RAČUNANJE GEOGRAFSKE ŠIRINE IZ ZNANE DOLŽINE LOKA POLDNEVNIKA

*Andrej BRVAR — Ljubljana**

Pri geodetskih delih v prosti coni Sežana je mešana italijansko-jugoslovanska tehnična komisija predpisala mednarodni Luzerski elipsoid. Pri izravnavi mreže tega področja je potrebno iz znane koordinate X izračunati geografsko širino. Na GZ SRS izravnavamo mreže s pomočjo računalnika, zato je bilo potrebno za ta problem najti ustrezno učinkovito rešitev. Vpričujočem sestavku navajamo eno od možnih rešitev tega problema. Metodo smo v celoti priredili za računanje na elektronskem računalniku. Za primerjavo navajamo poleg vrednosti parametrov in vrednosti geografskih širin za izbrane X Luzerskega elipsoida tudi parametre in vrednosti geografskih širin za izbrane X Besselovega elipsoida.

Najprej si oglejmo obratno nalogo, to je računanje dolžine loka elipsoida iz znane geografske širine. Funkcijsko zvezo med tema dvema spremenljivkama predstavlja naslednji izraz:

$$S(\varphi) = C \cdot \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1 + e'^2 \cdot \cos^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} \tag{1}$$

s — dolžina loka na elipsoidu; φ — geografska širina.

Problem uženemo tako, da izraz pod integralskim znakom razvijemo v binomsko vrsto, preuredimo izraze, tako da je končni rezultat tale zveza:

$$S(\varphi) = C \cdot \left(c_0 \cdot \varphi + \frac{1}{2} c_2 \cdot \sin 2\varphi + \frac{1}{4} c_4 \cdot \sin 4\varphi + \frac{1}{6} c_6 \cdot \sin 6\varphi + \frac{1}{8} c_8 \cdot \sin 8\varphi + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{10} c_{10} \cdot \sin 10\varphi\right) \tag{2}$$

Naloga, ki smo si jo postavili na začetku pa zahteva da za dano dolžino luka $S = S_0$ poiščemo ustrezno geografsko širino $\varphi = \varphi_0$. Označimo u (2) izraz na desni z $g(\varphi)$ pa je pred nami naloga

$$S_0 = g(\varphi)$$

To pak lahko zapišemo na nekoliko drugačen način

$$g(\varphi) - S_0 = 0$$

* Adresa autora: Andrej Brvar, dipl. inž. matem. Inštitut Geodetskega zavoda SRS, Ljubljana, Šaranovićeva 12

Ta enačba predstavlja problem reševanja nelinearnih enačb. Iščemo torej ničlo funkcije

$$p(\varphi) \equiv g(\varphi) - S_o = 0$$

$$g(\varphi_o) - S_o \Leftrightarrow p(\varphi_o) = 0$$

Za rečevanje nelinearnih enačb tipa

$$f(x) = 0$$

je izdelanih več metod. Pri reševanju našega problema bomo uporabili iterativno tangentno metodo. Približke za ničlo funkcije iščemo pri tangentni metodi po pravilu

$$x_{r+1} = x_r - \frac{f(x_r)}{f'(x_r)}, \quad r = 0, 1, 2, \cdots$$

Metoda nam zagotavlja v našem primeru kvadratično konvergenco.

RAČUNSKI POSTOPEK ZA ISKANJE GEOGRAFSKE ŠIRINE

Funkcijo, katere ničlo iščemo predstavlja pri nas izraz

$$p(\varphi) \equiv g(\varphi) - S_o$$

Približke za geografsko širino tvorimo po nasljednjem pravilu

$$\varphi_{r+1} = \varphi_r - \frac{g(\varphi_r) - S_o}{g'(\varphi_1)}, \quad r = 0, 1, 2, \cdots \qquad (3)$$

Za začetni približek φ_0 vzamemo katerokoli vrednost z interval $\varphi_0 \in [0, \Pi/2]$. Običajno vzamemo za začetni približek eno od krajišč tega intervala ali pa

$$\varphi_o = \frac{S_o}{C}$$

Vstavimo v (3) izraze na $g(\varphi)$ in $g'(\varphi)$.

$$\varphi_{r+1} = \varphi_r - \qquad (4)$$

$$- \frac{c_o \cdot \varphi_r + \frac{1}{2} c_2 \sin \cdot 2\varphi_r + \frac{1}{4} c_4 \cdot \sin 4\varphi_r + \frac{1}{6} c_6 \cdot \sin 6\varphi_r + \frac{1}{8} c_8 \cdot \sin 8\varphi_r + \frac{1}{10} c_{10} \cdot \sin 10\varphi_r - \frac{S_o}{c}}{c_o + c_2 \cdot \cos 2\varphi_r + c_4 \cdot \cos 4\varphi_r + c_6 \cdot \cos 6\varphi_r + c_8 \cos 8\varphi_r + c_{10} \cdot \cos 10\varphi_r}$$

Iteracijo ponavljamo tako dolgo, da sta dva sosednja približka dovolj blizu

$$|\varphi_{n+1} - \varphi_n| \leq |10^{-k}$$

K izberemo sami, odvisno od zahtevane natančnosti. Opisano metodo smo na Inštitutu Geodetskega zavoda SRS preiskušali na računalniku PDP 11/45. Za rezultate, ki so bili natančni do 10^{-5} so bili potrebni 3 iteracijski koraki. V nadaljevanju sestavka je tudi tabela izračunanih vrednosti geografskih širin po navedenem postopku.

BESSELOV ELIPSOID

Besselov elipsoid sta nam definirala dva parametra

$$a = 6\,377\,397{,}155 \text{ m}$$

$$\mu = 1/299{,}1528\,1285$$

Ostale parametre in koeficiente trigonometrične vrste smo računali s pomočjo računalnika PDP 11/45.

$$e'^2 = 0{,}00671\,92187\,98046$$

$$c = 6\,398\,786{,}8481 \text{ m}$$

Koeficienti trigonometrične vrste (2) so za ta elipsoid nasljednji:

$$C_0 = 0{,}99499\,21245\,07971$$
$$C_2 = -0{,}00499\,73968\,22814$$
$$C_4 = 0{,}00001\,04582\,03526$$
$$C_6 = -0{,}00000\,00204\,27152$$
$$C_8 = 0{,}00000\,00000\,38465$$
$$C_{10} = -0{,}00000\,00000\,00072$$

LUZERNSKI ELIPSOID

V Zürichu so 1967 na zasedanju Mednarodne geodetsko-geofizikalne zveze priporočili za zemeljski elipsoid nasljednje parametre:

$$a = 6\,378\,160 \text{ m}$$

$$\mu = 1/298{,}2472$$

Iz teh dveh osnovnih parametrov smo izračunali še ostale potrebne konstante:

$$e'^2 = 0{,}00673\,97243\,88531$$

$$c = 6\,399\,617{,}4267$$

Koeficienti trigonometrične vrste so za mednarodni elipsoid nasljednji:

$$C_0 = 0{,}99497\,69374\,78359$$
$$C_2 = -0{,}00501\,25201\,10966$$
$$C_4 = 0{,}00001\,05217\,57872$$
$$C_6 = -0{,}00000\,00206\,13795$$
$$C_8 = 0{,}00000\,00000\,38934$$
$$C_{10} = -0{,}00000\,00000\,00074$$

PRIMER

Za primer navajamo tabelo geografskih širin izračunanih iz dolžine loka elipsoida po opisani metodi. Vrednosti so navedene za Besselov in mednarodni elipsoid v intervalu od 5000 km — 5150 km s korakom po 10 km.

	Besselov elipsoid	Mednarodni elipsiod
5000 km	45° 8' 24,12377"	45° 8' 7,14820"
5010 km	45° 13' 48,08894"	45° 13' 31,07652"
5020 km	45° 19' 12,04900"	45° 18' 54,99973"
5030 km	45° 24' 36,00395"	45° 24' 18,91780"
5040 km	45° 29' 59,95378"	45° 29' 42,83075"
5050 km	45° 35' 23,89852"	45° 35' 6,73858"
5060 km	45° 40' 47,83813"	45° 40' 30,64128"
5070 km	45° 46' 11,77264"	45° 45' 54,53886"
5080 km	45° 51' 35,70205"	45° 51' 18,43132"
5090 km	45° 56' 59,62634"	45° 56' 42,31865"
5100 km	46° 2' 23,54552"	46° 2' 6,20086"
5110 km	46° 7' 47,45960"	46° 7' 30,07795"
5120 km	46° 13' 11,36857"	46° 12' 53,94992"
5130 km	46° 18' 35,27244"	46° 18' 17,81677"
5140 km	46° 23' 59,17120"	46° 23' 41,67850"
5150 km	46° 29' 23,06486"	46° 29' 5,53512"

ZAKLJUČEK

V fazi reševanja problema smo preiskusili več metod. Na voljo imamo namreč več načinov za razvoj funkcije pod integralskim znapom (1) v vrsto. Za najbolj udoben in stabilen razvoj se je izkazal razvoj v binomsko vrsto. Poskusili smo tudi z razvojem funkcije v Mac Laurinovo vrsto in pa z aproksimacijo z Čebiševa polinomi, vendar sta imela ta dva razvoja več pomanjkljivosti kot prednosti pred razvojem v binomsko vrsto.

Literatura

[1] Bohte, Z.: Numerična anliza. Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko, Ljubljana 1973.

[2] Čubranić, N.: Viša geodezija II. dio, Tehnička knjiga, Zagreb 1974.

[3] Isaacson, H. B., E. Keller: Analysis of numerical methodes. John Wiley, & Sons, 1966,

IZVLEČEK

Pri izravnavi mreže je potrebno iz znane koordinate X izračunati geografsko širino. V sestavku je opisana ena od primernih metod, uporabnih za računanje z računalnikom. Sestavni del prispevka so parametri in pa koeficienti trigonometrične vrste Besselovega in Luzernskega elipsoida. Kot primer je navedena tabela geografskih širin izračunanih po opisanem postopku v intervalu od 5000 — 5150 km.

ZUSAMMENFASSUNG

Bei der Netzausgleichung ist es notwendig die geographische Breite aus der X-Koordinate zu berechnen. In diesem Aufsatz ist eine, für die Computerberechnungen geeignete Methode, beschrieben. Die Parameter und die Koeffizienten der trigonometrischen Reihe für Bessell — und Luzern — Ellipsoid sind gegeben. Als Beispiel sind, nach diesem Verfahren berechnete geographische Breiten im Intervall von 5000 bis 5150 Km gegeben.

RAČUNANJE GEOGRAFSKE ŠIRINE IZ POZNATE DUŽINE LUKA MERIDIJANA*

Andrej BRVAR — Ljubljana

Za geodetske radove u slobodnoj zoni Sežane propisala je talijansko-jugoslavenska mješovita komisija Luzernski elipsoid. Za izjednačenje mreže tog područja bilo je potrebno da se iz poznate koordinate X izračuna geografska širina. U GZ SRS izjednačuju se mreže na kompjutoru, pa je zato bilo potrebno da se za taj problem nađe odgovarajuće pogodno rješenje. U ovom članku daje se jedno od mogućih rješenja tog problema. Metoda je u cjelosti razrađena za računanje na elektronskom računaru. Kao primjer daju se osim vrijednosti parametara i geografskih širina za odabrane X Luzernskog elipsoida, također i parametri i geografske širine za odabrane X Besselovog elipsoida.

Najprije će se razmotriti obrnuti zadatak, t.j. računanje dužine luka meridijana iz poznate geografske širine. Funkcionalna povezanost između tih dviju promjenljivih veličina predstavlja slijedeći izraz:

original formula (1)

gdje je S — dužina luka na elipsoidu, a φ je geografska širina.

Problem se rješava tako, da se izraz pod integralnim znakom razvije u binomni red, tako da konačni rezultat bude:

original formula (2)

Zadatak, koji se na početku postavio zahtjeva da se za datu dužinu luka $S = S_0$ potraži odgovarajuća geografska širina $\varphi = \varphi_0$. Ako se u formuli (2) izraz na desnoj strani označi sa $g(\varphi)$ zadatak će tada biti:

$$S_0 = g(\varphi)$$

koji se može napisati na nešto drugačiji način:

$$g(\varphi) - S_0 = 0$$

Ova jednadžba predstavlja problem rješavanja nelinearnih jednadžbi. Prema tome traži se nula funkcije

$$p(\varphi) \equiv g(\varphi) - S_0 = 0$$

$$g(\varphi_0) \equiv S_0 \Leftrightarrow p(\varphi_0) = 0$$

Za rješavanje nelinearnih jednađbi tipa

---

* *Ovo je prijevod članka Andreja Brvara: »Računanje geografske širine iz znane dolžine loka podldnevnika« (str. 192—196) na hrvatski ili srpski jezik.*

$$f(X) = 0$$

postoji više razrađenih metoda. Pri rješavanju ovog problema koristit će se tangentna iterativna metoda. Približne vrijednosti za nulu funkcije će se tražiti u tangentnoj metodi prema pravilu

$$X_{r+1} = X_r - \frac{f(X_r)}{f'(X_r)} \quad \text{gdje je } _{r=0,1,2,\ldots}$$

Ova metoda daje u našem primjeru kvadratnu konvergenciju.

RAČUNSKI POSTUPAK ZA ODREĐIVANJE GEOGRAFSKE ŠIRINE

Funkciju, čija se nula traži predstavlja u nas izraz

$$p(f) \equiv g(\varphi) - S_0$$

Približne veličine za geografsku širinu dobivaju se prema slijedećem pravilu

formula (3)

Za početnu približnu veličinu φ_0 uzima se bilo koja vrijednost iz intervala $\varphi_0 \in (0, \Pi/2)$. Obično se za ovu veličinu uzima jedan od krajnjih veličina ovoga intervala

$$\varphi_0 = \frac{S_0}{c}$$

U formuli (3) postave se izrazi za $g(\varphi)$ i $g'(\varphi)$.

formula (4)

Iteracije se ponavljaju toliko puta dok dvije susjedne približne veličine budu dovoljno bliske

$$|\varphi_{n+1} - \varphi_n| \leq 10^{-k}$$

Veličina k se izabere u ovisnosti od tražene tačnosti. Opisana metoda je ispitivana u Institutu geodetskog zavoda SRS na računalu PDP 11/45. Za tačnost rezultata do 10^{-5}", bila su potrebna tri iteraciona koraka. Tabela izračunatih vrijednosti geografskih širina po navedenom postupku, data su u prilogu.

BESSELOV ELIPSOID

Besselov elipsoid definiraju slijedeća dva parametra

$$a = 6\,377\,397{,}155 \text{ m}$$

$$\mu = 1/299{,}1528\,1285$$

Ostale parametre i koeficijente trigonometrijskog reda računali su se na računaru PDP 11/45.

$$e'^2 = 0{,}00671\ 92187\ 98046$$

$$c = 6\ 398\ 786{,}8481 \text{ m}$$

Koeficijenti trigonometrijskog reda (2) su za taj elipsoid slijedeći:

(vidi original)

LUCERNSKI ELIPSOID

U Zürichu su 1967. na zasjedanju Međunarodne geodetske i geofizičke Unije preporučeni za zemaljski elipsoid slijedeći parametri:

$$a = 6\ 378\ 160 \text{ m}$$

$$\mu = 1/289{,}2472$$

Iz ta dva osnovna parametra izračunate su ostale potrebne konstante

$$e'^2 = 0{,}00673\ 97243\ 88531$$

$$c = 6\ 399\ 617{,}8467$$

Koeficijenti trigonometrijskog reda su za međunarodni elipsoid slijedeći:

(vidi original)

PRIMJER:

Kao primjer daje se tabela geografskih širina izračunate iz dužine luka elipsoida prema opisanoj metodi. Vrijednosti su date za Besselov elipsoid i za međunarodni elipsoid u intervalu od 5000 km do 5150 km u razmaku od po 10 km.

(vidi original)

ZAKLJUČAK

U fazi rješavanja problema analizirano je više metoda. Postoje naime više metoda za razvoj u red funkcije pod integralnim znakom (1). Razvijanje u binomni red pokazalo se kao najprikladnije. Pokušano je također da se funkcija (1) razvije u Mac Laurinov red, a također i aproksimacijom sa Čebiševovim polinomima, ali ta oba načina imala su više manjkavosti nego prednosti pred razvijanjem u binomin red.

Literatura

[1] *Bohte, Z.: Numerička analiza. Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko, Ljubljana* 1973.

[2] Čubranić, N.: Viša geodezija II. dio, Tehnička knjiga, Zagreb 1974.

[3] Isaacson, H. B. E. Keller: Analysis of numerical methods. John Wiley and Sons, 1966.

SAŽETAK

Pri izjednačenju mreže potrebno je da se iz poznate koordinate X izračuna geografska širina. U članku je opisana jedna od pogodnih metoda, koja se koristi za kompjutorsko računanje. Sastavni dio članka jesu parametri i koeficijenti trigonometrijskog reba Besselovog i Luceruskog elipsoida. Kao primjer data je tabela geografskih širina, koje su sračunate prema opisanom postupku od 5000 do 5150 km.