UDK 528.181

PRILOG ODREĐIVANJU KOTA REPERA NESLOBODNE MREŽE UZIMANJEM U OBZIR GREŠAKA DATIH VELIČINA I NJIHOVE ZAVISNOSTI

Ivan MOLNAR — Novi Sad*

UVOD

U [3] su razmatrani načini određivanja kota repera slobodnih nivelmanskih mreža, po postupcima izravnanja mreža sa minimalnim tragom (Mittermayera, Mihailovića i dodatne fiktivne jednačine odstupanja).

Prednost ovih postupaka određivanja kota repera je u tome, da se svi reperi u mreži uključuju u proces izravnanja. Kako je poznato, klasični postupci izravnanja kota repera su, ostvarivani na način da se jedan od repera usvajao kao »dati« reper. Time je on, slučajnim izborom, proglašavan »tačnim« i shodno tome bio lišen svakog uticaja na proces izravnanja.

Globalna analiza postupaka izravnanja slobodnih nivelmanskih mreža sa minimalnim tragom ukazuje na to, da je primena postupka dodatne fiktivne jednačine odstupanja neuporedivo ekonomičnija od postupaka Mittermayera i Mihailovića. Pored toga, radi se i o pojmovno najjednostavnijem postupku, jer se suzbijanje singularnosti matrica normalnih jednačina ostvaruje tako da se pri formiranju jednačina odstupanja obrazuje još i dodatna fiktivna jednačina odstupanja.

U [2] je prikazano određivanje kota repera neslobodne mreže, podjednako udaljenih od datih repera slobodne mreže. Na kraju prikaza saopštena je konstatacija, da određivanje kota repera neslobodne mreže, posredstvom postupka dodatne fiktivne jednačine odstupanja čini suvišnom primenu uopštene metode najmanjih kvadrata (u. m. n. k).

U ovom radu će biti učinjen pokušaj da se pomenuta konstatacija dokaže. Obzirom na veoma složene izraze kojima bi trebalo operisati u opštem slučaju, određivanje najverovatnijih vrednosti kota repera neslobodne mreže A biće ostvareno od tri i četiri repera slobodne mreže. Zapravo, primeniće se takav vid rasuđivanja, koji se sastoji u dokazivanju formula $A^T Q_{\bar{f}}^{-1} = A^T$ time što se najpre ustanovljava njihova tačnost za $n = 3 + 1 = 4$ repera slobodne mreže ako su tačne za $n = 3$ repera slobodne mreže. Radi se o rekurentnom rasuđivanju ili zaključivanju potpunom (matematičkom) indukcijom.

*Adresa autora: Dr. Ivan Molnar, Novi Sad, B. Maršala Tita 16

1. ODREĐIVANJE KOTA REPERA SLOBODNE MREŽE

Jednačine odstupanja glase

$$v = A \cdot \xi + f \ldots p \tag{1}$$

gde su

$$v = \begin{Vmatrix} v_r \\ v_f \end{Vmatrix}; \quad A = \begin{Vmatrix} A_r \\ a_f \end{Vmatrix}; \quad f = \begin{Vmatrix} f_r \\ 0 \end{Vmatrix}; \quad p = \begin{Vmatrix} p_r & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}; \quad \xi^T = \| \Delta H_1 \, \Delta H_2 \ldots \Delta H_n \|$$

$$A_r = \begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & \ldots & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n & b_n \end{Vmatrix}; \quad p_r = \begin{Vmatrix} d_1^{-L} & & & 0 \\ & d_2^{-L} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_n^{-L} \end{Vmatrix} \quad \begin{aligned} v_r^T &= \| v_1 \, v_2 \ldots v_n \| \\ a_f &= \| 1 \; 1 \ldots 1 \| \\ f_r^T &= \| f_1 \, f_2 \ldots f_n \| \end{aligned}$$

$a_i = -b_i = \pm 1$
$i = 1, 2, \ldots n$

Koristeći uslov minimuma

$$v^T p \, v = \min,$$

dobijaju se normalne jednačine

$$N \cdot \xi + n = 0 \tag{2}$$

Odavde

$$\xi = -N^{-1} n \tag{3}$$

gde su

$$N = \| A_r^T \, a_f^T \| \begin{Vmatrix} p_r & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} A_r \\ a_f \end{Vmatrix} = A_r^T p_r A_r + a_f^T a_f = N_r + e$$

$$n = \| A_r^T \, a_f^T \| \begin{Vmatrix} p_r & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} f_r \\ 0 \end{Vmatrix} A_r^T p_r f_r + 0 = n_r; \qquad e = a_f^T a_f = \begin{Vmatrix} 1 \, 1 \ldots 1 \\ 1 \, 1 \ldots 1 \\ \hline 1 \, 1 \ldots 1 \end{Vmatrix}$$

Matrica koeficijenta težina je

$$Q_\xi = N^{-1} = (N_r + e)^{-1} \tag{4}$$

Ako su merenja istih težina, tada matrica težina postaje jedinična matrica. Shodno tome, normalne jednačine glase

$$A^T A \cdot \xi + A^T f = 0$$

Odavde se dobijaju priraštaji približnih vrednosti nepoznatih

$$\xi = -(A^T A)^{-1} A^T f$$

Inverzna matrica matrice normalnih jednačina, tj. matrica koeficijenata težina ima šematski oblik

$$Q_\xi = (A^T A)^{-1} \tag{4'}$$

Struktura ove matrice je u funkciji broja repera slobodne mreže n. Napišimo opšti oblik ove matrice koja se može odrediti pre izravnanja

$$Q_\xi = \frac{1}{q'} \begin{Vmatrix} q'_{11}\, q'_{12}\, q'_{13}\, q'_{13} \cdots q'_{13}\, q'_{13}\, q'_{12} \\ q'_{12}\, q'_{11}\, q'_{12}\, q'_{13} \cdots q'_{13}\, q'_{13}\, q'_{13} \\ \hdashline q'_{13}\, q'_{13}\, q'_{13}\, q'_{13} \cdots q'_{12}\, q'_{11}\, q'_{12} \\ q'_{12}\, q'_{13}\, q'_{13}\, q'_{13} \cdots q'_{13}\, q'_{12}\, q'_{11} \end{Vmatrix} \tag{5}$$

gde su

za mrežu od 3 i 4 repera: $q' = n\,(n-2)$; $q'_{11} = 2n - 5$; $q'_{12} = 0$; $q'_{13} = 3 - n$
za mrežu od 5 i više repera: $q' = 5n$; $q'_{11} = 3n - 4$; $q'_{12} = n - 4$; $q'_{13} = -4$
Napišimo na osnovu (5) matricu koeficijenata težina slobodne nivelmanske mreže, koja ima npr. 3, 4 i 5 repera

$$Q_\xi = \frac{1}{q'} \begin{Vmatrix} q'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & q'_{11} & 0 \\ 0 & 0 & q'_{11} \end{Vmatrix} = \frac{1}{3} \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} q_{11} & 0 & 0 \\ 0 & q_{11} & 0 \\ 0 & 0 & q_{11} \end{Vmatrix} \tag{6}$$

$$Q_\xi = \frac{1}{q'} \begin{Vmatrix} q'_{11} & 0 & q'_{13} & 0 \\ 0 & q'_{11} & 0 & q'_{13} \\ q'_{13} & 0 & q'_{11} & 0 \\ 0 & q'_{13} & 0 & q'_{11} \end{Vmatrix} = \frac{1}{3} \begin{Vmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} q_{11} & 0 & q_{13} & 0 \\ 0 & q_{11} & 0 & q_{13} \\ q_{13} & 0 & q_{11} & 0 \\ 0 & q_{13} & 0 & q_{11} \end{Vmatrix} \tag{7}$$

$$Q_\xi = \frac{1}{q'} \begin{Vmatrix} q'_{11} & q'_{12} & q'_{13} & q'_{13} & q'_{12} \\ q'_{12} & q'_{11} & q'_{12} & q'_{13} & q'_{13} \\ q'_{13} & q'_{12} & q'_{11} & q'_{12} & q'_{13} \\ q'_{13} & q'_{13} & q'_{12} & q'_{11} & q'_{12} \\ q'_{12} & q'_{13} & q'_{13} & q'_{12} & q'_{11} \end{Vmatrix} = \frac{1}{25} \begin{Vmatrix} 11 & 1 & -4 & -4 & 1 \\ 1 & 11 & 1 & -4 & -4 \\ -4 & 1 & 11 & 1 & -4 \\ -4 & -4 & 1 & 11 & 1 \\ 1 & -4 & -4 & 1 & 11 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{13} & q_{12} \\ q_{12} & q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{13} \\ q_{13} & q_{12} & q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{13} & q_{13} & q_{12} & q_{11} & q_{12} \\ q_{12} & q_{13} & q_{13} & q_{12} & q_{11} \end{Vmatrix} \tag{8}$$

Procena standardnog odstupanja jedinice težine na osnovu koje se procjenjuje standardno odstupanje nepoznatih, glasi

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{v_r^T\, p_r\, v_r}{n - \operatorname{rang} A_r}}, \quad \text{odnosno } \mu_0 = \sqrt{\frac{v_r^T\, v_r}{n - \operatorname{rang} A_r}} \tag{9}$$

2. ODREĐIVANJE KOTA REPERA NESLOBODNE MREŽE

Jednačine odstupanja glase

$$v = A\,x + B\,\xi + f \ldots p \tag{10}$$

gde su

$$v = \begin{Vmatrix} v_r \\ v_f \end{Vmatrix}; \quad A = \begin{Vmatrix} A_r \\ a_f \end{Vmatrix}; \quad B = \begin{Vmatrix} B_r \\ b_f \end{Vmatrix}; \quad f = \begin{Vmatrix} f_r \\ 0 \end{Vmatrix} \quad p \approx E; \quad x = \Delta H_A$$

$$B_r = \begin{Vmatrix} b_1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & b_2 \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 \dots & b_n \end{Vmatrix}; \quad A_r = \begin{Vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{Vmatrix} \quad \begin{matrix} f_f^T = \| f_1 \, f_2 \dots f_n \| \\ b_f = \| 1 \; 1 \dots 1 \| \\ a_f = 1 \end{matrix} \quad \xi^T = \| \Delta H_1 \, \Delta H_2 \dots \Delta H_n \|$$

$a_i = - b_i = \pm 1$
$i = 1, 2, \dots n$

Ovde se pošlo od toga, da se u praksi realizuje pravilnička odredba kojom se nalaže da reperi budu na međusobno podjednakom rastojanju.

U neslobodnoj mreži treba korigovati slobodne članove

$$\bar{f} = f + B \cdot \xi \tag{11}$$

otuda jednačine (10) glase

$$v = A\,x + \bar{f} \tag{12}$$

Korelaciona matrica se dobija iz (11)

$$Q_{\bar{f}} = Q_f + B\,Q_\xi\,B^T = p_f^{-1} + B\,Q_\xi\,B^T \approx E + B\,Q_\xi\,B^T \tag{13}$$

Nakon određivanja inverzne matrice matrice $Q_{\bar{f}}$, neophodno je rešiti normalne jednačine dobijene primenom u. m. n. k

$$R\,x + r = 0 \tag{14}$$

odavde

$$x = - R^{-1}\,r = - (A^T\,Q_{\bar{f}}^{-1}\,A)^{-1}\,A^T\,Q_{\bar{f}}^{-1}\,\bar{f} \tag{15}$$

Matrica koeficijenata težina je

$$Q_x = R^{-1} = (A^T\,Q_{\bar{f}}^{-1}\,A)^{-1} \tag{16}$$

Ukoliko se dokaže, a upravo je to i cilj, da je $A^T Q_{\bar{f}}^{-1} = A^T$, tada je u procesu izravnanja omogućeno, umesto zametnug postupka u. m. n. k, primeniti klasičan metod najmanjih kvadrata (k. m. n. k).

Kad se istovremeno određuju dva ili više repera neslobodne mreže ($H_A, H_B, \dots$) tada će i broj fiktivnih jednačina odstupanja biti adekvatan broju repera koji se istovremeno određuju.

Procena standardnog odstupanja jedinice težine glasi

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{v_r\,Q_{fr}^{-1}\,v_r}{n-1}}$$

dok procena standardnog odstupanja kote repera A iznosi

$$\mu_A = \mu_0 = \sqrt{Q_{HAHA}} = \sqrt{\frac{v_r^T\,Q_{fr}^{-1}\,v_r}{n-1} \cdot (A^T\,Q_{\bar{f}}^{-1}\,A)^{-1}} \tag{17}$$

Ako se izravnanje ostvaruje primenom k. m. n. k, tada važe jednačine (15), s tim što je

$$R = A^T A = n + 1; \quad r = A_r^T \bar{f}_r$$

$$\bar{x} = \Delta H_A = -\frac{1}{n+1} A_r^T \bar{f}_r$$

Procena standardnog odstupanja jedinice težine sada glasi

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{\bar{v}_r^T Q_{fr}^{-1} \bar{v}_r}{n - 1 + \operatorname{trag} Q_{fr}^{-1} B_r Q_\xi B_f^T - \operatorname{trag} Q_{fr}^{-1} B_r Q_\xi B_r^T Q_{fr}^{-1} A_r (A_r^T Q_{fr}^{-1} A)^{-1} A_r^T}}$$

Kako je

$$Q_{fr}^{-1} p_{fr} = E; \operatorname{trag} B_r Q_\xi B_r^T A_r (A_r^T A_r)^{-1} A_r^T = n^{-1}$$

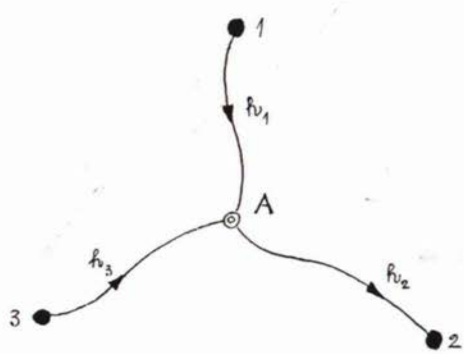
$$\mu_0 = \sqrt{\frac{\bar{v}_r^T \bar{v}_r}{\frac{1}{n}(n^2 - n - 1) + \operatorname{trag} B_r Q_\xi B_r^T}}$$

Procena standardnog odstupanja kote repera A iznosi

$$\mu_A = \sqrt{\frac{\bar{v}_r^T \bar{v}_r (n+1)^{-1}}{\frac{1}{n}(n^2 - n - 1) + \operatorname{trag} B_r Q_\xi B_r^T}} \qquad (17')$$

U nastavku se daju teorijski dokazi o identičnosti postupaka u.m. n. k. i k. m. n. k, pri određivanju najverovatnijih vrednosti kote repera A, kad se on određuje od tri, odnosno četiri repera slobodne mreže. Treba pokazati da korelaciona matrica Q_f^{-1}, određena primenom postupaka u. m. n. k, zadovoljava relaciju $A^T Q_f^{-1} = A^T$. Na taj način se, zaključivanjem posredstvom matematičke indukcije, obezbeđuje univerzalna primena izravnanja repera neslobodne mreže postupkom k. m. n. k.

2.1 *Odrediti korelacionu matricu* Q_f^{-1} *u procesu izravnanja kote repera* A, *kad se on određuje od datih repera* 1, 2 i 3, sl. 1



Sl. 1

Elementi jednačina odstupanja su

$$\mathbf{v}_r = \begin{Vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Vmatrix}; \; A_r = \begin{Vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Vmatrix}; \; B_r = \begin{Vmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{Vmatrix}; \; f_r = \begin{Vmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Vmatrix}; \; \xi = \begin{Vmatrix} \Delta H_1 \\ \Delta H_2 \\ \Delta H_3 \end{Vmatrix}; \; x = \Delta H_A$$

$$v_f = v_{fA} \qquad a_f = 1 \qquad b_f = \| 1\ 1\ 1 \| \qquad f_f = 0$$

Matrica $Q_{\bar{f}}$ se određuje na osnovu (13) i (6)

$$Q_{\bar{f}} = \begin{Vmatrix} q_{11}+1 & 0 & 0 & b_1 q_{11} \\ 0 & q_{11}+1 & 0 & b_2 q_{11} \\ 0 & 0 & q_{11}+1 & b_3 q_{11} \\ b_1 q_{11} & b_2 q_{11} & b_3 q_{11} & 3q_{11}+1 \end{Vmatrix}$$

Inverzna matrica matrice $Q_{\bar{f}}$ iznosi

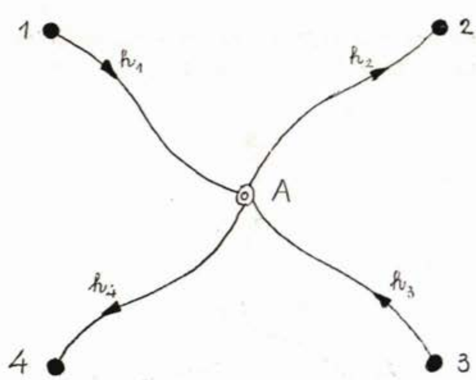
$$Q_{\bar{f}}^{-1} = \frac{1}{Q} \begin{Vmatrix} Q_{11} & a_1 a_2 Q_{12} & a_1 a_3 Q_{12} & a_1 Q_{13} \\ a_1 a_2 Q_{12} & Q_{11} & a_2 a_3 Q_{12} & a_2 Q_{13} \\ a_1 a_3 Q_{12} & a_2 a_3 Q_{12} & Q_{11} & a_3 Q_{13} \\ a_1 Q_{13} & a_2 Q_{13} & a_3 Q_{13} & Q_{33} \end{Vmatrix} \tag{18}$$

gde su

$$Q = (q_{11}+1)(4\,q_{11}+1); \quad Q_{11} = q_{11}^2 + 4\,q_{11} + 1; \quad Q_{12} = q_{11}^2$$
$$Q_{13} = (q_{11}+1)\,q_{11}; \; Q_{33} = (q_{11}+1)^2$$

Matrica (18) ima zaista kompenzacionu strukturu, obzirom da važi relacija $A^T Q_{\bar{f}}^{-1} = A^T$

2.2. *Odrediti korelacionu matricu* $Q_{\bar{f}}^{-1}$ *u procesu izravnanja kote repera* A, *kad se on određuje od datih repera* 1, 2, 3 i 4, sl. 2



Sl. 2

Elementi jednačina odstupanja su

$$v_r = \begin{Vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{Vmatrix}; \quad A_r = \begin{Vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Vmatrix}; \quad B_r = \begin{Vmatrix} b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_4 \end{Vmatrix}; \quad f_r = \begin{Vmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{Vmatrix}; \quad \xi = \begin{Vmatrix} \Delta H_1 \\ \Delta H_2 \\ \Delta H_3 \\ \Delta H_4 \end{Vmatrix}$$

$$v_f = v_{fA}; \qquad a_f = 1; \qquad b_f = \| 1\ 1\ 1\ 1 \|; \qquad x = \Delta H_A$$

Matrica $Q_{\bar{f}}$ se određuje na osnovu (13) i (7)

$$Q_{\bar{f}} = \begin{Vmatrix} q_{11}+1 & 0 & b_1 b_3 q_{13} & 0 & b_1(q_{11}+q_{13}) \\ 0 & q_{11}+1 & 0 & b_2 b_4 q_{13} & b_2(q_{11}+q_{13}) \\ b_1 b_3 q_{11} & 0 & q_{11}+1 & 0 & b_3(q_{11}+q_{13}) \\ 0 & b_2 b_4 q_{13} & 0 & q_{11}+1 & b_4(q_{11}+q_{13}) \\ b_1(q_{11}+q_{13}) & b_2(q_{11}+q_{13}) & b_3(q_{11}+q_{13}) & b_4(q_{11}+q_{13}) & 4(q_{11}+q_{13})+1 \end{Vmatrix}$$

Inverzna matrica matrice $Q_{\bar{f}}$ iznosi

$$Q_{\bar{f}}^{-1} = \frac{1}{Q} \begin{Vmatrix} Q_{11} & a_1 a_2 Q_{12} & a_1 a_3 Q_{13} & a_1 a_4 Q_{12} & a_1 Q_{14} \\ a_1 a_2 Q_{12} & Q_{11} & a_2 a_3 Q_{12} & a_2 a_4 Q_{13} & a_2 Q_{14} \\ a_1 a_3 Q_{13} & a_2 a_3 Q_{12} & Q_{11} & a_3 a_4 Q_{12} & a_3 Q_{14} \\ a_1 a_4 Q_{12} & a_2 a_4 Q_{13} & a_3 a_4 Q_{12} & Q_{11} & a_4 Q_{14} \\ a_1 Q_{14} & a_2 Q_{14} & a_3 Q_{14} & a_4 Q_{14} & Q_{44} \end{Vmatrix} \tag{19}$$

gde su

$$Q \ = (q_{11} - q_{31} + 1)(q_{11} + q_{13} + 1)[5(q_{11} + q_{13}) + 1]$$

$$Q_{11} = (q_{11}+1)(q_{11} + q_{13} + 1)[4(q_{11}+q_{13}) + 1] - (q_{11}+q_{13})^2 [3(q_{11}+1) + q_{13}]$$

$$Q_{12} = (q_{11} - q_{13} + 7)(q_{11} + q_{13})$$

$$Q_{13} = (q_{11} = q_{13})^2 [(q_{11} + 7) + 3q_{13}] - (q_{11} + q_{13} + 1)[4(q_{11} + q_{13}) + 1]\, q_{13}$$

$$Q_{14} = (q_{11} + q_{13})(q_{11} - q_{13} + 7)(q_{11} + q_{13} + 1)$$

$$Q_{14} = (q_{11} - q_{13} + 7)(q_{11} + q_{1} \ + 7)^2$$

Matrica (19), takođe, ima kompenzacione karakteristike obzirom da važi relacija $A^T Q_{\bar{f}}^{-1} = A^T$

ZAKLJUČAK

Primenom matematičke indukcije pokazuje se da formiranje fiktivne jednačine odstupanja pretstavlja potreban i dovoljan uslov da se greške datih veličina i njihove zavisnosti uzmu u obzir pri određivanju kota repera neslobodne mreže primenom k. m. n. k.

LITERATURA

[1] Mittermayer, E.: Zur Ausgleichung freier Netze, ZfV 1972. god

[2] Molnar, I.: Izravnanje nivelmanske mreže nižeg reda, Geodetski list 1979, 7—9, 201—210.

[3] Molnar, I.: Određivanje nadmorske visine repera mreže nižeg reda uzimanjem u obzir grešaka datih veličina, Geodetski list 1978, 7—9, 179—187.

REZIME

U radu se saopštava teorijski dokaz o tome, da se određivanje nepoznatih u neslobodnoj nivelmanskoj mreži, umesto zametnog postupka u. m. n. k, uvek može ostvariti primenom k. m. n. k. Dokaz je izveden primenom matematičke indukcije, tj. ustanovljena je tačnost formule $A^T Q_f^{-1} = A^T$ za slučaj određivanja nepoznatih od četiri data repera, kad je predhodno ova formula tačna pri određivanju nepoznatih od tri data repera.

ZUSAMMENFASSUNG

In diesem Ausatz wird ein theoretischer Beweis mitgeteilt, nach dem die Bestimmung von Unbekanten in angeschlossenen Nivellementsnetz statt mittels verallgemeinter Methode bereits mit klassischer Methode der kleinsten Quadrate durchführbar ist. Der Beweis ist durch Anwendung der mathematischen Induktion abgeleitet. Es ist die Gültigkeit der Formel $A^T Q_f^{-1} = A^T$ für die Bestimmung von Unbekanten aus vier gegebenen Höhenfesputnketn festgestellt. Dabei wird von dieser Formel ausgegangen, die die Gültigkeit für die Bestimmung der Unbekanten aus drei Festpunkten besitzt.

Primljeno: 10. XI 1979.