PRILOG IZRAVNANJU NIVELMANSKIH MREŽA PODELOM U REDOVE

Ivan MOLNAR — Novi Sad*

Pokretač ideje da se pri oceni tačnosti geodetskih mreža uzmu u obzir greške datih veličina, bio je Pranjis — Pranjević [5]. Kasnije je Hristov [1] predložio, da se pri oceni tačnosti geodetskih mreža uzmu u obzir ne samo greške datih veličina, nego i njihova zavisnost. Najzad, Mihailović je u niz radova (npr. u [2] i [3]) ukazao na potrebu, da se o greškama datih veličina i njihovoj zavisnosti vodi računa ne samo pri oceni tačnosti, nego i prilikom izravnanja geodetskih mreža.

U ovom radu se razmatra izravnanje mivelmanskih mreža podelom u redove, za slučaj kad se parcijalna izravnanja pojedinih redova mreža ostvaruju postupkom izravnanja mreža sa minimalnim tragom. Neophodno je da se ovim izravnanjima ostvare takvi rezultati, koji bi se dobili i tada, kad bi se cela mreža kompleksno (odjednom) izravnala. Treba naglasiti još i to, da se u nastavku izloženi postupak može primeniti i na sve druge vrste geodetskih mreža, a ne isključivo na nivelmanske mreže.

Neka je mreža podelena u dva reda, data mreža višeg reda (slobodna) i uvrštena (neslobodna), mada se izravnanje može uopštiti i na proizvoljan broj redova. Učiniće se uobičajena pretpostavka, da su sve merene veličine u oba reda homogene tačnosti. Ako merenja u mrežama nisu iste tačnosti, mogu se, neznatnom intervencijom, dovesti da budu homogene.

Obrazuju se jednačine odstupanja za celu mrežu

za slobodnu mrežu	$v_s = A_s x + f_s$	$\dots p_s$	(1)
za neslobodnu mrežu	$v_n = A_n x + B_n y + f_n$	$\dots p_n$	(2)
za dodatni uslov neslobodne mreže	$v_f = A_f x + B_f y + 0$	$\dots E$	(3)*
za dodatni uslov slobodne i neslobodne mreže	$v_{fk} = A_{fk} x + B_{fk} + 0$	$\dots 1$	(4)

gde su A_s, A_n, B_n, A_f i B_f matrice koeficijenata, A_{fk} i B_{fk} vektori koeficijenata, v_s, v_n, v_f i v_{fk} vektori popravaka, x i y vektori traženih veličina, a f_s i f_n vektori slobodnih članova.

---

* Adresa autora: Mr. Ivan Molnar, dipl. ing., Pokrajinska geodetska uprava, Novi Sad, Maršala Tita 16

* u slučaju kad neslobodna mreža sadrži samo jedan reper, tada je $A_{fk} = A_f$, $B_{fk} = B_f$ i $E = 1$

1. PRIVREMENO ODREĐIVANJE KOTA REPERA SLOBODNE MREŽE

Okolnost da se u praksi prethodno razvija slobodna, a tek zatim neslobodna mreža, uslovljava nezavisno razmatranje jednačina odstupanja slobodne mreže od ostalih jednačina odstupanja. Na taj način, izravnanjem se određuje vektor $\bar{x}$, različiti od vektora x, koji bi se dobio izravnanjem bez podele mreže u redove. Na osnovu toga, jednačine odstupanja (1) se mogu ovako prikazati

$$\bar{v}_s = A_s \bar{x} + f_s \qquad \ldots p_s \qquad (5)$$

Ako bi se jednačine odstupanja (5) parcijalno rešavale, normalne jednačine bi bile singularne. Otuda je neophodno, jednačinama odstupanja (5) priključiti fiktivnu jednačinu odstupanja (4) u kojoj, naravno, B_{fk} mora biti nula

$$\bar{v}_{fk} = A_{fk} \bar{x} + 0 \qquad \ldots 1 \qquad (6)$$

Parcijalne jednačine odstupanja za slobodnu mrežu, dakle, glase

$$\begin{Vmatrix} \bar{v}_s \\ \bar{v}_{fk} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} A_s \\ A_{fk} \end{Vmatrix} \bar{x} + \begin{Vmatrix} f_s \\ 0 \end{Vmatrix} \qquad \begin{Vmatrix} p_s & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

odnosno

$$\bar{v}_I = A_I \bar{x} + f_I \qquad p_I \qquad (7)$$

Normalne jednačine se dobijaju iz uslova minimuma

$$A_I^T p_I A_I \bar{x} + A_I^T p_I f_I = 0 \qquad (8)$$

odnosno

$$\| A_s^T \; A_{fk}^T \| \begin{Vmatrix} p_s & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} A_s \\ A_{fk} \end{Vmatrix} \bar{x} + \| A_s^T \; A_{fk}^T \| \begin{Vmatrix} p_s & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} f_s \\ 0 \end{Vmatrix} = 0$$

$$(A_s^T p_s A_s + A_{fk}^T) \bar{x} + A_s^T p_s f_s = 0$$

$$(N_s + e) \bar{x} + n_s = 0 \qquad (9)$$

gde je

$$e = A_{fk}^T A_{fk} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \\ . & . & \ldots & . \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{Vmatrix}$$

odavde

$$\bar{x} = -(N_s + e)^{-1} n_s \qquad (10)$$

Matrica koeficijenata težina je

$$Q_{\bar{x}} = N_I^{-1} = (N_s + e)^{-1} \qquad (11)$$

2. DEFINITIVNO ODREĐIVANJE KOTA REPERA NESLOBODNE MREŽE

U cilju određivanja vektora nepoznatih y, razmatraju se jednačine odstupanja (2) i (3) s tim, što u njima umesto vektora x, figurise gore određeni privremeni vektor $\bar{x}$.

Saglasno tome, jednačine odstupanja neslobodne mreže glase

$$v_{II} - B_{II}\, y + A_{II}\, \bar{x} + f_{II} \qquad p_{II} \tag{12}$$

gde su

$$v_{II} = \begin{Vmatrix} v_n \\ v_f \end{Vmatrix} \quad B_{II} = \begin{Vmatrix} B_n \\ B_f \end{Vmatrix} \quad A_{II} = \begin{Vmatrix} A_n \\ A_f \end{Vmatrix} \quad f_{II} = \begin{Vmatrix} f_n \\ 0 \end{Vmatrix} \quad p_{II} = \begin{Vmatrix} p_n & 0 \\ 0 & E \end{Vmatrix}$$

Korigovani vektor slobodnih članova je

$$\bar{f}_{II} = f_{II} + A_{II}\, \bar{x} \tag{13}$$

odavde

$$Q_{\bar{f}_{II}} = Q_{f_{II}} + A_{II}\, Q_{\bar{x}}\, A^T_{II} = p_{II}^{-1} + A_{II}\, Q_{\bar{x}}\, A^T_{II} \tag{14}$$

odnosno

$$Q^{-1}_{\bar{f}_{II}} = (p_{II}^{-1} + A_{II}\, Q_{\bar{x}}\, A^T_{II})^{-1} \tag{15}$$

Imajući u vidu (13) i (15), jednačine odstupanja (12) glase

$$V_{II} = B_{II}\, y + \bar{f}_{II} \ldots Q^{-1}_{\bar{f}_{II}} \tag{16}$$

Elementi vektora y se određuju minimiziranjem sume kvadrata popravaka

$$B^T_{II}\, Q^{-1}_{\bar{f}_{II}}\, B_{II}\, y + B^T_{II}\, Q^{-1}_{\bar{f}_{II}}\, \bar{f}_{II} = 0$$

odnosno

$$N_{II}\, y + n_{II} = 0 \tag{17}$$

odavde

$$y = -N_{II}^{-1}\, n_{II} \tag{18}$$

Matrica koeficijenata težina je

$$Q_y = N_{II}^{-1} = (B^T_{II}\, Q^{-1}_{\bar{f}_{II}}\, B_{II})^{-1} \tag{19}$$

Elementi vektora nepoznatih (18) dobijeni su primenom uopštene metode najmanjih kvadrata. Isti takvi rezultati bi se ostvarili i u slučaju da je izravnanje mreže izvršeno bez podele u redove. Otuda, vektor y predstavlja definitivnu vrednost. U nastavku treba odrediti i definitivne vrednosti vektora x. Međutim, neophodno je pre toga učiniti dve izuzetno značajne napomene.

2.1 Kad su reperi mreža na međusobno podjednakom rastojanju, pri izravnanju treba primeniti klasičnu, umesto uopštene metode najmanjih kvadrata. Na ovu okolnost je ukazano u [4], uz komentar, da u takvom slučaju uticaj grešaka datih veličina i njihove zavisnosti ne dolaze do izražaja pri izravnanju repera uvrštenih mreža, ali se pri oceni tačnosti pomenuti uticaj uzima u obzir na taj način, što se primenjuje korektivna formula.

2.2 Kad su reperi mreža na međusobno nejednakom rastojanju, takođe se izravnanje repera uvrštenih mreža, sa zadovoljavajućom tačnošću, može ostvariti primenom klasične metode najmanjih kvadrata. Ovo sa razloga, što je prethodno izravnanje repera slobodne mreže višeg reda ostvareno po postupku dodatne fiktivne jednačine odstupanja.

Prema izloženom, jednačine odstupanja (16) poprimaju izgled

$$v_{II} = B_{II}\, y + \bar{f}_{II} \quad \ldots\, p_{II} \tag{20}$$

Normalne jednačine dobijaju se primenom klasične metode najmanjih kvadrata

$$B_{II}^T p_{II} B_{II}\, y + B_{II}^T p_{II} \bar{f}_{II} = 0$$

odnosno

$$M_{II}\, y + m_{II} = 0 \tag{21}$$

odavde

$$y = -M_{II}^{-1} m_{II} \tag{22}$$

gde su

$$M_{II} = \| B_n^T B_f^T \| \begin{Vmatrix} p_n & 0 \\ 0 & E \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} B_n \\ B_f \end{Vmatrix} = B_n^T p_n B_n + B_f^T B_f = M_n + M_f$$

$$m_{II} = \| B_n^T B_f^T \| \begin{Vmatrix} p_n & 0 \\ 0 & E \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \bar{f}_n \\ \bar{f}_f \end{Vmatrix} = B_n^T p_n \bar{f}_n + B_f^T \bar{f}_f = \bar{m}_e + \bar{m}_f$$

Matrica koeficijenata težina je $\quad \bar{f}_n = f_n + A_n \bar{x} + \bar{f}_f = A_f \bar{x}$

$$Q_y = M_{II}^{-1} = (M_n + M_f)^{-1} \tag{23}$$

dok se procena standardnog odstupanja jedinice težine računa prema korektivnom izrazu

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{v_n^T p_n v_n}{F + \text{trag}\, p_n A_n Q_{\bar{x}} A_n^T - \text{trag}\, p_n A_n Q_{\bar{x}} A_n^T p_n B_n (B_n^T p_n B_n)^{-1} B_n^T}}$$

gde je $F = N - U$ broj stepeni slobode.

3. DEFINITIVNO ODREĐIVANJE KOTA REPERA SLOBODNE MREŽE

Vektor traženih veličina x određuje se na osnovu jednačina odstupanja (1), (2) i (3)

$$v_s = A_s x + f_s \quad \ldots\, p_s \tag{24}$$

$$v_n = A_n x + B_n y + f_n \quad \ldots\, p_n \tag{25}$$

$$v_f = A_f x + B_f y + 0 \quad \ldots\, E \tag{26}$$

odnosno

$$v_I = A_I x + f_I \quad \ldots\, p_I \tag{27}$$

gde su

$$v_I = \begin{Vmatrix} v_s \\ v_n \\ v_f \end{Vmatrix} \qquad A_I = \begin{Vmatrix} A_s \\ A_n \\ A_f \end{Vmatrix} \qquad f_I = \begin{Vmatrix} f_s \\ \bar{\bar{f}}_n \\ \bar{\bar{f}}_f \end{Vmatrix} \qquad p_I = \begin{Vmatrix} p_s & 0 & 0 \\ 0 & p_n & 0 \\ 0 & 0 & E \end{Vmatrix}$$

$$\bar{\bar{f}}_n = f_n + B_n\, y \quad \bar{\bar{f}}_f = B_f\, y$$

Obzirom da je vektor y u poglavlju 2. definitivno određen, sada se primenjuje klasična metoda najmanjih kvadrata, tj. iz uslova minimuma se obrazuju normalne jednačine

$$A_I^T p_I A_I x + A_I^T p_I f_I = 0$$

odnosno

$$N_I x + n_I = 0 \tag{28}$$

odavde

$$x = - N_I^{-1} n_I \tag{29}$$

gde su

$$N_I = \| A_s^T\ A_n^T\ A_f^T \| \begin{Vmatrix} p_s & 0 & 0 \\ 0 & p_n & 0 \\ 0 & 0 & E \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} A_s \\ A_n \\ A_f \end{Vmatrix} = A_s^T p_s A_s + A_n^T p_n A_n + A_f^T A_f = N_s + N_n + N_f$$

$$n_I = \| A_s^T\ A_n^T\ A_f^T \| \begin{Vmatrix} p_s & 0 & 0 \\ 0 & p_n & 0 \\ 0 & 0 & E \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} f_s \\ \bar{\bar{f}}_n \\ \bar{\bar{f}}_f \end{Vmatrix} = A_s^T p_s f_s + A_n^T p_n \bar{\bar{f}}_n + A_f^T \bar{\bar{f}}_f = m_s + \bar{\bar{n}}_n + \bar{\bar{n}}_f$$

Matrica koeficijenata težina iznosi

$$Q_x = N_I^{-1} = (N_s + N_n + N_f)^{-1} \tag{30}$$

dok se ocena tačnosti ostvaruje primenom korektivne formule.

4. KOMPLEKSNO ODREĐIVANJE KOTA REPERA SLOBODNE I NESLOBODNE MREŽE

Radi jednovremenog određivanja vektora nepoznatih x i y, razmatraju se jednačine odstupanja (1), (2) i (4)

$$\begin{Vmatrix} v_s \\ v_n \\ v_f \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} A_s & 0 \\ A_n & B_n \\ A_{fk} & B_{fk} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} f_s \\ f_n \\ 0 \end{Vmatrix} \ldots \begin{Vmatrix} p_s & 0 & 0 \\ 0 & p_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \tag{31}$$

ili kratko

$$v = L\, z + 1 \quad \ldots P \tag{32}$$

Iz uslova minimuma obrazuju se normalne jednačine

$$L^T P L z + L^T P 1 = 0$$

odnosno

$$N z + n = 0 \tag{33}$$

odavde

$$z = - N^{-1} n \tag{34}$$

gde su

$$N = \begin{Vmatrix} A_s^T & A_n^T & A_{fk}^T \\ 0 & B_n^T & B_{fk} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} p_s & 0 & 0 \\ 0 & p_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} A_s & 0 \\ A_n & B_{fk} \\ A_{fk} & B_{fk} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} A_s^T p_s A_s + A_n^T p_n A_a + A_{k}^T A_{fk} & A_n^T p_n B_n + A_{fk}^T B_{fk} \\ B_n p_n A_n + B_{fk}^T A_{fk} & B_n^T p_n B_n + B_{fk}^T B_{fk} \end{Vmatrix}$$

$$N = \begin{Vmatrix} N_1 + N & C_n + C_{fk} \\ C_n^T + C_{fk}^T & M_n + M_{fk} \end{Vmatrix} \qquad n = \begin{Vmatrix} A_s^T p_s f_s + A_n^T p_n f_n \\ B_n^T p_n f_n \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} n_s + n_n \\ m_n \end{Vmatrix}$$

Matrica koeficijenata težina je

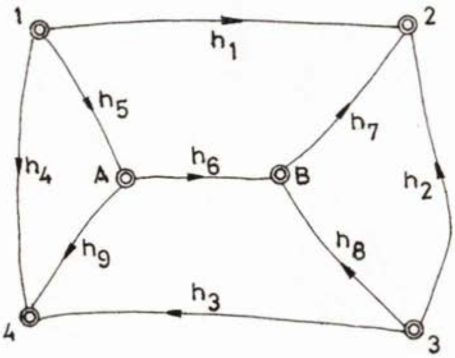
$$Q_z = N^{-1} = \frac{1}{(N_1 + N_n)(M_n + M_{fk}) - (C_n + C_{fk})(C_n^T + C_{fn}^T)} \begin{Vmatrix} M_n + M_{fk} & -(C_n^T + C_{fk}^T) \\ -(C_n + C_{fk}) & N_1 + N_n \end{Vmatrix}$$

5. BROJNI PRIMER

Odrediti kote repera mreže na sl. 1 tako što

— reperi 1, 2, 3 i 4 pripadaju slobodnoj a reperi A i B neslobodnoj mreži

— se reperi 1, 2, 3, 4, A i B kompleksno obuhvataju izravnanjem



Sl. 1

Približne vrednosti apsolutnih visina repera su

$$H_{01} = 1{,}000\ \text{m} \quad H_{02} = 3{,}000\ \text{m} \quad H_{03} = 0{,}000\ \text{m}$$

$$H_{04} = 2{,}000\ \text{m} \quad H_{0A} = 1{,}500\ \text{m} \quad H_{0B} = 2{,}000\ \text{m}$$

Merene visinske razlike između repera iznose

$$h_1 = 2{,}000\ \text{m} \quad h_2 = 3{,}021\ \text{m} \quad h_3 = 1{,}990\ \text{m} \quad h4 = 1{,}000$$

$$h_5 = 0{,}504\ \text{m} \quad h_6 = 0{,}492\ \text{m} \quad h_7 = 1{,}004\ \text{m} \quad h_8 = 2{,}000\ \text{m} \quad h_9 = 0{,}496\ \text{m}$$

Rastojanja između repera iznose

$$s_{12} = 6\ \text{km} \quad s_{23} = 3\ \text{km} \quad s_{34} = 4\ \text{km} \quad s_{41} = 3\ \text{km}$$

$$s_{A1} = 2\ \text{km} \quad s_{AB} = 2\ \text{km} \quad s_{B2} = 3\ \text{km} \quad s_{B3} = 2\ \text{km} \quad s_{A4} = 3\ \text{km}$$

Najpre treba klasifikovati jednačine odstupanja za

— slobodnu mrežu

$$v_1 = -\Delta H_1 + \Delta H_2 + f_1 \quad \dots p_1$$
$$v_2 = \Delta H_2 - \Delta H_3 + f_2 \quad \dots p_2$$
$$v_3 = -\Delta H_3 + \Delta H_4 + f_3 \quad \dots p_3$$
$$v_4 = \Delta H_1 + \Delta H_4 + f_4 \quad \dots p_4$$

— neslobodnu mrežu

$$v_5 = -\Delta H_1 + \Delta H_A + f_5 \quad \dots p_5$$
$$v_6 = -\Delta H_A + \Delta H_B + f_6 \quad \dots p_6$$
$$v_7 = \Delta H_2 - \Delta H_B + f_7 \quad \dots p_7$$
$$v_8 = -\Delta H_3 + \Delta H_B + f_8 \quad \dots p_8$$
$$v_9 = \Delta H_4 - \Delta H_A + f_9 \quad \dots p_9$$

— dodatni uslov neslobodne mreže

$$v_{f_A} = \Delta H_1 + \Delta H_4 + \Delta H_A + 0 \quad \dots 1$$
$$v_{f_B} = \Delta H_2 + \Delta H_3 + \Delta H_B + 0 \quad \dots 1$$

— dodatni uslov slobodne i neslobodne mreže

$$v_{fk} = \Delta H_1 + \Delta H_2 + \Delta H_3 + \Delta H_4 + \Delta H_A + \Delta H_B + 0 \quad \dots 1$$

Obrazujmo matrice i vektore

$$A_s = \begin{Vmatrix} -1 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & +1 \\ -1 & 0 & 0 & +1 \end{Vmatrix} \quad f_s = \begin{Vmatrix} 0 \\ -21 \\ +10 \\ 0 \end{Vmatrix} \quad p_s = \begin{Vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{Vmatrix}$$

$$A_n = \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{Vmatrix} \quad B_n = \begin{Vmatrix} +1 & 0 \\ -1 & +1 \\ 0 & -1 \\ 0 & +1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix} \quad f_n = \begin{Vmatrix} -4 \\ +8 \\ -4 \\ 0 \\ +4 \end{Vmatrix} \quad p_n = \begin{Vmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{Vmatrix}$$

$$A_f = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{Vmatrix} \quad Bf = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \quad f_f = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \end{Vmatrix} \quad p_f = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

$$A_{fk} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix} \quad B_{fk} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \end{Vmatrix} \quad f_{fk} = 0 \quad p_{fk} = 1$$

Shodno (10), odredimo vrednost privremenog vektora $\bar{x}$

$$N_s = A_s^T p_s A_s = \begin{Vmatrix} +6 & -2 & 0 & -4 \\ -2 & +6 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & +7 & -3 \\ -4 & 0 & -3 & +7 \end{Vmatrix} \quad a = A_{fk}^T A_{fk} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$$

$$N_1 = \begin{Vmatrix} +7 & -1 & +1 & -3 \\ -1 & +7 & -3 & +1 \\ +1 & -3 & +8 & -2 \\ -3 & +1 & -2 & +8 \end{Vmatrix} \quad N_1^{-1} = \begin{Vmatrix} 0{,}171875 & 0{,}015625 & 0 & 0{,}062500 \\ 0{,}015625 & 0{,}171875 & 0{,}062500 & 0 \\ 0 & 0{,}062500 & 0{,}156250 & 0{,}031250 \\ 0{,}062500 & 0 & 0{,}031250 & 0{,}156250 \end{Vmatrix}$$

$$n_s = A_s^T p_s f_s = \begin{Vmatrix} 0 \\ -34 \\ +54 \\ +30 \end{Vmatrix} \quad \bar{x} = -N_1^{-1} n_s = \begin{Vmatrix} -0{,}5625 \\ +11{,}0625 \\ -4{,}125 \\ -6{,}375 \end{Vmatrix}$$

Korigujmo slobodne članove prema (13)

$$\bar{f}_{II}^{T} = \| -3{,}4375 + 8 + 7{,}0625 + 4{,}125 - 2{,}375 - 6{,}9375 + 6{,}9375 \|$$

i obrazujmo matrice (14) i (15)

$$Q_{\bar{f}} = \begin{Vmatrix} +0{,}3385417 & 0 & -0{,}015625 & 0 & -0{,}06250 & -0{,}234375 & -0{,}015625 \\ 0 & +0{,}1666667 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}015625 & 0 & 0{,}421875 & -0{,}062500 & 0 & +0{,}015625 & +0{,}234375 \\ 0 & 0 & -0{,}062500 & +0{,}3229167 & -0{,}03125 & -0{,}031250 & -0{,}218750 \\ -0{,}062500 & 0 & 0 & -0{,}031250 & +0{,}40625 & +0{,}218750 & +0{,}031250 \\ -0{,}234375 & 0 & 0{,}015625 & -0{,}031250 & +0.21875 & +1{,}453125 & +0{,}046875 \\ -0{,}015625 & 0 & 0{,}234375 & -0{,}218750 & +0{,}03125 & +0{,}046875 & +1{,}453125 \end{Vmatrix}$$

$$Q_{\bar{f}_{II}}^{-1} = \begin{Vmatrix} 2{,}7140098 & 0 & 0{,}0926283 & 0{,}0833655 & 0{,}2037823 & -0{,}4075646 & 0{,}0092628 \\ 0 & +5{,}9999998 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}1171828 & 0 & 2{,}6265721 & 0{,}2535700 & 0{,}0681138 & -0{,}0017035 & -0{,}3856187 \\ 0{,}0528221 & 0 & 0{,}2517734 & 3{,}4955612 & 0{,}2228669 & 0{,}0319408 & 0{,}4803497 \\ 0{,}7140366 & 0 & 0{,}0836849 & 0{,}2408336 & 2{,}7496240 & -0{,}2938554 & -0{,}0192177 \\ -0{,}546018 & 0 & -0{,}0379364 & 0{,}0072366 & -0{,}4420807 & 0{,}6675628 & -0{,}0106902 \\ 0{,}020492 & 0 & -0{,}3853192 & 0{,}4807989 & -0{,}0201161 & -0{,}0057493 & 0{,}8235370 \end{Vmatrix}$$

Sračunajmo vektor nepoznatih y prema (18)

$$N_{II} = B_{II}^{T} Q_{\bar{f}_{II}}^{-1} B_{II} = \begin{Vmatrix} 10{,}9957300 & -6{,}103448 \\ -6{,}1506105 & 14{,}172412 \end{Vmatrix} \qquad n_{II} = B_{II}^{T} Q_{\bar{f}_{II}}^{-1} \bar{f}_{II} = \begin{Vmatrix} -50{,}445 \\ +55{,}222 \end{Vmatrix}$$

$$y = -N_{II}^{-1} n_{II} = \begin{Vmatrix} 0{,}1198045 & 0{,}0519933 \\ 0{,}0515946 & 0{,}0929509 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} +50{,}445 \\ -55{,}221 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} +3{,}17 \\ -2{,}53 \end{Vmatrix}$$

Odredimo vektor y i primenom klasične metode najmanjih kvadrata, radi provere primedbe 2.2

Na osnovu (22) dobija se

$$M_{II} = B_{II}^{T} p_{II} B_{II} = \begin{Vmatrix} 17 & -6 \\ -6 & 17 \end{Vmatrix} \qquad m_{II} = B_{II}^{T} p_{II} \bar{f}_{II} = \begin{Vmatrix} -66{,}0625 \\ +51{,}4375 \end{Vmatrix}$$

$$y = -M_{II}^{-1} m_{II} = \begin{Vmatrix} 0{,}0671936 & 0{,}0237154 \\ 0{,}0237514 & 0{,}0671936 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} +66{,}0625 \\ -51{,}4375 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} +3{,}22 \\ -1{,}90 \end{Vmatrix}$$

Odredimo definitivnu vrednost vektora x prema (29)

$$N_{I} = \begin{Vmatrix} +7 & -1 & +1 & -3 \\ -1 & +7 & -3 & +1 \\ -1 & -3 & +8 & -2 \\ -3 & -1 & -2 & +8 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} +14 & -1 & +1 & -2 \\ -1 & +12 & -2 & +1 \\ +1 & -2 & +12 & -2 \\ -2 & +1 & -2 & +13 \end{Vmatrix} \qquad \bar{\bar{f}}_{f} = \begin{Vmatrix} +3{,}17 \\ -2{,}53 \end{Vmatrix}$$

$$\bar{\bar{f}}_{n} = f_{n} + B_{n} y = \begin{Vmatrix} -0{,}83 \\ +2{,}30 \\ -1{,}47 \\ -2{,}53 \\ +0{,}83 \end{Vmatrix} \qquad n_{I} = \begin{Vmatrix} 0 \\ -84 \\ +54 \\ +30 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} +4{,}98 \\ -5{,}88 \\ +15{,}18 \\ +3{,}32 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} +3{,}17 \\ -2{,}53 \\ -2{,}53 \\ +3{,}17 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} +8{,}15 \\ -92{,}41 \\ +66{,}65 \\ +36{,}49 \end{Vmatrix}$$

$$N_{I}^{-} = \begin{Vmatrix} 0{,}0734372 & 0{,}0047710 & -0{,}0028626 & 0{,}0104961 \\ 0{,}0047710 & 0{,}0858444 & 0{,}0105619 & -0{,}0042445 \\ -0{,}0028626 & 0{,}0105619 & 0{,}0695248 & 0{,}0094423 \\ 0{,}0104961 & -0{,}0042445 & 0{,}0094423 & 0{,}0803171 \end{Vmatrix} \qquad x = -N_{I}^{-1} n_{I} = \begin{Vmatrix} -0{,}35 \\ +7{,}40 \\ -3{,}98 \\ -4{,}04 \end{Vmatrix}$$

I najzad odredimo vektor nepoznatih z, primenom jednovremenog izravnanja slobodne i neslobodne mreže.

Shodno (34) imamo da je

$$N = \begin{Vmatrix} N_1 + N_n & C_n + C_{fk} \\ C_n^T + C_k^T & M_n + M_{fk} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} +13 & -1 & +1 & -3 & -5 & +1 \\ -1 & +11 & -3 & +1 & +1 & -3 \\ +1 & -3 & +14 & -2 & +1 & -5 \\ -3 & +1 & -2 & +12 & -3 & +1 \\ -5 & +1 & +1 & -3 & +17 & -5 \\ +1 & -3 & -5 & +1 & -5 & +17 \end{Vmatrix}$$

$$N^{-1} = \begin{Vmatrix} 0{,}0982913 & 0{,}0023220 & -0{,}0036924 & 0{,}0324219 & 0{,}0353050 & 0{,}0020186 \\ 0{,}0023220 & 0{,}1083890 & 0{,}0326013 & -0{,}0054443 & -0{,}0000782 & 0{,}0288769 \\ -0{,}0036924 & 0{,}0326013 & 0{,}0917251 & 0{,}0096470 & 0{,}0030946 & 0{,}0332910 \\ 0{,}0324219 & -0{,}0055443 & 0{,}0096470 & 0{,}1002226 & 0{,}0276214 & 0{,}0021979 \\ 0{,}0353050 & -0{,}0000782 & 0{,}0030946 & 0{,}0276214 & 0{,}0799996 & 0{,}0207241 \\ 0{,}0020186 & 0{,}0288767 & 0{,}0332910 & 0{,}0021979 & 0{,}0207241 & 0{,}0795582 \end{Vmatrix}$$

$$n = \begin{Vmatrix} n_s + n_n \\ m_n \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} +24 \\ -100 \\ +54 \\ +46 \\ -88 \\ +64 \end{Vmatrix} \qquad Z = -N^{-1} n = \begin{Vmatrix} -0{,}44 \\ +7{,}42 \\ -3{,}91 \\ -4{,}16 \\ +3{,}42 \\ -2{,}33 \end{Vmatrix}$$

Upoređivanjem rezultata dobijenih primenom parcijalnih izravnanja (kad je mreža podeljena u redove) sa rezultatima ostvarenim kompleksnim izravnanjem (bez podele u redove), se može zaključiti da se oni, unutar granica tačnosti računanja, dobro slažu.

LITERATURA

[1] Hristov: Vlijanije ošibok v ishodnyh dannyh na točnost rezultatov uravnovešivanija po metodu naimenših kvadratov, Sofija 1965.

[2] Mihailović: Nov prilog izravnanju i ocenu tačnosti geodetskih mreža, Zbornik geodetskog instituta br. 10, Beograd 1969.

[3] Mihailović: Izravnanje i ocena tačnosti geodetskih mreža nižeg reda, Zbornik geodetskog instituta br. 11, Beograd 1970.

[4] Molnar: Određivanje kota repera neslobodne mreže, Geodetski list br. 4—6, Zagreb 1979.

[5] Pranis-Pranevič: Opredelenie srednej kvadratičeskoj ošibok funkcii s učetom ošibok ishodnyh dannyh pri uravnivanie po sposobu naimenših kvadratov, Sbornik isledovanie po Geodezii, CNIGAiK, Moskva 1939.

REZIME

U radu je izložen nov način određivanja mreža repera klasifikovanih u redove. Primenjena je metoda posrednih merenja, po tzv. postupku dodatnih fiktivnih jednačina odstupanja. Akcent je stavljen na veoma značajnu osobinu kojom se odlikuje predloženi način izravnanja, koji dopušta mogućnost da se

pri određivanju nepoznatih u neslobodnoj mreži izbegne zametan postupak uopštene metode najmanjih kvadrata. Ovo ne samo tada, kad su reperi na međusobno podjednakom rastojanju, što je prikazano u [4], nego i u razmatranom slučaju, kad su reperi na međusobno nejednakom rastojanju. Međutim, pri oceni tačnosti treba uzeti u obzir uticaj grešaka datih veličina i njihove zavisnosti, što se i čini, primenom korektivne formule.

Izvedeni izrazi u radu su ilustrovani brojnim primerom.

ZUSAMMENFASSUNG

In diesem Aufsatz ist eine neue Methode zur Netz bestimmung, in Ordnungen aufgeteilten Höhenfestpunkten, beschrieben. Die Methode vermittelnder Beobachtungen wurde angewandt und das nach dem Verfahren von zusätzlichen fiktiven Verbesserungsgleichungen. Bei der Bestimmung von Unbekanten in nicht freien Netzen besteht nach diesem Verfahren die Möglichkeit umfangreiche Berechnungen nach der verallgemeinerten Methode der kleinsten Quadrate zu vermeiden. Und das nicht nur in dem Fall, wenn zwischen den Höhenfestpunkten die gleiche Entfernung ist (wie in [4]) sondern auch wenn die Höhenfestpunkte nicht gleich entfernt sind. Bei der Genauigkeits abschätzung muss man den Einfluss der gegebenen Grössen und ihre Korrelation berücksichtigen, was mit der Anwendung der Korrekturformel gemacht wird.

Das Verfahren ist mit einem numerischen Beispiel illustriert.