PRIMJENA DŽEPNIH RAČUNALA U RJEŠAVANJU ZADATAKA GAUSS-KRÜGEROVE PROJEKCIJE

Nedjeljko FRANČULA — Zagreb*

Džepna računala s mogućnošću programiranja i većim brojem programskih koraka omogućila su programirano računanje i složenijih geodetskih zadataka u terenskim uvjetima. Jedno je od takvih računala i računalo HP-67 s 224 programska koraka, 26 adresibilnih registara i registracijom programa na magnetske kartice. Tim računalom moguće je programirano izračunati i većinu geodetskih zadataka povezanih s primjenom Gauss-Krügerove projekcije.

U ovom članku dat ćemo formule i programe za računanje, pomoću računala HP-67, ovih zadataka:

1) Računanje pravokutnih koordinata i konvergencije meridijana u Gauss-Krügerovoj projekciji iz geografskih koordinata.

2) Računanje geografskih koordinata i konvergencije meridijana iz pravokutnih koordinata u Gauss-Krügerovoj projekciji.

Pomoću ta dva programa moguće je riješiti i zadatak:

3) Transformacija koordinata između susjednih koordinatnih sustava Gauss-Krügerove projekcije.

RAČUNANJE PRAVOKUTNIH KOORDINATA I KONVEREGENCIJE MERIDIJANA IZ GEOGRAFSKIH KOORDINATA

Uobičajene formule dobijene razvojem u red (v. [1], str. 24) nisu prikladne, jer njihovo programiranje zahtijeva više od 224 programska koraka. Hirvonen [2], [3] izveo je formule tzv. »zatvorenog tipa« (closed formulas) pogodne za programiranje na džepnim i stolnim računalima. Jedino u formuli za dužinu luka meridijana nije se mogao izbjeći razvoj u red.

U ovom radu koristimo slijedeće oznake:

a, b — velika i mala poluos Zemljina elipsoida
φ — geografska širina
l — geografska dužina od srednjeg meridijana sustava
c — konvergencija meridijana
$\bar{y}$, $\bar{x}$ — pravokutne koordinate (nereducirane)
e'^2 — $(a^2 - b^2)/b^2$

---

* Adresa autora: Doc. dr Nedjeljko Frančula, Geodetski fakultet, Zagreb, Kačićeva 26.

Formule za računanje, s koeficijentima A_1, A_2, A_4, A_6 izračunatim za Besselov elipsoid, jesu:

$$A_1 = 6366742{,}520, \qquad A_2 = 15988{,}63816,$$
$$A_4 = 16{,}72993982, \qquad A_6 = 0{,}0217814427,$$

$$V_1 = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi}\,,$$

$$\varphi_x = \operatorname{arc\,tg}\left[\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\cos(V_1 l)}\right],$$

$$V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi_x}\,,$$

$$\bar{x} = A_1\,\varphi_x - A_2 \sin(2\varphi_x) + A_4 \sin(4\varphi_x) - A_6 \sin(6\varphi_x),$$

$$\bar{y} = \frac{a^2}{b} \cdot \operatorname{arsh}\left(\frac{\cos\varphi_x \operatorname{tg} l}{V}\right),$$

$$c = \operatorname{arc\,tg}\left[V \cdot \operatorname{tg}\varphi_x \cdot \operatorname{th}\left(\frac{\bar{y} \cdot b}{a^2}\right)\right].$$

Budući da džepna računala nemaju ugrađene ni area ni hiperbolne funkcije, koristimo slijedeće jednadžbe:

$$\operatorname{arsh} u = \ln(u + \sqrt{u^2 + 1}\,, \qquad \operatorname{th} v = \frac{e^v - e^{-v}}{e^v + e^{-v}}.$$

Prema tome $\bar{y}$ i c računamo po slijedećim formulama:

$$u = \frac{\cos\varphi_x \operatorname{tg} l}{V}\,,$$

$$\bar{y} = \frac{a^2}{b} \ln(u + \sqrt{u^2 + 1}),$$

$$v = \frac{\bar{y} \cdot b}{a^2}\,,$$

$$c = \operatorname{arc\,tg}\left[V \cdot \operatorname{tg}\varphi_x \cdot \left(\frac{e^v - e^{-v}}{e^v + e^{-v}}\right)\right].$$

Koeficijenti A_1, A_2, A_4 i A_6 izračunati su po ovim formulama:

$$A_1 = (1 + 3e_1 + 45e_2 + 350e_3 + 11025e_4)\,b^2/\,a,$$
$$A_2 = (3e_1 + 60e_2 + 525e_3 + 17640e_4)\,b^2/2a,$$
$$A_4 = (15e_2 + 210e_3 + 8820e_4)\,b^2/4a,$$
$$A_6 = (35e_3 + 2520e_4)\,b^2/6a,$$
$$e_1 = e^2/4; \quad e_2 = e^4/64; \quad e_3 = e^6/512; \quad e_4 = e^8/16384; \quad e^2 = (a^2 - b^2)/a^2.$$

Program za računalo HP-67, nazvan GAUS1Z, ima 194 programskih koraka i dan je u prilogu 1.

Ulazni podaci su φ i l zadani u stupnjevima, minutama, sekundama i dijelovima sekunde. Prvo se utipka φ tako da decimalna točka dođe iza stupnjeva i pritisne tipka ENTER. Zatim se utipka l na isti način i pritisne tipka A. Nakon računanja koje traje približno 23 sekunde, na ekranu se pokazuju redom $\bar{y}$, $\bar{x}$ i c.

Primjer: Zadani su $\varphi = 45°44'14{,}8847''$ i $\lambda = 15°40'23{,}5089''$. U računalo se utipkaju 45.44148847 i 0.40235089. Nakon računanja na ekranu se dobije $\bar{y} = 52387.762$, $\bar{x} = 5066612.012$ i $c = 0.28556335$, tj. $c = 0°28'55{,}6335''$.

Program je testiran na većem broju primjera. Odstupanja izračunatih koordinata od stvarnih vrijednosti iznose maksimalno ± 4 mm. Za konvergenciju meridijana ta odstupanja iznose maksimalno $\pm 0{,}0001''$.

RAČUNANJE GEOGRAFSKIH KOORDINATA I KONVEREGENCIJE MERIDIJANA IZ PRAVOKUTNIH KOORDINATA

Formule za računanje, s koeficijentima A, E, F i G izračunatim za Besselov elipsoid, imaju oblik [3], [4]:

$$A = 0{,}9949921245, \qquad E = 0{,}00500787563,$$
$$F = 0{,}00582964, \qquad G = 0{,}00809,$$

$$r = A\,\frac{a^2}{b}, \qquad \omega = \frac{\bar{x}}{r},$$

$$\varphi_x = \omega + E \sin\omega \cos\omega\,[1 + F\cos^2\omega\,(1 + G\cos^2\omega)],$$

$$V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2\varphi_x},$$

$$l = \operatorname{arc\,tg}\left[\left(V \cdot \operatorname{sh}\left(\frac{b\,\bar{y}}{a^2}\right)\right/\cos\varphi_x\right],$$

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg}\,[\operatorname{tg}\varphi_x \cos(V\,l)].$$

U formuli za l računamo $\operatorname{sh}\left(\frac{\bar{y}\,b}{a^2}\right)$ po formuli

$$v = \frac{\bar{y} \cdot b}{a^2},$$

$$\operatorname{sh} v = \frac{e^v - e^{-v}}{2},$$

pa je konačna formula za l:

$$l = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{V}{\cos\varphi_x} \cdot \frac{e^v - e^{-v}}{2}\right).$$

Konvergenciju meridijana računamo po formuli iz prethodnog zadatka.

Koeficijenti A, E, F i G izračunati su po formulama [4]:

$$A = 1 + 3n\left[-1 + \frac{7}{4}n\left(1 - \frac{n}{0{,}679}\right)\right],$$

$$E = 1 - A + 1{,}4 \cdot 10^{-10}$$

$$F = 3{,}5n\left(1 - \frac{n}{0{,}3269}\right),$$

$$G = 1{,}388 \cdot F,$$

$$n = \frac{a - b}{a + b}.$$

Program za računalo HP-67, nazvan GAUS2Z, dan je u prilogu 2.

Ulazni podaci jesu $\bar{y}$ i $\bar{x}$. Prvo se utipka $\bar{y}$ i pritisne tipka ENTER. Potom se utipka $\bar{x}$ i pritisne tipka A. Nakon računanja, na ekranu se redom pokazuju φ, l, i c.

Primjer: Zadano $\bar{y} = 52387{,}758$ i $\bar{x} = 5066612{,}011$. Nakon računanja na ekranu se dobije: 45.44148847, 0.40235089 i 0.28556335, tj. $\varphi = 45°44'14{,}8847''$, $l = 0°40'23{,}5089''$ i $c = 0°28'55{,}6335''$.

Geografske koordinate φ i l dobiju se ovim programom izračunate s točnošću $\pm 0{,}0002''$, a konvergencija meridijana s točnošću $\pm 0{,}0001''$.

TRANSFORMACIJA KOORDINATA IZMEĐU SUSJEDNIH KOORDINATNIH SUSTAVA

Pomoću navedena dva programa moguće je izvršiti i transformaciju između susjednih koordinatnih sustava Gauss-Krügerove projekcije. Prvo se iz zadanih pravokutnih koordinata $\bar{y}$ i $\bar{x}$, točke koju treba transformirati, izračunaju pomoću programa GAUS2Z geografske koordinate φ i l. Iz dobivene vrijednosti za l treba izračunati l u susjednom koordinatnom sustavu i to tako da se izračunata vrijednost po apsolutnoj vrijednosti dopuni do 3°, koliko iznosi širina sustava, i uzme suprotan predznak. Potom se pomoću programa GAUS1Z iz φ i l izračunaju $\bar{y}$ i $\bar{x}$ u susjednom koordinatnom sustavu.

Primjer: Točku zadanu koordinatama $y = 5610821{,}171$, $x = 5067029{,}450$ treba transformirati u 6. koordinatni sustav. Prvo treba izračunati nereducirane koordinate po formuli $\bar{y} = (y - K)/m_0$, i $\bar{x} = x/m_0$. Dobije se $y = 110832{,}254$ i $\bar{x} = 5067536{,}204$. Iz tih koordinata programom GAUS2Z izračunate su geografske koordinate $\varphi = 45°44'20{,}0014''$, $l = 1°25'27{,}3484''$. U 6. koordinatnom sustavu $l = -1°34'32{,}6516''$. Programom GAUS1Z dobiju se koordinate zadane točke u 6. koordinatnom sustavu: $\bar{y} = -122619{,}405$ i $\bar{x} = 5067757{,}256$.

Program: GAUS1Z PRILOG 1

Korak	Tipke	Napomena	Korak	Tipke	Napomena
001	f LBL A		021	5	
002	f H ←		022	6	
003	STO 0	l	023	0	
004	h x ⇄ y		024	7	
005	f H ←		025	8	
006	STO 1	φ	026	.	
007	6		027	9	
008	3		028	6	
009	7		029	3	
010	7		030	STO 3	b
011	3		031	RCL 2	a
012	9		032	g x^2	
013	7		033	RCL 3	b
014	.		034	g x^2	
015	1		035	—	
016	5		036	RCL 3	b
017	5		037	g x^2	
018	STO 2	a	038	÷	
019	6		039	STO 4	e'^2
020	3		040	6	

Korak	Tipke	Napomena	Korak	Tipke	Napomena
041	3		099	h 1/x	
042	6		100	RCL 1	φ
043	6		101	f TAN	
044	7		102	$\times$	
045	4		103	g TAN^{-1}	
046	2		104	STO 9	φ_x
047	.		105	f COS	
048	5		106	g x^2	
049	2		107	RCL 4	e'^2
050	0		108	$\times$	
051	STO 5	A_1	109	1	
052	1		110	+	
053	5		111	f $\sqrt{x}$	
054	9		112	STO A	V
055	8		113	RCL 5	A_1
056	8		114	RCL 9	φ_x
057	.		115	$\times$	
058	6		116	g $\rightarrow$ R	
059	3		117	RCL 9	φ_x
060	8		118	2	
061	1		119	$\times$	
062	6		120	f SIN	$\sin(2\varphi_x)$
063	STO 6	A_2	121	RCL 6	A_2
064	1		122	$\times$	
065	6		123	$-$	
066	.		124	RCL 9	
067	7		125	4	
068	2		126	$\times$	
069	9		127	f SIN	$\sin(4\varphi_x)$
070	9		128	RCL 7	A_4
071	3		129	$\times$	
072	9		130	+	
073	8		131	RCL 9	
074	2		132	6	
075	STO 7	A_4	133	$\times$	
076	.		134	f SIN	$\sin(6\varphi_x)$
077	0		135	RCL 8	A_6
078	2		136	$\times$	
079	1		137	$-$	
080	7		138	STO B	$\bar{x}$
081	8		139	RCL 9	φ_x
082	1		140	f COS	
083	4		141	RCL 0	l
084	4		142	f TAN	
085	2		143	$\times$	
086	7		144	RCL A	V
087	STO 8	A_6	145	$\div$	
088	RCL 1	φ	146	STO C	u
089	f COS		147	g x^2	
090	g x^2		148	1	
091	RCL 4	e'^2	149	+	$1+u^2$
092	$\times$		150	f $\sqrt{x}$	
093	1		151	RCL C	u
094	+		152	+	
095	f $\sqrt{x}$	V_1	153	f LN	$\ln(u+\sqrt{u^2+1})$
096	RCL 0	l	154	RCL 2	a
097	$\times$		155	g x^2	
098	f COS		156	$\times$	

Korak	Tipke	Napomena	Korak	Tipke	Napomena
157	RCL 3	b	176	+	
158	÷		177	÷	
159	STO D	$\bar{y}$	178	RCL 9	
160	RCL 3	b	179	f TAN	
161	×		180	×	
162	RCL 2	a	181	RCL A	V
163	g x^2		182	×	
164	÷		183	g TAN^{-1}	
165	STO E	v	184	h STI	c
166	g e^x		185	DSP 9	
167	RCL E		186	RCL D	$\bar{y}$
168	CHS		187	f−x−	
169	g e^x		188	f−x−	
170	−		189	RCL B	$\bar{x}$
171	RCL E		190	f−x−	
172	g e^x		191	f−x−	
173	RCL E		192	h RCI	c
174	CHS		193	g → H.MS	
175	g e^x		194	h RTN	

Program: GAUS2Z PRILOG 2

Korak	Tipke	Napomena	Korak	Tipke	Napomena
001	f LBL A		031	9	
002	STO 0	$\bar{x}$	032	4	
003	h x ⇄ y		033	9	
004	STO 1	$\bar{y}$	034	9	
005	6		035	2	
006	3		036	1	
007	7		037	2	
008	7		038	4	
009	3		039	5	
010	9		040	STO 4	A
011	7		041	·	
012	·		042	0	
013	1		043	0	
014	5		044	5	
015	5		045	0	
016	STO 2	a	046	0	
017	6		047	7	
018	3		048	8	
019	5		049	7	
020	6		050	5	
021	0		051	6	
022	7		052	STO 5	E
023	8		053	·	
024	·		054	0	
025	9		055	0	
026	6		056	5	
027	3		057	8	
028	STO 3	b	058	2	
029	·		059	9	
030	9		060	6	

Korak	Tipke	Napomena	Korak	Tipke	Napomena
061	4		121	f $\sqrt{x}$	
062	STO 6	F	122	STO A	V
063	.		123	RCL 1	↓ račun. v
064	0		124	RCL 3	b
065	0		125	×	
066	8		126	RCL 2	a
067	0		127	g x^2	
068	9		128	÷	
069	STO 7	G	129	STO B	v
070	RCL 2	a	130	g e^x	↓ račun. c
071	g x^2		131	STO C	e^v
072	RCL 4	A	132	RCL B	
073	×		133	CHS	
074	RCL 3	b	134	g e^x	
075	÷	r	135	STO D	e^{-v}
076	h 1/x		136	RCL C	
077	RCL 0	$\bar{x}$	137	RCL D	
078	×		138	−	
079	f D ←		139	RCL C	
080	STO 8	w	140	RCL D	
081	f COS	↓ račun. φ_x	141	+	
082	g x^2		142	÷	
083	RCL 7	G	143	RCL 9	
084	×		144	f TAN	
085	1		145	×	
086	+		146	RCL A	V
087	RCL 8	w	147	×	
088	f COS		148	g TAN^{-1}	
089	g x^2		149	g → H.MS	
090	×		150	STO E	c
091	RCL 6	F	151	RCL C	↓ račun. l
092	×		152	RCL D	
093	1		153	−	
094	+		154	2	
095	RCL 8	w	155	÷	
096	f COS		156	RCL A	V
097	×		157	×	
098	RCL 8	w	158	RCL 9	φ_x
099	f SIN		159	f COS	
100	×		160	÷	
101	RCL 5	E	161	g TAN^{-1}	
102	×		162	g → H.MS	
103	f D ←		163	h STI	l
104	RCL 8	w	164	f H ←	↓ račun. φ
105	+		165	RCL A	V
106	STO 9	φ_x	166	×	
107	RCL 2	↓ račun. V	167	f COS	
108	g x^2		168	RCL 9	φ_x
109	RCL 3	b	169	f TAN	
110	g x^2		170	×	
111	−		171	g TAN^{-1}	
112	RCL 3	b	172	g → H.MS	φ
113	g x^2		173	DSP 9	
114	÷	e'^2	174	f−x−	
115	RCL 9	φ_x	175	f−x−	
116	f COS		176	h RCI	l
117	g x^2		177	f−x−	
118	×		178	f−x−	
119	1		179	RCL E	c
120	+		180	h RTN	

LITERATURA

[1] Borčić, B.: Gauss-Krügerova projekcija meridijanskih zona, Liber, Zagreb 1976.

[2] Hirvonen, R. A.: Computation of triangulations on the ellipsoid by the aid of closed formulas, Bulletin geodesique 1957, 43, str. 3—15.

[3] Hirvonen, R. A.: The use of subroutines in geodetic computations, Maanmittaus 1969, str. 50—54, 1970, str. 45—61.

[4] Vincenty, T.: The meridional distance problem for desk computers, Survey Review 1971, 161, str. 136—140.

SAŽETAK

U članku je opisana primjena džepnog računala HP-67 u rješavanju zadataka Gauss-Krügerove projekcije. Dane su formule i programi za rješavanje slijedećih zadataka: računanje pravokutnih koordinata i konvergencije meridijana iz geografskih koordinata i obrnuti zadatak računanje geografskih koordinata i konvergencije meridijana iz pravokutnih koordinata. Pomoću navedena dva programa moguće je i transformirati koordinate između susjednih koordinatnih sustava.

ZUSAMMENFASSUNG

Die Anwendung des Taschenrechners HP-67 für die Berechnungen in Gauss-Krüger-Abbildung ist beschrieben. Formeln und Programme für die folgende Aufgaben sind gegeben: Berechnungen von Meridiankonvergenz und Gauss-Krüger aus den geographischen Koordinaten und die umgekehrte Aufgabe — Berechnung von Meridiankonvergenz und geographischen aus den Gauss-Krüger-Koordinaten. Mit diesen zwei Programme kann man auch Transformation Gauss-Krüger-Koordinaten in Nachbarsysteme durchführen.