

$$X = \begin{Vmatrix} 101{,}000 \\ 103{,}000 \\ 100{,}000 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0{,}002 \\ 0{,}008 \\ -0{,}010 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 101{,}002 \\ 103{,}008 \\ 99{,}990 \end{Vmatrix} \text{ m.}$$

Računska kontrola ostvarena prema (8)

$$252 = -1512 + 1764$$

ukazuje na potpunu saglasnost sračunatih rezultata.

Odredimo, primenom izraza (9), (10), 12) i (13), kvadrat srednje greške jedinice težine, matricu koeficijenata težina nepoznatih veličina i kovarijacionu matricu

$$\mu_0^2 = \frac{252}{3-2} = 252$$

$$Q_X = \frac{1}{3}\begin{Vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{Vmatrix}\frac{1}{42}\begin{Vmatrix} 11 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 4 \\ 1 & 4 & 9 \end{Vmatrix}\frac{1}{3}\begin{Vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{Vmatrix} = \frac{1}{126}\begin{Vmatrix} 19 & -8 & -11 \\ -8 & 10 & -12 \\ -11 & -2 & 13 \end{Vmatrix}$$

$$K_X = \frac{252}{126}\begin{Vmatrix} 19 & -8 & -11 \\ -8 & 10 & -2 \\ -11 & -2 & 13 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 38 & -16 & -22 \\ -16 & 20 & -4 \\ -22 & -4 & 26 \end{Vmatrix}.$$

LITERATURA

[1] Mihailović K.: Izravnanje slobodnih mreža, Zbornik Geodetskog instituta br. 15—16 i 17, Bgd. 1978. g

[2] Mittermayer: E.: Zur Ausgleichung freier Netze, ZfV, 1972.

REZIME

U radu je prikazano određivanje geodetskih tačaka slobodnih mreža po metodi posrednih merenja. Određivanjem nepoznatih veličina i ocenom tačnosti izravnatih vrednosti, pomoću izvedenih izraza u radu, ostvaruju se identični rezultati onima, koji bi se dobili primenom metode izravnanja slobodnih mreža izložene u [2].

ZUSAMMENFASSUNG

Die Bestimmung von geodätischen Punkten in freien Netzen nach der Methode der vermittelnder Beobachtungen ist dargestellt. Nach in diesem Aufsatz abgeleiteten Formeln, bekommt man bei der Bestimmung der Unbekannten und Genauigkeitsabschätzung der ausgeglichenen Grössen die gleiche Ergebnisse wie mit in [2] dargestellte Methode.

Primljeno: 1980—01—18