PRIMJENA METODE NAJMANJIH KVADRATA NA IZRAVNAVANJE REZULTATA PROMATRANJA

*Miljenko LAPAINE — Zagreb**

Neka je na osnovu promatranja dobivena tablica vrijednosti funkcije f(x) za vrijednosti argumenta $x_0, x_1, \ldots, x_N$. Pretpostavljamo da su vrijednosti argumenta određene točno ili u svakom slučaju znatno točnije nego vrijednosti funkcije $f(x_i)$. Pretpostavljamo da su sistematske pogreške, a isto tako i grube pogreške u vrijednostima $f(x_i)$ isključene. U cilju smanjenja slučajnih pogrešaka i dobivanja što ravnomjernijeg toka funkcije (fx) primjenjuje se proces izravnavanja koji se sastoji u tome da se vrijednosti $f(x_i)$ dobivene promatranjem zamijene vrijednostima $f(x_i)$ dobivenim izračunavanjem, koje ovisi o izabranoj metodi izravnavanja.

Izložiti ćemo metodu izravnavanja osnovanu na metodi najmanjih kvadrata pod pretpostavkom da su vrijednosti $x_0, x_1, \ldots, x_N$ ekvidistantne i da sve vrijednosti $f(x_i)$ imaju istu točnost. Ovaj način sastoji se u slijedećem: Pretpostavlja se da se funkcija f(x), na nekom odsječku koji obuhvaća $n + 1$ vrijednost argumenta x, može dosta dobro aproksimirati polinomom m-tog stupnja ($m \leq n$). Za određivanje izravnane vrijednosti $\bar{f}(x_i)$ u točci x_i treba uzeti $n + 1$ vrijednost argumenta tako da se x_i nalazi po mogućnosti u sredini. Pomoću vrijednosti funkcije u tim točkama dobivenih promatranjem, metodom najmanjih kvadrata formira se aproksimativni polinom m-tog stupnja za funkciju f(x) i za vrijednost $\bar{f}(x_i)$ uzima se vrijednost tog polinoma u točci x_i. Tako dobivene vrijednosti obično su dovoljne bliske stvarnim vrijednostima.

Za praktične svrhe, može se unaprijed naći izraz za $z = \bar{f}(x_i)$ pomoću vrijednosti $y = f(x_i)$ dobivenih mjerenjem uz zadane vrijednosti m i n. Često se za n uzima paran, a za m neparan broj. U tom slučaju, točka x_i je srednja među točkama pomoću kojih se formira aproksimativni polinom. Dajemo nekoliko takvih izraza. Vrijednosti $f(x_i)$ obilježili smo kratko sa y(i), a vrijednosti $\bar{f}(x_i)$ sa z(i).

$$m = 1, \qquad n = 2 \tag{1}$$

$$z(i) = \frac{1}{3}[y(i-1) + y(i) + y(i+1)]$$

$$m = 1, \qquad n = 4 \tag{2}$$

$$z(i) = \frac{1}{5}[y(i-2) + y(i-1) + y(i) + y(i+1) + (i+2)]$$

* Adresa autora: Miljenko Lapaine, dipl. inž. Geodetski fakultet, Zagreb, Kačićeva 26.

$$m = 1, \qquad n = 6 \tag{3}$$

$$z(i) = \frac{1}{7}[y(i-3) + y(i-2) + y(i-1) + y(i) + y(i+1) + y(i+2) + y(i+3)]$$

$$m = 3, \qquad n = 4 \tag{4}$$

$$z(i) = \frac{1}{35}[-3y(i-2) + 12y(i-1) + 117y(i) + 12y(i+1) - 3y(i+2)]$$

$$m = 5, \qquad n = 6 \tag{5}$$

$$z(i) = \frac{1}{231}[5y(i-3) - 30y(i-2) + 75y(i-1) + 131\,y(i) + 75y(i+1) - 30y(i+2) + $$
$$+ 5\,y(i+3)].$$

Ako tablica vrijednosti funkcije dobivenih promatranjem sadrži 30 podataka, primjena formule (3) zahtijeva oko 200 osnovnih računskih operacija, dok je za primjenu formule (4) potrebno oko 300 operacija. Zbog uštede vremena pogodno je i relativno jednostavno taj posao prepustiti računalu.

Dajemo jedan konkretan primjer primjene metode najmanjih kvadrata na izravnavanje rezultata promatranja uz korištenje računala.

x	y
3,875	—2,2
3,925	—2,8
3,975	—2,4
4,025	—1,6
4,075	—1,2
4,125	—0,8
4,175	—0,2
4,225	—1,0
4,275	0,0
4,325	0,4
4,375	0,0
4,425	0,8
4,475	0,6
4,525	1,0
4,575	0,8
4,625	2,0
4,675	0,8
4,725	1,0
4,775	1,6
4,825	1,0
4,875	0,8
4,925	0,6
4,975	0,4
5,025	0,8
5,075	0,4
5,125	0,4
5,175	0,0
5,225	0,4
5,275	—0,4
5,325	0,4
5,375	0,0

PRILOG 1

```
      DIMENSION Y (100), Z (100), L (100)
      READ (5, 14) IZNAK
14    FORMAT (A4)
      READ (5, 10) M; BROJ ELEMENATA
10    FORMAT (I5)
      DO 70 I = 1, M
70    L (I) = I
      READ (5, 20) (Y(I), I = 1, M)
20    FORMAT (16F 5.0)
      DATA Y/100 * 0.0/, Z/100 * 0.0/
      Z (1) = Y (1)
      Z (2) = (Y (1) + Y (2) + Y (3))/3
      Z (3) = (3 * Z (2) + Y (4) + Y (5))/5
      N = M — 3
      DO 50 I = 4, N
      DO 60 J = 1,7
      K = I — 4 + J
60    Z (I) = Z (I) + Y (K)
50    Z (I) = Z (I)/7
      Z (N + 1) = (Y (N — 1) + Y (N) + Y (N + 1) + Y (N + 2) + Y (N +3))/5
      Z (N + 2) = (Y (N +1) + Y (N + 2) + Y (N + 3))/3
      Z (M) = Y (M)
      WRITE (6,1) I ZNAK
1     FORMAT ('1 PRIMJENA METODE NAJMANJIH KVADRATA — PRIMJER',
     * A4////)
      WRITE (6,3)
3     FORMAT (' REDNI BROJ        Y        Z'/)
      WRITE (6,2) (L (K), Y (K), Z (K), K = 1, M)
2     FORMAT (4X, I3, F 13.2, F 9.2)
      END
```

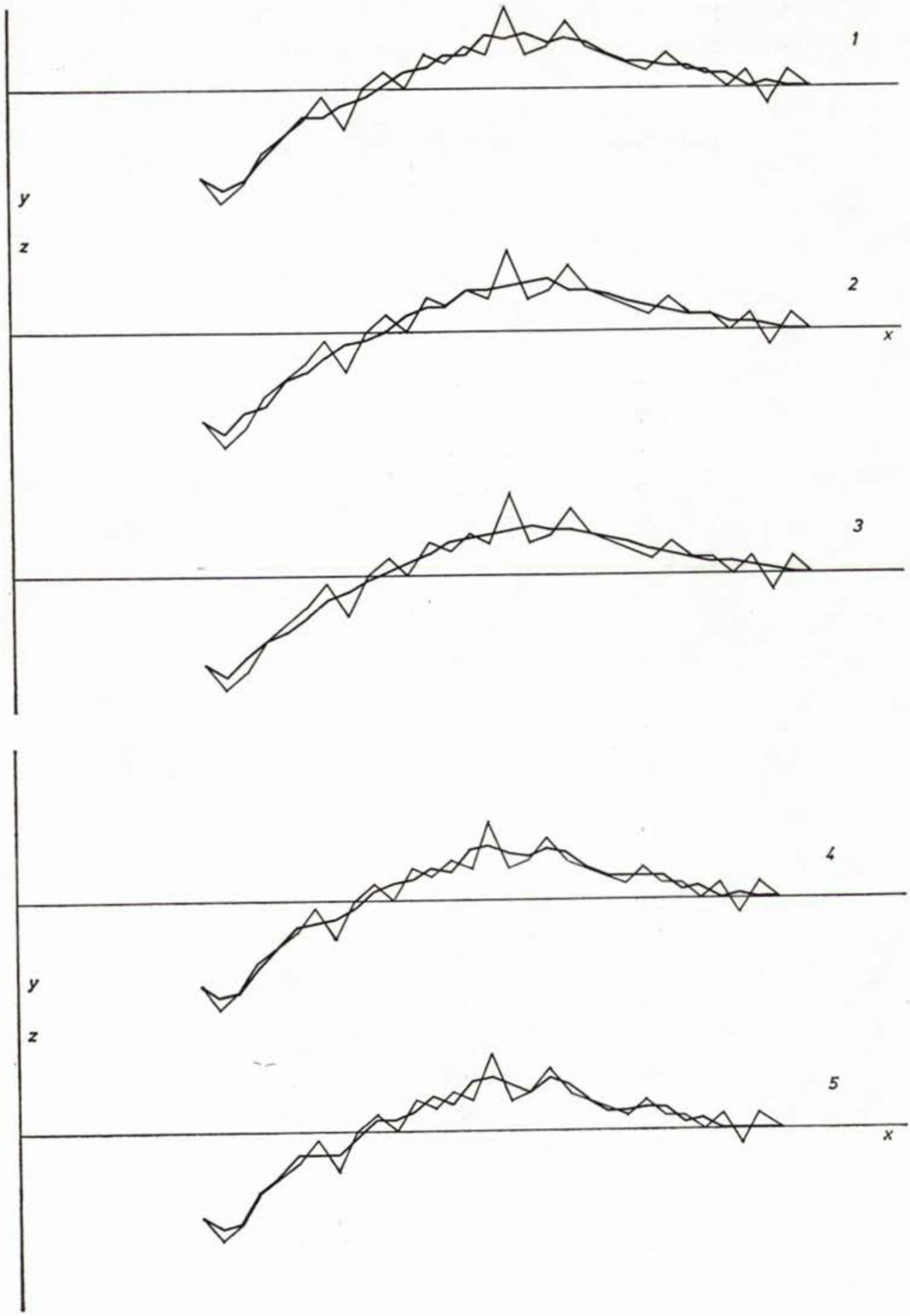
Eksperimentalno je dobivena tablica vrijednosti funkcije $y = f(x)$. Napravljeni su programi u Fortranu za primjenu svih pet formula. U prilogu 1 dan je program za primjenu formule (3). Treba uočiti da izraz (3) nije moguće primijeniti na izravnavanje vrijednosti prvih i posljednjih triju točaka, pa je vrijednost za drugu i pretposljednju točku dobivena primjenom formule (1), a za treću i pretposljednju točku primjenom formule (2). Program je izveden na računalu UNIVAC 90/60. U prilogu 2 nalaze se dobiveni rezultati u obliku tablice. Na kraju, prilog 3, izrađen je grafički prikaz primjene svih pet formula na naš konkretni slučaj.

PRILOG 2

PRIMJENA METODE NAJMANJIH KVADRATA — PRIMJER 3.

Redni broj	Y	Z
1	—2,20	—2,20
2	—2,80	—2,47
3	—2,40	—2,04
4	—1,60	—1,60
5	—1,20	—1,43
6	—0,80	—1,03
7	—0,20	—0,63
8	—1,00	—0,40
9	0,00	—0,11
10	0,40	0,09
11	0,00	0,26
12	0,80	0,51
13	0,60	0,80
14	1,00	0,86
15	0,80	1,00
16	2,00	1,11
18	1,00	1,14
17	0,80	1,17
19	1,60	1,11
20	1,00	0,89
21	0,80	0,89
22	0,60	0,80
23	0,40	0,63
24	0,80	0,49
25	0,40	0,43
26	0,40	0,29
27	0,00	0,29
28	0,40	0,17
29	—0,40	0,08
30	0,40	0,00
31	0,00	0,00

PRILOG 3



Literatura

[1] Berezin, I. S., Žitkov, N. P.: Numerička analiza, Naučna knjiga, Beograd 1963.
[2] Stefanini, B.: Fortran V, Školska knjiga, Zagreb 1976.

SAŽETAK

Metoda izravnavanja osnovana na metodi najmanjih kvadrata pogodna je za smanjenje slučajnih pogrešaka i dobivanje što ravnomjernijeg toka funkcije. Sastoji se u tome da se vrijednosti dobivene mjerenjem zamijene vrijednostima dobivenim izračunavanjem.

Što je veća tablica vrijednosti funkcije, opravdanija je primjena računala.

RÉSUMÉ

La methode de compensation basés sur la methode des carrés les moindres, convient à la reduction des erreues eventuelles et à la realisation de plus d'uniformité dans la marche de fonction. Il s'agit de substituer les valeurs mesurées par les valeurs calculées.

Dès que le tableau des valeurs de fonction est plus grand, l'application des computers est plus fondée.