

ODREĐIVANJE NADMORSKE VISINE REPERA NIŽEG RE- DA UZIMANJEM U OBZIR GREŠAKA DATIH VELIČINA

Ivan MOLNAR — Novi Sad*

UVOD

Izučavanjem istorije postanka geodetskih mreža može se ustanoviti da su one nastale u različitim vremenskim epohama. Ukoliko se bogata riznica merenja i podataka geodetskih mreža želi koristiti, a to je sasvim realno i moguće u nas, tada su teorijski ispravna samo stroga rešenja određivanja novopostavljenih tačaka ili pridodatnih mreža.

Strogim izravnanjem (kompleksno izravnanje), sve merene veličine, dobijene u različitim vremenskim epohama i heterogene tačnosti uključuju se u izravnanje. Praktično, pri svakom uključivanju novih tačaka u mreže nastala bi promena svih koordinata u mreži. Ova stalna promena koordinata tačaka u mreži stvorila bi velike tehničke i administrativne teškoće, te se stroga rešenja u državnim mrežama i ne primenjuju.

Želja je da se koordinate tačaka mreža viših redova smatraju »datim« tačkama za mreže nižih redova. Ovo se postiže na taj način što se merenja u mrežama viših redova izvode sa tačnošću znatno većom nego merenja u mrežama nižih redova (odnos standarda merenja se bazira na teorijskoj postavci o principu beznačajnosti uticaja).

Međutim, usavršavanjem metoda rada i napretkom tehnologije izrade geodetskih instrumenata kao i njihovom upotrebom u savremenim geodetskim mrežama sve više dolazi do »neslaganja« pri uklapanju novih merenja u stare mreže.

Takva kretanja su u geodetskoj nauci, u novije vreme, podstakla istraživanja o greškama datih veličina i njihovom uticaju na nova merenja i tražene rezultate.

Obrada podataka merenja uzimanjem u obzir greška datih veličina i njihove zavisnosti je veoma složen posao. Obavljanje ovog posla, pored visoke stručnosti, menjanja ustaljenih metoda rada i nekih pravilničkih propisa, zahteva i znatno više vremena rada, iako se današnja računanja izvode uglavnom uz pomoć elektronskih računara.

Usled toga, opravdano je razmotriti mogućnost iznalaženja uprošćenijih izraza za određivanje prostornih koordinata geodetskih tačaka i ocena njihove tačnosti uzimanjem u obzir gresaka datih veličina, odnosno, neophodno je ispi-

* Adresa autora: Mr Ivan Molnar, Pokrajinska geodetska uprava Novi Sad, Bul. Maršala Tita 16

tati, pri kojim uslovima i prepostavkama greške datih veličina nemaju uticaj na određivanje najverovatnijih vrednosti traženih veličina.

PROBLEMATIKA

Za državne trigonometrijske i nivelačarske mreže postavlja se zahtev da jednom određene prostorne koordinate tačaka budu nepromenljive veličine, zbog njihove kontinuirane upotrebe i praktične nemogućnosti da pri svakom uključivanju novih tačaka nastane promena svih koordinata tačaka u mreži.

Međutim, teorijska istraživanja izvršena u novije vreme pokazala su da se u tačkama, odnosno reperima mreža viših redova manifestuju greške datih veličina, koje bi trebalo uzeti u obzir pri određivanju tačaka, odnosno repera mreža nižih redova. Ovo je naročito izraženo prilikom »uklapanja« merenja većih tačnosti u državnu mrežu.

Zbog ovih uklapanja merenja veće tačnosti u merenja manje tačnosti a i obzirom na napred rečeno, neophodno je razmotriti mogućnost određivanja najverovatnijih vrednosti koordinata trigonometrijskih tačaka i nadmorskih visina repera državne mreže.

U ovom radu razmotrit će se način izravnjanja, pri kome greške datih veličina, uz izvesne realne prepostavke i u određenim uslovima, ne utiču na najverovatnije vrednosti traženih veličina. Prikaz će biti dat na modelu nivelačarske mreže, u kojoj se određuje najverovatnija vrednost nadmorske visine repera mreže nižeg reda.

1. Slobodna mreža (mreža višeg reda)

Izravnjanje mreže višeg reda treba ostvariti polazeći od toga, da svi reperi višeg reda budu varijabilne veličine, tj. da svi reperi dobijaju popravke. U postupku izravnjanja, istovremeno, treba izvršiti i realnu procenu standardnih odstupanja nadmorskih visina repera. Dosada su, kao što je poznato, vrednosti standarda nadmorskih visina repera bile u zavisnosti od izbora početnog (datog) repera mreže.

Ako u slobodnoj mreži ima N merenih i U traženih veličina, jednačine odstupanja glase:

$$v = Ax + f \quad (1)$$

gde su

$$v^T = ||v_1 \ v_2 \ \dots \ v_N||; \quad x^T = ||\Delta H_1 \ \Delta H_2 \ \dots \ \Delta H_U||$$

$$A = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{N-L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_N & b_N \end{vmatrix} \quad f^T = ||f_1 \ f_2 \ \dots \ f_N||$$

Elementi matrice A imaju vrednosti

$$\begin{aligned} a_i &= -b_i = \pm 1 \\ i &= 1, 2, \dots, N \end{aligned}$$

Što će reći da u svakoj vrsti matrice A ima po dva elementa različita od nula, od kojih je jedan $+1$ a drugi -1 . Koji je od njih »+« a koji »-«

zavisi od smera penjanja terena, obično naznačenog na šemi slobodne mreže. Koristeći uslov minimuma

$$v^T p v = \min, \quad (2)$$

dobijaju se normalne jednačine

$$N x + n = 0 \quad (3)$$

gde su

$$N = A^T p A; \quad n = A^T p f; \quad p = \begin{vmatrix} d_1^{-L} & & \\ & d_2^{-L} & \\ & & \ddots \\ & & & d_N^{-L} \end{vmatrix}$$

Pri pravilnom rekognosciranju repera mreže višeg reda, realizuje se pravnička odredba da reperi budu postavljeni na međusobno podjednakom rastojanju, te matrica težina p prelazi u jednačinu matrice E.

$$p = E = \begin{vmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{vmatrix}$$

Sada bi se vektor nepoznatih veličina mogao neposredno odrediti iz (3)

$$x = -N^{-1} n, \quad (4)$$

za slučaj kad bi se defekt normalnih jednačina (u nivelskim mrežama $d = 1$) otklanjao time što bi se jedan od repera usvojio kao »dati« reper. Međutim, obradu podataka merenja treba izvršiti, prema napred iznetom zahtevu, na način da svi reperi u procesu izravnanjá imaju istu ulogu, tj. da svi reperi u slobodnoj mreži budu tražene veličine. U takvom slučaju normalne jednačine su singularne, te se inverzna matrica matrice N ne može odrediti.

U cilju jednoznačnog određivanja vektora nepoznatih veličina, u smislu pomenutih zahteva, neophodno je sem uslova (2) zadovoljiti još i neke druge dopunske uslove. Prikažimo ukratko, u nastavku, postupke koje je primenio Mittermayer [1] i Mihailović [2] a zatim nešto šire i postupak dodatne fiktivne jednačine odstupanja. Ovim postupcima se prevazilazi problem singularnosti normalnih jednačina i ostvaruje realna procena tačnosti repera u slobodnoj mreži.

1.1. Postupak Mittermayera

Pored uslova (2) postavlja se naknadni uslov

$$x^T x = \min, \quad (5)$$

na osnovu (2) i (5) dobijaju se vektori traženih veličina i korelaciona matriča, [1]:

$$x = \xi = B(BB)^{-L} R \quad (6)$$

$$v = Lx + 1 \quad (15)$$

gde su

$$x^T = || \Delta H_1 \Delta H_2 \cdots \Delta H_U ||$$

$$v^T = || v_1 v_2 \cdots v_N v_f ||$$

$$1^T = || f_1 f_2 \cdots f_N 0 ||$$

$$L = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_N & b_N \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Normalne jednačine sada glase

$$Nx + n = 0 \quad (16)$$

gde su

$$N = L^T P \quad L = L^T L; \quad n = L^T P \quad l = L^T l; \quad P = E = \begin{vmatrix} d_1^{-L} & & & & & 1 \\ & d_2^{-L} & & & & 1 \\ & & \ddots & & & \vdots \\ & & & d_{N-1}^{-L} & & 1 \\ & & & & d_N^{-L} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{vmatrix}$$

Vektor nepoznatih veličina se dobija rešenjem (16)

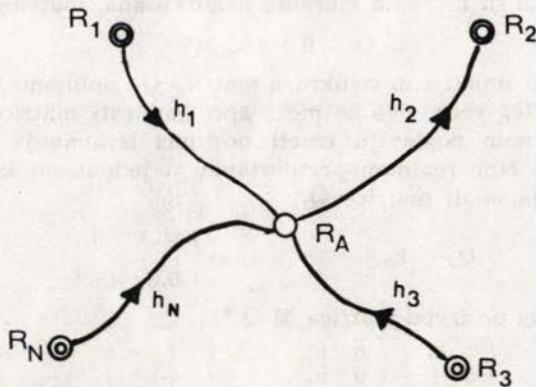
$$x = \xi = -N^{-1}n = -(L^T P L)^{-1} L^T P l = -(L^T L)^{-1} L^T l \quad (17)$$

dok je korelaciona matrica

$$Q_x = Q_\xi = N^{-1} = (L^T P L)^{-1} = (L^T L)^{-1} \quad (18)$$

Pri praktičnim računanjima, primenom postupka 1.1, 1.2 i dobijaju se identični rezultati za vektor nepoznatih veličina x , dok postupci 1.1 i 1.2 daju jednu, a postupak 1.3, drugu vrednost za korelacionu matricu Q_x .

2. Neslobodna mreža (mreža nižeg reda)



$$\mu_A = \mu_0 \sqrt{(N+1)^{-L}} = \sqrt{\frac{v^T Q_i^{-L} v}{N(N+1)}} \quad (11)$$

Odredimo sada nadmorsknu visinu repera nižeg reda A primenom klasičnog principa najmanjih kvadrata (k. m. n. k). Jednačine odstupanja u ovom slučaju glase

$$v = L x + \bar{1} \quad (12)$$

dok su normalne jednačine

$$R \bar{x} + r = 0 \quad (13)$$

odnosno

$$\begin{aligned} (N+1) \bar{x} + \Sigma a \bar{1} &= 0 \\ \bar{x} &= \overline{\Delta H_A} = -\frac{1}{(N+1)} \Sigma a \bar{1} \end{aligned} \quad (14)$$

Ocena tačnosti

$$\overline{\mu_0} = \sqrt{\frac{\bar{v}^T Q_i^{-L} \bar{v}}{N+1-v}} = \sqrt{\frac{\Sigma \bar{v} \bar{v}}{N}} \quad (15); \quad \overline{\mu_A} = \sqrt{\frac{\Sigma \bar{v} \bar{v}}{N(N+1)}} \quad (16)$$

Pravilna ocena tačnosti se ostvaruje primenom korektivne formule

$$\overline{\mu_0} = \sqrt{\frac{\bar{v}^T Q_i^{-L} \bar{v}}{\text{tr } g Q_i^{-L} Q_v^-}} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \text{tr } g Q_i^{-L} Q_v^- &= N+1-U+\text{tr } Q_i^{-L} M Q_z^z M^T - \text{tr } Q_i^{-L} M Q_z^z M^T Q_i^{-L} L (L^T Q_i^{-L} L)^{-1} L^T \\ \text{tr } Q_i^{-L} Q_v^- &= N+2 N \bar{Q} - 0 = N(1+2 \bar{Q}) \end{aligned}$$

$$\overline{\mu_0} = \sqrt{\frac{\Sigma \bar{v} \bar{v}}{N(2 \bar{Q}+1)}} \quad (18)$$

$$\overline{\mu_A} = \overline{\mu_0} \sqrt{(N+L)^{-L}} = \sqrt{\frac{\Sigma \bar{v} \bar{v}}{N(N+1)(2 \bar{Q}+1)}} \quad (19)$$

Na osnovu izravnjanja primenom u. m. n. k i k. m. n. k. proizlazi da je

$$\begin{aligned} x &= \bar{x} \\ v &= \bar{v} \end{aligned} \quad (20)$$

te se može izvesti sledeći:

ZAKLJUČAK

U slučaju uključivanja novih repera u državnu nivelmansku mrežu, kad su reperi u mreži všeg reda izravnati primenom jednog od postupka 1.1, 1.2, ili 1.3 i ako su merenja homogene tačnosti, a reperi mreže nižeg reda postavljeni na podjednakom rastojanju od datih repera (u skladu sa važećim

pravilničkim propisom) greške datih veličina nemaju uticaj na određivanje najverovatnijih vrednosti nadmorskih visina repera nižeg reda. Kad se izravnjanje vrši primenom k. m. n. k. pravilnu ocenu tačnosti dobijenih rezultata je moguće ostvariti korišćenjem formule (19).

Sasvim je drugi pristup u slučaju, kad se vrši izravnjanje repera nižih redova, u okviru mreža razvijenih za potrebe inženjerske geodezije, u kojima usled raznih prisilnosti, najčešće nije moguće voditi računa o pravilnom obliku nivelmanske mreže. Tada određivanje najverovatnijih vrednosti i ocenu tačnosti nadmorskih visina repera nižih redova treba ostvariti primenom strogovog postupka, tj. posredstvom uticaja grešaka datih veličina. Veličina uticaja je utakvom slučaju u funkciji nejednakosti dužna u mreži; ukoliko je nejednakost dužina veća utoliko je i veća razlika između najverovatnijih vrednosti i standarda odstupanja nadmorskih visina traženih repera određenih primenom u. m. n. k. i k. m. n. k. Na osnovu napred izloženog, greške datih veličina su posledice uticaja oblika, odnosno konfiguracije nivelmanske mreže na određivanje traženih veličina, pri izravnjanju novih repera u nivelmanskim mrežama.

LITERATURA

- [1] Mittermayer, E.: Zur Ausgleichung freier Netze, ZfV 1972, No11.
- [2] Mihailović, K.: Apsolutne i relativne greške traženih veličina u lokalnim mrežama, Zbornik Geodetskog instituta 1973, No 14, Beograd.
- [3] Mihailović, K.: Geodezija II, I deo, Beograd 1974.

REZIME

Reperi državne mreže nižih redova se po pravilu određuju od predhodno određenih repera viših redova, koji se nazivaju datim veličinama. Sva današnja teorijska istraživanja o ovom problemu su usmerena u tom pravcu da se pokaže, da se date veličine moraju uzeti u obzir pri izravnjanju i oceni tačnosti dobijenih rezultata.

Međutim, u ovom radu se pokazuje, uz izvesne objektivne pretpostavke i u određenim uslovima, da greške koje sadrže date veličine i njihova zavisnost nemaju uticaj na izravnjanje dobijenih rezultata u državnim mrežama.

ZUSAMMENFASSUNG

Die Höhenfestpunkte niedriger Ordnung bestimmt man in Landesnetz aus der Höhenfestpunkten höherer Ordnung, die man als gegebene Punkte bezeichnet. Theoretische Untersuchungen auf diesem Gebiet zeigen dass man heute bei der Ausgleichung und Gennauigkeitsbeurteilung die gegebene Größen in Kauf nehmen muss.

In diesem Aufsatz ist gezeigt dass bei gewissen objektiven Voraussetzungen und in bestimmten Bedingungen die Fehler der gegebenen Größen und ihre Korrelation kein Einfluss auf das Ergebnis der Ausgleichung im Landesnetz haben.