APROKSIMACIJA POLINOMOM

*Ladislav FEIL — Zagreb**

U geodeziji često susrećemo slijedeći problem: određene točke položene su po nekoj krivulji, međutim podaci mjerenja koji se odnose na položaje točaka odstupaju i lijevo i desno od krivulje. Funkcija y(x) karakterizira traženu krivulju koju aproksimiramo polinomom p(x). Polinom p(x) koristi se dakle kao zamjena za funkciju y(x). Glavni razlozi zbog čega se vrši ta supstitucija su: polinomi imaju jednostavni oblik i lako ih je sračunati, te njihove derivacije i integrali također imaju oblik polinoma.

Razliku y(x) — p(x) = v nazivamo pogreškom aproksimacije. Centralna ideja je aproksimacije postići što manje pogreške v. Taj kriterij možemo zadovoljiti na više načina, a jedan od njih je i geodetima dobro poznata Gaussova metoda najmanjih kvadrata. Provođenjem te metode nalazimo najvjerojatnije vrijednosti karakteristika polinoma.

Opći oblik polinoma r-tog stupnja je:

$$p(x) = a_r x^r + a_{r-1} x^{r-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

x_i, y_i (i = 1, 2, 3, ... n) su poznati diskretni (mjereni) podaci. Kod toga da je izjednačenje moguće mora biti kako je poznato n > r.

Gaussova ideja sastoji se u tome da načinimo sumu kvadrata pogrešaka aproksimacije minimalnom [vv] = min.

$$[vv] = \sum_{i=0}^{k} (y_i - a_r x_i^r - a_{r-1} x_i^{r-1} \cdots - a_2 x_i^2 - a_1 x_i - a_0)^2 = \min$$

S obzirom da su x_i, y_i mjerene veličine iz njih treba isključiti slučajna odstupanja mjerenja. Na taj način dobit ćemo pravilnu krivulju, najčešće pravac ili krivulju drugog odnosno trećeg stupnja. Prikazat ćemo pravac i krivulju drugog stupnja, dok za krivulje višeg reda valja primijeniti analogni postupak. Linearni polinom općenito ima oblik

$$p(x) = Ax + B \tag{1}$$

Prema Gaussovoj ideji mora biti

$$[vv] = \sum_{i=0}^{k} (y_i - Ax_i - B)^2 = \min. \tag{2}$$

Ispunjenjem matematičkog uvjeta minimuma imamo

* Adresa autora: Ladislav Feil dipl. inž., Geodetski fakultet, Zagreb, Kačićeva 26.

$$\frac{\partial\,[vv]}{\partial\,A} = -\,2\sum_{i=0}^{n} x_i \cdot (y_i - Ax_i) - B) = 0$$
$$\frac{\partial\,[vv]}{\partial\,B} = -\,2\sum_{i=0}^{n} 1 \cdot (y_i - Ax_i - B) = 0 \tag{3}$$

Uvedimo simbole:

$$\alpha_k = \sum_{i=0}^{n} x_i^k$$
$$\beta_k = \sum_{i=0}^{n} x_i^k\, y_i \tag{4}$$

Gornje jednadžbe dobijaju tada oblik dobro nam poznatih normalnih jednadžbi:

$$\alpha_2\,A + \alpha_1\,B - \beta_1 = 0$$
$$\alpha_1\,A + \alpha_0\,B - \beta_0 = 0 \tag{5}$$

Kod toga je

$$\alpha_0 = n + 1,\quad \alpha_1 = \Sigma\, x_i,\quad \alpha_2 = \Sigma\, x_i^2,\quad \beta_0 = \Sigma\, y_i \quad i \quad \beta_1 = \Sigma\, x_i\, y_i$$

Rješenjem normalnih jednadžbi Gaussovim algoritmom nalazimo nepoznanice

$$A = \frac{\alpha_0 \cdot \beta_1 - \alpha_1 \cdot \beta_0}{\alpha_0 \cdot \alpha_2 - \alpha_1^2}$$
$$B = \frac{\alpha_2 \cdot \beta_0 - \alpha_1\,\beta_1}{\alpha_0 \cdot \alpha_2 - \alpha_1^2} \tag{6}$$

Polinom drugog stupnja općenito ima oblik:

$$p\,(x) = Ax^2 + Bx + C \tag{7}$$

Analognim provođenjem Gaussove ideje imamo

$$[vv] = \sum_{i=0}^{n} (y_i - Ax_i^2 - Bx_i - C)^2 = \text{min.} \tag{8}$$

Ispunjenjem matematičkog uvjeta minimuma dobijemo

$$\frac{\partial\,[vv]}{\partial\,A} - 2 \cdot \sum_{i=0}^{n} x_i^2 \cdot (y_i - Ax_i^2 - Bx_i - C) = 0$$
$$\frac{\partial\,[vv]}{\partial\,B} - 2 \cdot \sum_{i=0}^{n} x_i \cdot (y_i - Ax_i^2 - Bx_i - C) = 0 \tag{9}$$
$$\frac{\partial\,[vv]}{\partial\,C} - 2 \cdot \sum_{i=0}^{n} 1 \cdot (y_i - Ax_i^2 - Bx_i - C) = 0$$

Koristeći simbole (4) dolazimo do slijedećih normalnih jednadžbi

$$\alpha_4 A + \alpha_3 B + \alpha_2 C - \beta_2 = 0$$
$$\alpha_3 A + \alpha_2 B + \alpha_1 C - \beta_1 = 0 \tag{10}$$
$$\alpha_2 A + \alpha_1 B + \alpha_0 C - \beta_0 = 0$$

Kod toga je

$$\alpha_0 = n + 1,\quad \alpha_1 = \Sigma\, x_i,\quad \alpha_2 = \Sigma\, x_i^2,\quad \alpha_3 = \Sigma\, x_i^3,\quad \alpha_3 = \Sigma\, \mathbf{x}_i^4,$$

$$\beta_0 = \Sigma y_i, \quad \beta_1 = \Sigma x_i y_i, \quad \beta_2 = \Sigma x_i^2 y_i.$$

Rješenjem normalnih jednadžbi Gaussovim algoritmom nalazimo nepoznanice: A, B i C.

Kontrolu računanja provodimo pomoću [vv] na tri načina prema poznatim izrazima posrednog izjednačenja.

Srednju pogrešku pojedinog mjerenja računamo

$$m = \pm \sqrt{\frac{vv}{n - r}}$$

n — broj mjerenja

r — broj nepoznanica.

Srednje pogreške nepoznanica računamo također prema poznatom postupku posrednog izjednačenja.

Primjer: odredi funkciju promjene atmosferskog pritiska mjerene na stajalištu u jednakim vremenskim intervalima.

Podaci mjerenja:

x_i	y_i (Torra)
0 ...	759,2
1 ...	758,5
2 ...	759,8
3 ...	759,0
4 ...	759,3
5 ...	759,1
6 ...	760,1
7 ...	761,0
8 ...	761,5
9 ...	762,1

a) Pretpostavimo prvo linearnu funkciju

$$p(x) = Ax + B$$

Koristeći izraze (4) i (5), te rješenjem normalnih jednadžbi nalazimo

$$A = 0{,}34$$

$$B = 758{,}43$$

$$[vv] = 3{,}31$$

Prema tome tražena funkcija imat će oblik:

$$p(x) = 0{,}34x + 758{,}43$$

b) Pretpostavimo sada funkciju drugog stupnja

$$p(x) = Ax^2 + Bx + C$$

Analognim korištenjem izraza (4) i (10) te rješenjem normalnih jednadžbi nalazimo:

$$A = + 0{,}061$$

$$B = -0{,}208$$

$$C = 759{,}159$$

$$[vv] = 1{,}34$$

Tražena funkcija ima dakle oblik:

$$p(x) = 0{,}061x^2 - 0{,}208x + 759{,}159$$

c) Pretpostavimo na koncu funkciju trećeg stupnja

$$p(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

Koristeći izraz (4) formiramo slijedeće normalne jednadžbe:

$$\alpha_6 A + \alpha_5 B + \alpha_4 C + \alpha_3 D - \beta_3 = 0$$
$$\alpha_5 A + \alpha_4 B + \alpha_3 C + \alpha_2 D - \beta_2 = 0$$
$$\alpha_4 A + \alpha_3 B + \alpha_2 C + \alpha_1 D - \beta_1 = 0$$
$$\alpha_3 A + \alpha_2 B + \alpha_1 C + \alpha_0 D - \beta_0 = 0$$

Rješenjem normalnih jednadžbi nalazimo

$$A = -0{,}00001$$
$$B = +0{,}0609$$
$$C = -0{,}2082$$
$$D = +759{,}1591$$
$$[vv] = 1{,}34$$

Tražena funkcija poprima oblik:

$$p(x) = -0{,}00001x^3 + 0{,}0609x^2 - 0{,}2082x + 759{,}1591$$

Usporedivši sve tri pretpostavke nalazimo da linarni oblik tražene funkcije neće zadovoljiti, a da oblici krivulja drugog i trećeg stupnja jednako dobro zadovoljavaju. Radi jednostavnosti preporuča se upotreba krivulje drugog stupnja.

Pokus naravno možemo i dalje nastavljati krivuljama drugih oblika.

LITERATURA

[1] Čubranić, N.: — Teorija pogrešaka s računom izjednačenja, Zagreb 1967.
[2] Hazay, I.: — Kiegyenlitö számitások, Budapest 1968.
[3] Janković, M.: — Inžinjerska geodezija, Zagreb 1968.
[4] Klak, S.: — Geofizika, Zagreb 1972.
[5] Scheid, F.: — Numerical analysis, New York, St Louis, San Francisco, Toronto, Sydney 1968.

SAŽETAK

Aproksimacija pomoću polinoma u geodetskoj praksi može korisno poslužiti u problemima gdje je potrebno pronaći neku funkciju koja će se na mogući najbolji način prilagoditi određenom nizu točaka. Razliku y(x) — p(x) = v nazivamo pogreškom aproksimacije i treba ih naravno svesti na razumno male veličine. Ovaj kriterij možemo zadovoljiti na više načina, a jedan od njih je i dobro poznata metoda najmanjih kvadrata.

SUMMARY

Approximation by polynomials is very useful in geodetic practice for all the problems where it is important to find a function which will be the best way to adapt a determined point series. The difference y(x) — p(x) = v is the error of approximation and the central idea is, of course, to keep this error reasonably small. This criterion we can satisfy in various ways, one of which is the well known least squares method.