IZRAVNAVANJE NIVELMANSKE MREŽE NIŽEG REDA

*Ivan MOLNAR — Novi Sad**

U [3] je pokazan način određivanja najverovatnije vrednosti nadmorske visine repera mreže nižeg reda i ocene tačnosti tražene veličine, primenom uopštene metode najmanjih kvadrata (u.m.n.k). Ovakav postupak izravnanja se, kao što je poznato, ostvaruje korišćenjem matrice $N^{-1} = Q_\xi$, dobijene u procesu izravnanja repera mreže višeg reda.

Izloženi način izravnanja sadrži pretpostavku da postoji samo uticaj grešaka datih veličina, a ne i njihove zavisnosti. Ovo s toga, što matrica datih veličina Q_ξ ima elemente različite od nule samo na glavnoj dijagonali, tj. ona je sračunata uvođenjem pretpostavke o nezavisnosti izravnatih veličina u mreži višeg reda. Zatim je prikazan i odgovarajući način određivanja nadmorske visine repera mreže nižeg reda primenom klasične metode najmanjih kvadrata (k.m.n.k), kao i upoređenje obiju načina.

Kad su merenja homogene tačnosti, a reperi mreže višeg reda podjednako udaljeni od repera nižeg reda, oba postupka izravnavanja daju za vektor nepoznatih veličina identične rezultate. U tom slučaju greške datih veličina ne golaze do izražaja. One se uzimaju u obzir jednostavno tako da se, pri obrazovanju jednačina odstupanja u postupku izravnanja, broj jednačina odstupanja poveća za fiktivnu jednačinu odstupanja.

U ovom radu se ne čini pretpostavka o nezavisnosti izravnatih veličina, nego se polazi od toga, da su one u slobodnoj mreži u korelacionom odnosu. Znači, u procesu izravnanja uzeti će se u obzir svi, a ne samo elementi na glavnoj dijagonali matrice datih veličina Q_ξ. Želja je da se ukaže, da se u postupku izravnavanja uvrštene nivelmanske mreže, primenom k.m.n.k., može uzeti u obzir i jedinstveni uticaj grešaka datih veličina i njihove zavisnosti, uvođenjem dodatne fktivne jednačine odstupanja.

Međutim teorijsko uopštenje ovako formulisanog problema je teško dati, usled veoma komplikovanih izraza kojima bi trebalo operisati. Razmotrimo s toga slučaj određivanja kote repera uvrštene mreže A, kada su nivelanja ostvarena prema sl. 1.

Pri izravnanju primenom u.m.n.k jednačine odstupanja glase

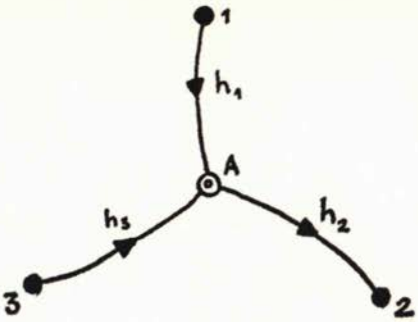
$$v = Lx + M_\xi + l \tag{1}$$

gde su

$$v^T = \| v_1\, v_2\, v_3\, v_f \| \qquad L^T = \| a_1\, a_2\, a_3\, 1 \| \qquad \xi^T = \| \Delta H_1\, \Delta H_2\, \Delta H_3 \|, \qquad X = \Delta H_A$$

---

* Adresa autora: Mr. Ivan Molnar, Novi Sad, Bul. Maršala Tita 16



Sl. 1

$$M = \begin{Vmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix} \qquad l^T = \| f_1 \, f_2 \, f_3 \cdot \| \qquad \underset{i=1,2,3}{f_i = H_{0A} + H_{0i} - h_i}$$

Veza između članova koeficijenata jednačina odstupanja L i matrice koeficijenata datih veličina M, data je relacijom

$$\underset{i=1,2,3}{a_i = - b_i = \pm 1}$$

Slobodan član koji sadrži greške datih i merenih veličina iznosi

$$\bar{l} = l + M_\xi \tag{2}$$

te jednačine odstupanja (1) glase

$$v = l x + \bar{l} \tag{3}$$

Korelaciona matrica se dobija iz (2)

$$Q_{\bar{l}} = Q_l + M \, Q_\xi \, M^T \tag{4}$$

Ako je reper A, u skladu s važećim propisima o rekognosciranju repera, podjednako udaljen od datih repera 1, 2 i 3, tada je (4)

$$Q_{\bar{l}} = E + M \, Q_\xi \, M^T \tag{5}$$

Matrica datih veličina Q_ξ, dobijena u procesu određivanja repera u slobodnoj mreži, prema napred iznetom, ima i elemente van glavne dijagonale različite od nule, tj.

$$Q_\xi = \begin{Vmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{12} & q_{22} & q_{23} \\ q_{13} & q_{23} & q_{33} \end{Vmatrix} \tag{6}$$

Međutim, kad je data nivelmanska mreža izravnata po postupku izravnanja mreže sa minimalnim tragom, prema [1] ili [2], matrica (6) poprima izgled

$$Q_\xi = \begin{Vmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{12} \\ q_{12} & q_{11} & q_{12} \\ q_{12} & q_{12} & q_{11} \end{Vmatrix} \tag{7}$$

Nađimo proizvod matrica M $Q_\xi M_T$, imajući u vidu i osobinu matrice (7), da je zbir njenih vrsta ili kolona jednak nuli

$$M\,Q_\xi\,M^T = \begin{Vmatrix} q_{11} & a_1\,a_2\,q_{12} & a_1\,a_3\,q_{12} & 0 \\ a_1\,a_2\,q_{12} & q_{11} & a_2\,a_3\,q_{12} & 0 \\ a_1\,a_3\,q_{12} & a_2\,a_3\,q_{12} & q_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \tag{8}$$

Matrice $Q_{\bar{l}}$ i $Q_{\bar{l}}^{-1}$ iznose

$$Q_{\bar{l}} = \begin{Vmatrix} q_{11}+1 & a_1\,a_2\,q_{12} & a_1\,a_3\,q_{12} & 0 \\ a_1\,a_2\,q_{12} & q_{11}+1 & a_2\,a_3\,q_{12} & 0 \\ a_1\,a_3\,q_{12} & a_2\,a_3\,q_{12} & q_{11}+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \tag{9}$$

$$Q_{\bar{l}}^{-1} = \frac{1}{(q_{11}+1)(q_{11}+q_{12}+1)-2q_{12}^2} \begin{Vmatrix} q_{11}+q_{12}+1 & 0 & -a_1\,a_3\,q_{12} & 0 \\ -a_1\,a_2\,q_{12} & q_{11}+q_{12}+1 & -a_2\,a_3\,q_{12} & 0 \\ -a_1\,a_3\,q_{12} & -a_2\,a_3\,q_{12} & q_{11}+q_{12}+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (q_{11}+1)(q_{11}+q_{12}+1)-2q_{12}^2 \end{Vmatrix} \tag{10}$$

Ovako određena korelaciona matrica $Q_l^{'11}$ obezbeđuje ravnopravno određivanje kota repera uvrštene mreže A, primenom u.m.n.k. i k.m.n.k, obzirom da važi relacija $L^T Q_{\bar{l}}^{-1} = L^T$. Time je eliminisan uticaj grešaka datih veličina i njihove zavisnosti. Ispravnost gledišta da korelaciona matrica ima kompenzaciono svojstvo i u slučajevima kad se reper A određuje od četiri i više datih repera, treba da potvrde rezultati brojnog primera koji sledi. Rezultati brojnog primera, također, treba da potvrde i realnost učinjenih predpostavki u [3], gde je puna matrica datih veličina aproksimirana matricom dijagonalnog oblika, tj. slučaj kad se odvojeno razmatra uticaj grešaka datih veličina od njihove zavisnosti.

Razmotrimo još i ocenu tačnosti uz napomenu, da nju treba realizovati na bazi stvarnih rezultata merenja. Otuda vrednost $v^T\,Q_{\bar{l}}\,v$ treba računati iz stvarnih popravaka merenja (izostavljanjem fiktivne vrednosti popravke). Broj stepeni slodobe se, sledstveno tome, određuje iz broja stvarnih merenja.

Na osnovu izloženog, procena standardnog odstupanja jedinice težine glasi

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{v^T\,Q_{\bar{l}}^{-1}\,\vartheta}{N-U}} \tag{11}$$

gde su

$$Q_{\bar{l}} = E + BQ_\xi\,B^T;\; B = \begin{Vmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{Vmatrix};\; A = \begin{Vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Vmatrix};\; N-U = 3-1 = 2$$

a procena standardnog odstupanja nadmorske visine repera A iznosi

$$\mu_A = \sqrt{\frac{v^T\,Q_{\bar{l}}^{-1}\,v}{2\,(L^T\,Q_{\bar{l}}^{-1}\,L)^{-1}}} \tag{12}$$

Kad se izravnanje ostvaruje primenom k.m.n.k., tada se procena standardnog odstupanja jedinice težine računa prema izrazu

$$\mu_o = \sqrt{\frac{\bar{v}^T Q_f^{-1} \bar{\vartheta}}{N - U + \operatorname{trag} Q_f^{-1} B Q_\xi B^T - \operatorname{trag} Q_f^{-1} B Q_\xi B^T Q_f^{-1} A (A^T Q_f^{-1} A)^{-1} A^T}} \tag{13}$$

gde su

$$Q_f^{-1} = P_f = E; \quad \bar{v}^T Q_f^{-1} \bar{\vartheta} = \sum_{i=1}^{3} \bar{v}_i \bar{v}_i ; \quad \operatorname{trag} B Q_\xi B^T = 3q_{11}$$

$$\operatorname{trag} B Q_\xi B^T A (A^T A)^{-1} A^T = q_{11} + 2q_{12} = 0$$

te je

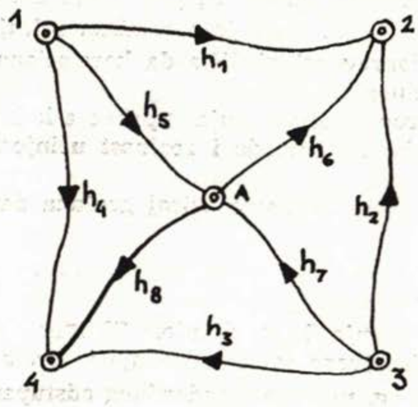
$$\mu_o = \sqrt{\frac{\bar{v}^T \bar{v}}{2 + 3q_{11}}} \tag{14}$$

dok procena standardnog odstupanja nadmorske visine repera iznosi

$$\mu_A = \mu_o \sqrt{Q_{H_A H_A}} = \sqrt{\frac{\bar{v}^T \bar{v}}{(2 + 3q_{11} (L^T L)^{-1}}} \tag{15}$$

Brojni primer

1. Nivelmanska mreža na sl. 2 sadrži 5 repara



Sl. 2

U postupku kompleksnog izravnanja odrediti najverovatnije vrednosti kote repera 1,2,3 i 4 date i kotu repera A uvrštene mreže, na osnovu datih i merenih podataka

Približne vrednosti kote repera jesu:

$H_{01} = 1{,}000$ m; $H_{02} = 3{,}000$ m; $H_{03} = 0{,}000$ m; $H_{04} = 2{,}000$ m; $H_{0A} = 1{,}500$ m

Merene visinske razlike između repera su

$h_1 = 2{,}000$ m; $h_2 = 3{,}021$ m; $h_3 = 1{,}990$ m; $h_4 = 1{,}000$ m

$h_5 = 0.504$ m; $h_6 = 1{,}510$ m; $h_7 = 1{,}492$ m; $h_8 = 0{,}496$ m

Rastojanja između repera iznose

$$S_{12} \approx S_{23} \approx S_{34} \approx S_{41} = 1 \text{ km.}$$

$$S_{A1} \approx S_{A2} \approx S_{A3} \approx S_{A4} = 0{,}707 \text{ km.}$$

Jednačine odstupanja glase

$$\begin{Vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -1 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & +1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & +1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & +1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & -1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \Delta H_1 \\ \Delta H_2 \\ \Delta H_3 \\ \Delta H_4 \\ \Delta H_A \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 \\ -21 \\ +10 \\ 0 \\ -4 \\ -10 \\ +8 \\ +4 \end{Vmatrix}$$

Obrazujmo matricu težina

$$p = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}41 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 01{,}41 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}41 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}41 \end{Vmatrix}$$

a zatim normalne jednačine

$$\begin{Vmatrix} +3{,}41 & -1 & 0 & -1 & -1{,}41 \\ -1 & +3{,}41 & -1 & 0 & -1{,}41 \\ 0 & -1 & +3{,}41 & -1 & -1{,}41 \\ -1 & 0 & -1 & +3{,}41 & -1{,}41 \\ -1{,}41 & -1{,}41 & -1{,}41 & -1{,}41 & +5{,}64 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \Delta H_1 \\ \Delta H_2 \\ \Delta H_3 \\ \Delta H_4 \\ \Delta H_5 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} +5{,}64 \\ -35{,}10 \\ -0{,}28 \\ +15{,}64 \\ +14{,}10 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}$$

Obrazujmo matricu i vektor

$$A_1^T = \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & +1 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & +1 & 0 & 0 & 0 & +1 \end{Vmatrix}$$

$$N^T = A_1^T p A \begin{Vmatrix} +3{,}41 & -1 & 0 & -1 & -1{,}41 \\ -1 & +3{,}41 & -1 & 0 & -1{,}41 \\ 0 & -1 & +3{,}41 & -1 & -1{,}41 \\ -1 & 0 & -1 & +3{,}41 & -1{,}41 \end{Vmatrix}$$

$$A_1^T p A_1 = \begin{Vmatrix} +3{,}41 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & +3{,}41 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & +3{,}41 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & +3{,}41 \end{Vmatrix} ; \quad v = A_1^T p f = \begin{Vmatrix} +5{,}64 \\ -35{,}10 \\ -0{,}28 \\ +15{,}64 \end{Vmatrix}$$

a zatim matricu

$$
N^T N = \begin{Vmatrix} +15{,}6162 & -4{,}8319 & +3{,}9881 & -4{,}8319 \\ -4{,}8319 & +15{,}6162 & -4{,}8319 & +3{,}9881 \\ +3{,}9881 & -4{,}8319 & +15{,}6162 & -4{,}8319 \\ -4{,}8319 & +3{,}9881 & -4{,}8319 & +15{,}6162 \end{Vmatrix}
$$

i inverznu matricu ove matrice

$$
(N^T N)^{-1} = \begin{Vmatrix} +0{,}076\,6906 & +0{,}016\,6079 & -0{,}009\,3079 & +0{,}016\,6079 \\ -0{,}016\,6079 & +0{,}076\,6906 & +0{,}016\,6079 & -0{,}009\,3079 \\ -0{,}009\,3079 & +0{,}016\,6079 & +0{,}076\,6906 & +0{,}016\,6079 \\ +0{,}016\,6079 & -0{,}009\,3079 & +0{,}016\,6079 & +0{,}076\,6906 \end{Vmatrix}
$$

Vektor traženih veličina iznosi

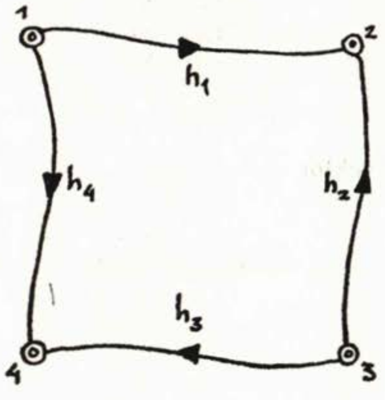
$$
x_k = -N(N^T N)^{-1} v = \begin{Vmatrix} \Delta H_1 \\ \Delta H_2 \\ \Delta H_3 \\ \Delta H_4 \\ \Delta H_5 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -1{,}515 \text{ mm.} \\ +9{,}087 \text{ mm.} \\ +0{,}221 \text{ mm.} \\ -5{,}793 \text{ mm.} \\ -2{,}000 \text{ mm.} \end{Vmatrix}
$$

Najvjerojatnije vrednosti kota traženih repera su

$H_1 = 0{,}998\,485$ m $\quad H_2 = 3{,}009\,087$ m $\quad H_3 = 0{,}000\,221$ m $\quad H_4 = 1{,}904\,207$ m

$H_A = 1{,}498$ m

2. Uzmimo sada da reperi 1,2,3 i 4 pripadaju datoj a reperi A uvrštenoj mreži. Odredimo kote repera date mreže 1,2,3 i 4 na sl. 3, postupkom izravnanja datih mreža sa minimalnim tragom. Dobijeni podaci će poslužiti za određivanje kote repera uvrštene mreže, primerom u.m.n.k.



Sl. 3

Približne vrednosti kote repera su

$H_{01} = 1{,}000$ m; $\quad H_{02} = 3{,}000$ m; $\quad H_{03} = 0{,}000$ m; $\quad H_{04} = 2{,}000$ m

Merene visinske razlike su

$h_1 = 2{,}000$ m; $\quad h_2 = 3{,}021$ m; $\quad h_3 = 1{,}990$ m; $\quad h_4 = 1{,}000$ m

Jednačine odstupanja glase

$$\begin{Vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -1 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & +1 \\ -1 & 0 & 0 & +1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \Delta H_1 \\ \Delta H_2 \\ \Delta H_3 \\ \Delta H_4 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 \\ -21 \\ +10 \\ 0 \end{Vmatrix}$$

Obrazujmo matrice i vektor

$$A_1^T = \begin{Vmatrix} +1 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & +1 \end{Vmatrix} \qquad N^T = A_1^T A = \begin{Vmatrix} -1 & +2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & +2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & +2 \end{Vmatrix}$$

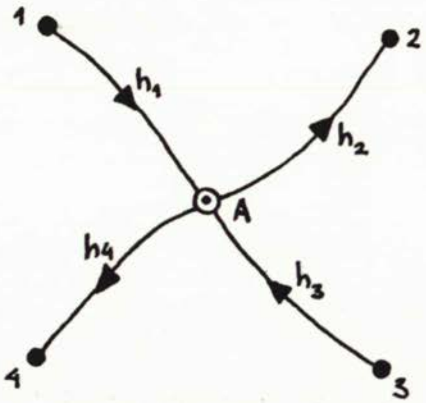
$$A_1^T A_1 = \begin{Vmatrix} +2 & -1 & 0 \\ -1 & +2 & -1 \\ 0 & -1 & +2 \end{Vmatrix} \qquad v = A_1^T f = \begin{Vmatrix} -21 \\ +11 \\ +10 \end{Vmatrix}$$

Vektor nepoznatih veličina i korelaciona matrica iznose

$$x = \xi = -N(N^T N)^{-1} v = \begin{Vmatrix} \Delta H_1 \\ \Delta H_2 \\ \Delta H_3 \\ \Delta H_4 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} +1{,}375 \text{ mm} \\ +9{,}125 \text{ mm} \\ -4{,}125 \text{ mm} \\ -6{,}375 \text{ mm} \end{Vmatrix}$$

$$Q_x = Q_\xi = (N^T N)^{-1} A_1^T A_1 (N^T N)^{-1} N^T = \frac{1}{16} \begin{Vmatrix} +5 & -1 & -3 & -1 \\ -1 & +5 & -1 & -3 \\ -3 & -1 & +5 & -1 \\ -1 & -3 & -1 & +5 \end{Vmatrix}$$

3. Odredimo kotu repera neslobodne mreže A na sl. 4, prema datim i merenim podacima, uzimajući u obzir greške datih veličina i njihovu zavisnost (vektor i puna matrica datih veličina iz zadatka (2)



Sl. 4

Približna vrednost kote repera A je $H_{0A} = 2{,}000$ m
Merene visinske razlike iznose

$h_1 = 0{,}504$ m; $h_2 = 1{,}51$ om; $h_3 = 1{,}492$ m; $h_4 = 0{,}496$ m

Jednačine odstupanja glase

$$\begin{Vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_f \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} +1 \\ -1 \\ +1 \\ -1 \\ +1 \end{Vmatrix} \Delta H_A + \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \\ +1 & +1 & +1 & +1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \Delta H_1 \\ \Delta H_2 \\ \Delta H_3 \\ \Delta H_4 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} -4 \\ -10 \\ +8 \\ +4 \\ 0 \end{Vmatrix}$$

Korigujmo prvo **slobodne članove**

$$\bar{l} = l + M \cdot \xi = \begin{Vmatrix} -4 \\ -10 \\ +8 \\ +4 \\ 0 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \\ +1 & +1 & +1 & +1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} +1{,}38 \\ +9{,}12 \\ -4{,}12 \\ -6{,}38 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -5{,}38 \\ -0{,}88 \\ +12{,}12 \\ -2{,}38 \\ 0 \end{Vmatrix}$$

Proizvod matrica **$M\,Q_\xi\,M^T$ iznosi**

$$M\,Q_\xi\,M^T = \begin{Vmatrix} +0{,}3125 & +0{,}0625 & -0{,}1875 & +0{,}0625 & 0 \\ +0{,}0625 & +0{,}3125 & +0{,}0625 & -0{,}1875 & 0 \\ -0{,}1875 & +0{,}0625 & +0{,}3125 & +0{,}0625 & 0 \\ +0{,}0625 & -0{,}1875 & +0{,}0625 & +0{,}3125 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

Sračunajmo matrice **$Q_{\bar{l}}$ i $Q_{\bar{l}}^{-1}$**

$$Q_{\bar{l}} = \begin{Vmatrix} +1{,}3125 & +0{,}0625 & -0{,}1875 & +0{,}0625 & 0 \\ +0{,}0625 & +1{,}3125 & +0{,}0625 & -0{,}1875 & 0 \\ -0{,}1875 & +0{,}0625 & +1{,}3125 & +0{,}0625 & 0 \\ +0{,}0625 & -0{,}1876 & +0{,}0625 & +1{,}3125 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

$$Q_{\bar{l}}^{-1} = \begin{Vmatrix} +0{,}783\,3333 & -0{,}5 & +0{,}116\,6667 & -0{,}5 & 0 \\ -0{,}5 & +0{,}783\,3333 & -0{,}5 & +0{,}116\,6667 & 0 \\ +0{,}116\,6667 & -0{,}5 & +0{,}783\,3333 & -0{,}5 & 0 \\ -0{,}5 & +0{,}116\,6667 & -0{,}5 & +0{,}783\,3333 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

$$N = L^T Q_{\bar{l}}^{-1} L = 5; \qquad n = L^T Q_{\bar{l}}^{-1} \bar{l} = 10; \qquad x_p = \Delta H_A = -N^{-1} n = -2 \text{ mm}$$

$$H_A = H_{0A} + \Delta H_A = 1{,}498 \text{ m}; \qquad v^T = \| -7{,}38 \; +1{,}12 \; +10{,}12 \; -0{,}38 \|$$

$$v^T = Q_{\bar{l}}^{-1} v = 106{,}25\,539$$

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{106{,}25\,539}{3}} = \pm 5{,}95$$

$$\mu_A = \mu_0 \sqrt{\frac{1}{5}} = \pm 2{,}66 \text{ mm.}$$

4. Odredimo **kotu repera uvrštene mreže A na sl. 4** prema podacima zadatka 3, izuzev što se iz **zadatka 2 uzimaju samo elementi** sa glavne dijagonalne matrice Q_ξ. **tj.**

$$Q_\xi = \| k_{ij} \|_1^4 \qquad k_{ij} = \begin{Bmatrix} {}^5/_{16}, & i = j \\ 0 & i \neq j \end{Bmatrix}$$

Matrice $Q_{\bar{l}}$ i $Q_{\bar{l}}^{-1}$ sada iznose

$$Q_l = \frac{1}{16}\begin{Vmatrix} +21 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & +21 & 0 & 0 & +5 \\ 0 & 0 & +21 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & +21 & +5 \\ -5 & +5 & -5 & +5 & +36 \end{Vmatrix}$$

$$Q_l^{-1} = \begin{Vmatrix} +0,79088 & -0,02896 & +0,02896 & -0,02896 & +0,12192 \\ -0,02896 & +0,79088 & -0,02896 & +0,02896 & -0,12192 \\ +0,02896 & -0,02896 & +0,79088 & -0,02806 & +0,12192 \\ -0,02896 & +0,02896 & -0,02896 & +0,79009 & -0,12192 \\ +0,12192 & -0,12192 & +0,12192 & -0,12192 & +0,51216 \end{Vmatrix}$$

$$N = L^T Q_l^{-1} L = 5; \qquad n = L^T Q_l^{-1} \bar{l} = 10; \qquad x_d = \Delta H_A = -2 \text{ mm}$$

$$H_A = H_{0A} + \Delta H_A = 1{,}498 \text{ mm}; \qquad v^T = \| -7{,}38 + 1{,}12 + 10{,}12 - 0{,}38 \|$$

$$v^T Q_l^{-1} v = 120{,}59$$

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{120{,}59}{3}} = \pm 6{,}34$$

$$\mu_A = \mu_0 \sqrt{\frac{1}{5}} = \pm 2{,}84 \text{ mm}$$

5. Odredimo najzad i kotu uvrštene mreže A prema podacima zadatka 3, primenom k.m.n.k

$$Q_l^{-1} = P_l = E$$

$$N = L^T L = 5; \qquad n = L^T \bar{l} = 10; \qquad \bar{x} = \overline{\Delta H}_A = -2 \text{ mm}$$

$$H_A = 1{,}498 \text{ m}; \qquad \bar{v}^T = \| -7{,}38 + 1{,}12 + 10{,}12 - 0{,}38 \| \qquad \bar{v}^T \bar{v} = 158{,}2776$$

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{\bar{v}^T \bar{v}}{3 + 4\, q_{11}}} = \sqrt{\frac{158{,}2776}{4{,}25}} = \pm 6{,}10$$

$$\mu_A = \mu_0 \sqrt{\frac{1}{5}} = \pm 2{,}73$$

Analiza ostvarenih rezultata

Postignuti rezultati pri određivanju kote repera uvrštene mreže A, i ocene tačnosti dobijenih rezultata, ukazuju na sledeće:

— vektor nepoznatih x_p dobijen parcijalnim izravnanjem (uzimanjem u obzir pune matrice Q_ξ pri računanju korelacione matrice Q_l^{-1} neće se razlikovati od vektora nepoznatih x_k, koji bi se dobio kompleksnim izravnanjem repera date i uvrštene mreže

— vektor nepoznatih x_d dobijen parcijalnim izravnanjem (uzimanjem u obzir dijagonalne matrice Q_ξ pri računanju korelacione matrice Q_l^{-1} neće se razlikovati od vektora nepoznatih x_k, koji bi se dobio kompleksnim izravnanjem repera date i uvrštene mreže

— vektor nepoznatih $\bar{x}$, dobijen primenom k.m.n.k (parcijalnim izravnanjem kad se ne uzimaju u obzir greške datih veličina niti njihova zavisnost) neće se razlikovati od vektora nepoznatih x_k, koji bi se dobio kompleksnim izravnanjem repera date i uvrštene mreže

Ocena tačnosti nepoznatih veličina, u svim ovim slučajevima je ista, unutar granice tačnosti računanja.

Na osnovu teorijskih zaključaka i analizom postignutih rezultata, mogu se izvesti sledeći jedinstveni

ZAKLJUČCI

Pri određivanju najvjerovatnijih vrednosti nadmorskih visina repera uvrštene mreže A, koji se nalazi na podjednakom rastojanju od repera date mreže, greške datih veličina ne dolaze do izražaja (pod uslovom da su reperi date mreže izravnati postupcima prikazanim u [1] ili [2]). Ovo je teorijski uopšteno i dokazano u [3], a sada i praktično potvrđeno rezultatom zadatka 4. Međutim, u ovom radu se pored toga ukazuje još i na to, da pri odrđivanju najverovatnije vrednost tražene veličine, ne samo da greške datih veličina, već i njihova zavisnost, ne dolaze do izražaja. Time je nedvosmisleno pokazano, da uvođenje fiktivne jednačine odstupanja istovremeno predstavlja i uzimanje u obzir grešaka datih veličina i njihove zavisnosti pri izravnanju repera uvrštene mreže.

Literatura

[1] Mihailović K.: Apsolutne i relativne greške traženih veličina u lokalnim mremrežama, Zbornik Geodetskog instituta br. 14, Beograd 1973. g.

[2] Mittermayer E.: Zur Ausgleichung Netze, ZfV, 1972. g.

[3] Molnar I.: Od ređivanje nadmorske visine repera mreže nižeg reda uzimanjem u obzir greške datih veličina, Geodetski list 7—9 Zagreb 1978. g.

REZIME

U radu se saopštava da metode izravnanja uvrštene nivelmanske mreže primenom u.m.u.k. i k.m.n.k. mogu biti međusobno jednake. Takva tvrdnja je usledila nakon izvedenih dokaza i analizom postignutih rezultata brojnog primera uz uslove da su reperi date mreže izravnati postupkom prikazanim u [1] ili [2], i pod pretpostavkom, da je traženi reper podjednako udaljen od repera date mreže.

ZUSAMMENFASSUNG

In diesem Aufsatz wird angegeben, dass man bei der Ausgleichung von angeschlossenen Nivellementsnetzen mittels klassischen Methode der kleinsten Quadrate und der verallgemeinerten Methode der kleinsten Quadrate zu den gleichen Ergebnis kommen kann. Neben dem Beweis stellt der Verfasser auch ein Beispiel vor. Dabei ist dei Voraussetzung, dass die Festpunkte im gegebenen Netz nach in [1] oder [2] deschriebenen Verbahren ausgegliechen sind. Weiter ist vorausgesetzt dass der gesuchte Festpunkt, von der gegebenen Festpunkten gleich entfernt ist.