JOŠ O RAČUNANJU LANCA TROKUTA UMETNUTOG IZMEĐU DVIJE DATE TOČKE

Anton SINDIK — Beograd*

U »Geodetskom listu« br. 7—9/1977. godine objavljen je članak Aleksandra Zlatkovića, dipl. ing. pod naslovom: »Računanje lanca trouglova umetnutog između dvije točke« u kojem je — uz praktičan primjer — iznešen jedan način računanja gornjeg slučaja.

Polazeći od istih elemenata:

— izmjerenih i izravnatih kuteva tako da je:

$$\alpha_i + \beta_i + \gamma_i = \pi_i,$$

$$[\alpha_i] + [\beta_i] + [\gamma_i] = \pi_{(n-1)}$$

$$[(n-1) = \text{broj trokuta}]$$

— u lancu nije izmjerena nijedna strana

— date su koordinate početne i završne točke u lancu, i koristeći iste veličine, u ovom članku daju se još dva načina na osnovu kojih se mogu računati koordinate svih ostalih točaka u lancu.

Prvi način

1. Prva operaacija je račun dužina strana svih trokuta u lancu putem sinusne teoreme (T. O. 13) polazeći od približno — uvjetno uzete vrijednosti dužine jedne strane u prvom trokutu lanca.

2. Slijedi zatim određivanje približne vrijednosti nagiba jedne od strana prvog trakuta a koja polazi od date, početne točke lanca.

Ovo se praktično izvodi na slijedeći način:

— Na običnom papiru nacrta se X-osa i na njoj označi točka koja predstavlja početnu točku lanca. Iz datih koordinata početne i završne točke u lancu izračuna se nagib čija se vrijednost nanese u prvoj točki i pod tim kutem povuče pravac ka drugoj, završnoj točci.

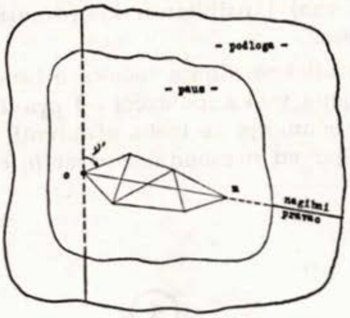
Zatim se na paus-papiru, koristeći kutne podatke mreže kao i izračunate približne dužine — u smanjenoj, proizvoljnoj razmjeri — iscrta trokutna mreža lanaca i spoje linijom dvije krajnje, date točke lanca.

Početna točka ovako iscrtane mreže preklopi se sa odgovarajućom početnom točkom nanijetom na posebnom papiru te oko nje rotira dok se ne poklopi na

* Anton Sindik, dipl. ing. Novi Beograd Milentija Popovića 44.

pausu iscrtan pravac koji spaja date točke u mreži sa nagibnim pravcem na podlozi.

Pri ovakvom položaju podloge i pausa, običnim transporterom pročita se približni nagib (zaokruženo na stupanj) prve strane u mreži. Dodavanjem ovoj vrijednosti vrijednosti kuta koji ima tjeme u prvoj točci, dobije se približni nagib druge strane u trokutu, koja također polazi od početne točke. (Slika 1)



Sl. 1.

3. Sa ovako dobijenim vrijednostima približnih dužina strana i nagiba prvih strana te koristeći kutne podatke trokuta mreže računaju se (u T. O. 19) koordinatne razlike za dva odvojena vlaka: prvi, koji od početne točke, preko gornjih točaka lanca ide do druge, date završne točke — i drugi — koji ide preko donjih točaka lanca.

4. Iz sume koordinatnih razlika prvog a zatim i drugog vlaka, računa se dužina između datih točaka vlaka:

$$D'_1 = \sqrt{[\Delta y']_1^2 + [\Delta x']_1^2}$$

i

$$D'_1 = \sqrt{[\Delta y']_2^2 + [\Delta x']_2^2}$$

Ove dvije vrijednosti predstavljaju tu dužinu u približnom sistemu i one međusobom moraju biti iste, tj:

$$D'_1 = D'_2 = D'$$

5. Zatim se računa faktor razmjere F kao veza prave (D) i približne (D') dužine između datih točaka, tj:

$$F = \frac{D}{D'}$$

Sa ovako izračunatim faktorom množe se sve približne dužine strana dobivene u T. O. 13, čime se dobiju prave vrijednosti dužina svih strana u lancu.

Istim faktorom F množe se također i sume koordinatnih razlika u oba vlaka i preko tih vrijednosti izračunaju se približne koordinate završne — inače date — točke u lancu.

Očito je da je poslije ove operacije lanac doveden u istu razmjeru sa pravim sistemom, ali je još uvijek ostao rotiran uslijed približnih nagiba prvih strana u vlacima.

6. Račun pravih početnih nagiba (ν) računa se pomoću izraza:

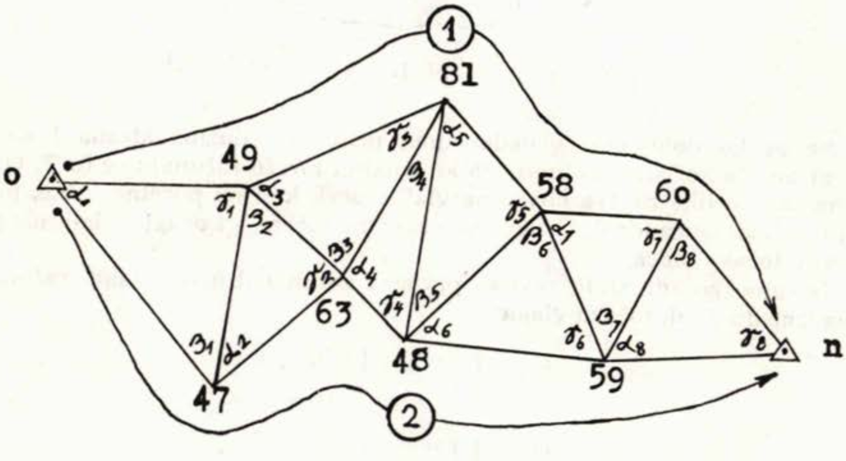
$$\nu = \nu' \mp 0^0$$

gdje je ν' = približni nagib, a 0^0 = odgovarajuća popravka koja predstavlja kut rotacije oko početne točke, tj. kutnu razliku dva sistema.

Ona se dobije kao razlika nagiba računatog preko pravih koordinata datih točaka (početne i završne) i onog računatog preko koordinata prve točke (koja je ostala ista u oba sistema) i približnih koordinata druge točke, računatih prema stavci 5. ovog članka.

7. Definitivne vrijednosti koordinata točaka u lancu računaju se također u T. O. 19 preko dva odvojena vlaka, polazeći od pravih nagiba strana i pravih dužina strana. Kod ovog računanja ne treba očekivati nikakve razlike u koordinatama posljednje točke jer su prethodne operacije obezbjedile sve uvjete da do tih razlika ne dođe.

Primjer



Slika 2.

Date vrijednosti

α_1 = 51-22-30,0	β_1 = 48-06,23,3	γ_1 = 80-31-06,7
α_2 = 38-38-48,8	β_2 = 54-20-23,5	γ_2 = 87-00-47,7
α_3 = 72-15-38,4	β_3 = 75-07-46,6	γ_3 = 32-36-35,0
α_4 = 105-21-38,7	β_4 = 19-57-59,7	γ_4 = 54-40-21,6
α_5 = 48-10-57,1	β_5 = 37-49-42,5	γ_5 = 93-59-20,4
α_6 = 48-20-56,1	β_6 = 67-47-33,8	γ_6 = 63-51-30,1
α_7 = 69-56-36,7	β_7 = 46-41-00,0	γ_7 = 63-22-23,3
α_8 = 62-36-22,0	β_8 = 67-24-11,1	γ_8 = 49-59-26,9

Date koordinate

	Y	X		
Točka 0	42 741,32	95 056,90		
Točka n	62 328,64	90 266,59	ν^n_o=103—44—33,4	D=20 164,58

Računanje

1. Računanje približnih dužina strana u lancu polazeći od uvjetno uzete dužine O — 47 = 6000,00

	Kut	sinus	Približna dužina
I trokut	51-22-30,0	0,7812482	47—49: 4752,412
	48-06-23,3	0,7443870	0—49: 4528,182
	80-31-06,7	0,9863389	0—47: 6000,000
II trokut	38-38-48,8	0,6245190	49—63: 2972,009
	54-20-23,5	0,8124893	47—63: 3866,536
	87-00-47,7	0,9986416	47—49: 4752,412
III trokut	72-15-38,4	0,9524525	63—81: 5252,599
	75-07-46,6	0,9665088	49—81: 5330,117
	32-36-35,0	0,5389137	49—63: 2972,009
IV trokut	105-21-38,7	0,9642771	81—48: 6208,111
	19-57-59,7	0,3414720	63—48: 2198,431
	54-40-21,6	0,8158618	63—81: 5252,599
V trokut	48-10-57,1	0,7452727	48—58: 4637,972
	37-49-42,5	0,6132996	81—58: 3816,678
	93-59-20,4	0,9975774	81—48: 6208,111
VI trokut	48-20-56,1	0,7472059	58—59; 3860,410
	67-47-33,8	0,9258226	48—59: 4783,227
	63-51-30,1	0,8977076	48—58: 4637,972
VII trokut	69-56-36,7	0,9393551	59—60: 4056,512
	46-41-00,0	0,7275732	58—60: 3141,953
	63-22-23,3	0,8939442	58—59: 3860,410
VIII trokut	62-36-22,0	0,8878645	60—n: 4702,231
	67-24-11,1	0,9232309	59—n: 4889,536
	49-59-26,9	0,7659413	59—60: 4056,512

2. Primjenjujući naprijed opisani postupak (točka 2.) utvrđene su slijedeće vrijednosti za približne nagibe strana O-49 i O-47

a. $\nu'^{49}_{0} = 85 - 00 - 00{,}0$, i

b. $\nu'^{47}_{0} = 85 - 00 - 00 + 51 - 22 - 30{,}0 = 136 - 22 - 30{,}0$

3.a. Račun približnih koordinatnih razlika u vlaku 1 : 0 —49 — 81 — 58 —60 — n, sa približnim nagibom $\nu'^{49}_{0} = 85 — 00 — 00{,}0$ i približnim dužinama

Točka	Prelomni kut	Približni nagib	Približna dužina	Približne koord. razlike Δ y'	Δ x'
0		85-00-00,0	4528,18	+ 4510,96	+ 394,66
49	152-52-51,4	57-52-51,4	5330,12	+ 4514,32	+ 2833,92
81	259-14-28,2	137-07-19,6	3816,68	+ 2597,01	— 2796,88
58	128-16-29,1	85-23-47,7	3141,95	+ 3131,82	+ 252,15
60	229-13-25,6	134-37-14,3	4702,23	+ 3346,92	— 3302,89
n		Suma pribl. koord. raz.:		+ 18101,03	— 2619,04

3.b. Račun približnih koordinatnih razlika u vlaku ②: 0 — 47 — 63 — 63 — 48 — 59 — n, sa približnim nagibom $\nu'^{47}_{0} = 136 — 22 — 30,0$ i približnim dužinama

Točka	Prelomni kut	Približni nagib	Približna dužina	Pribl. koord. razlike Δ y'	Δ x'
0	° ' "	136-22-30,0	6000,00	+ 4139,61	— 4343,23
47	86-45-12,1	43-07-42,1	3866,54	+ 2643,30	+ 2821,89
63	267-30-13,0	130-37-55,1	2198.43	+ 1668,41	— 1431,61
48	140-51-00,2	91-28-55,3	4783,23	+ 4781,63	— 123,71
59	173-08-52,1	84-37-47,4	4889,54	+ 4868,54	+ 457,62
n		Suma približ. koord. razlika		+ 18101,03	— 2619,04

4. Račun približne (D') dužine 0 — n

$$D'_1 = \sqrt{18101{,}03^2 + (-2619{,}04)^2}$$

$$D'_1 = 18289{,}52$$

Iz vlaka ② dobije se ista vrijednost za D'_2, pa je $D'_1 = D'_2 = D'$

$$D' = 18289{,}52$$

5. Račun faktora F

$$F = \frac{D}{D'} = \frac{20\,164{,}58}{18\,289{,}52}$$

$$F = 1{,}102521$$

Račun približnih koordinata za tačku »n«

$Y'_n = Yo + (F \cdot [\Delta y'])$
$Y'_n = 42\,741{,}32 + 19\,956{,}77 = 62\,698.09$
$X'_n = Xo + (F \cdot [\Delta x'])$
$X'_n = 95\,056{,}90 + 2\,887{,}55 = 92\,169{,}35$

6. Račun kutne razlike dva sistema

— Nagib u približnom sistemu

Točka c 42 741,32 95 056,90
Točka n' 62 698,09 92 169,35 $\nu_0^{n'} = 98°\ 13'\ 58{,}4''$

Pravi nagib $\nu_0^n = 103°44'33',4$
Pribl. nagib $\nu_0^{n'} = 98°13'58'',8$

Popravka nagiba 0° = +5° 30' 34,6"

7. Definitivno računanje koordinata točaka u lancu vrši se u T. O. 19 sa pravim dužinama i pravim nagibima strana u vlacima.

— Vlak (1):

Točka	Nagib	Dužina	Koordin. razlike		Koordinate	
	° ' "		Δ y	Δ x	Y	X
0					42 741,32	95 056,90
	90-30-34,6	4992,41	+ 4992,21	— 44,40		
49					47 733,53	95 012,50
	63-23-26,0	5876,57	+ 5254,13	+ 2632,16		
81					52 987,66	97 644,66
	142-37-54,2	4207,97	+ 2553,97	— 3344,29		
58					55 541,63	94 300,37
	90-54-23,3	3464,07	+ 3463,64	— 54,80		
60					59 005,27	94 245,57
	140-07-49,1	5184 31	+ 3323,37	— 3978,98		
n					62 328,64	90 266,59

— Vlak (2):

Točka	Nagib	Dužina	Δ y	Δ x	Y	X
	° ' "					
0					42 741,32	95 056,90
	141-53-04,6	6615,13	+ 4083,16	— 5204,57		
47					46 824,48	89 852,33
	48-38-16,7	4262,94	+ 3199,55	+ 2817,01		
63					50 024,03	92 669.34
	136-08-29,7	2423 82	+ 1679,41	— 1747,71		
48					51 703,44	90 921,63
	96-59-29,9	5273,61	+ 5234,40	— 641,92		
59					56 937,84	90 279,71
	90-08-22,0	5390,82	+ 5390,80	— 13,12		
n					62 328,64	90 266,59

Drugi način

Za drugi način postupak je identičan prvom u prve tri točke redoslijeda računanja (1. 2. i 3.) sa dopunom da se u točki 3., pored privremenih koordinatnih razlika računaju i privremene koordinate za točke oba vlaka.

4. Za računanje definitivnih koordinata primjenjuje se konformna transformacija koristeći podatke za početnu i završnu točku budući da su za iste točke poznate koordinate u oba sistema: pravom i privremenom.

Transformacija se računa pomoću izraza:

$$Y_n = a \cdot y'_n + b \cdot x'_n + Y_0$$

$$X_n = - b \cdot y'_n + a \cdot x'_n + X_0$$

gdje su:

y'_n x'_n — definitivne koordinate »n«-te točke u lancu, a

Y_n, X_n — koordinate iste te točke u privremenom sistemu.

Očito je da prethodno treba računati elemente transformacije:

$$a, b, Y_0 \text{ i } X_0$$

Oni se dobiju na slijedeći način:

$$a = \frac{\Delta y' \cdot \Delta Y + \Delta x' \cdot \Delta X}{\Delta y'^2 + \Delta x'^2}$$

$$b = \frac{\Delta x' \cdot \Delta Y - \Delta y' \cdot \Delta X}{\Delta y'^2 + \Delta x'^2}$$

gdje su:

ΔY i ΔX — koordinatne razlike početne i završne točke lanca u pravom sistemu, a

$\Delta y'$ i $\Delta x'$ — koordinatne razlike istih točaka u privremenom sistemu.

Veličine Y_0 i X_0 računaju se kako slijedi:

$$Y_0 = Y_l - a \cdot y'_l - b \cdot x'_l$$

$$X_0 = X_l - a \cdot x'_l + b \cdot y'_l$$

gdje su:

Y_l i X_l — koordinate početne točke lanca u pravom sistemu, a

y'_l i x'_l — kordinate početne točke lanca u privremenom sistemu

a i b — koeficijenti računati u prethodnom stavu.

Poznato je da koeficijenti a i b definišu razmjeru dva sistema kao i kut rotacije — zakošenja pravog i privremenog sistema, i to:

— Koeficijent razmjere $F = \sqrt{a^2 + b^2}$

— Kut zakošenja $\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}$

Primjer:

3. *Računanje privremenih koordinata*

a. Vlak ① : (vidi prvi primjer):

Točka	Koordinatne razlike Δ y'	Δ x'	Privremene koordinate y	x'
0	+ 4510,96	+ 394,66	42 741,32	59 056,90
49	+ 4514,32	+ 2833,92	47 252,28	95 451,56
81	+ 2597,01	— 2596,88	51 766,60	98 285,48
58	+ 3131,82	+ 252,15	54 363,61	95 488,60
60	+ 3346,92	— 3302,89	57 495,43	95 740,75
n			60 842,35	92 437,89

b. Vlak ② : (vidi prvi primjer):

0	+ 4139,61	— 4343,23	42 741,32	95 056,90
47	+ 2643,30	+ 2821,89	46 880,93	90 713,67
63	+ 1668,41	— 1431,61	49 524,23	93 535,56
48	+ 4781,63	— 123,71	51 192,64	92 103,95
59	+ 4868,08	+ 457,62	55 974,27	91 980,24
n			60 842,35	92 437,86

4. *Račun elemenata transformacije*

Tačka	Privremeni koord. sistem		Pravi koord. sistem	
	y'	x'	Y	X
o = 1 n = 2	42 741,32 60 842,35	95 056,90 92 437,86	42 741,32 62 328,64	95 056,90 90 266,59
Δ = 1 — 2	—18 101,03	+ 2 619,04	—19 587,32	+ 4 790,31

$I = \Delta y'\Delta Y + \Delta x'\Delta X = 367\,096\,680{,}40$

$II = \Delta x'\Delta Y - \Delta y'\Delta X = 35\,409\,570{,}45$

$III = \Delta y'^2 + \Delta x'^2 = 334\,506\,657{,}60$

$\frac{I}{III} = a = +\,1{,}0974271$

$\frac{II}{III} = b = +\,0{,}1058561$

$Y_0 = Y_l - a \cdot y'_l - b \cdot x'_l = -14\,226{,}52$ $\quad X_0 = X_l - a \cdot x'_l + b \cdot y'_l = -4\,736{,}69$

5. *Račun definitivnih koordinata točaka u lancu*

Primjenjujući ranije navedene izraze za transformaciju, privremene koordinate transformisane su u prave tako da je na kraju dobijeno:

Definitivne koordinate:

Točka	Y	X
49	47 735,56	95 012,50
81	52 987,69	97 644,65
58	55 541,65	94 300,37
60	55 005,29	94 295,56
47	46 824,50	89 852,32
63	50 024,04	92 669,33
48	51 703,46	90 921,63
59	56 937,85	90 279,70

6. *Račun razmjere i zakošenja*

— Koeficijent razmjere

$$F = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1{,}2155517} = 1{,}1025206$$

— Kut zakošenja sistema:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a} = \frac{0{,}1058561}{1{,}0974271} = 0{,}964584$$

$$\alpha = 5^0\, 36'\, 34{,}6''$$

Razumljivo, dobiveni su isti rezultati kao za primjenu prvog načina.

Završne napomene

1. Računanja na oba načina mogu se izvršiti i primjenom samo jednog poligonskog vlaka koji bi — počev od početne pa do završne — obuhvatio sve točke lanca. U tom slučaju računanje bi bilo kraće ali bez računske kontrole koja se ostvaruje na završnoj točki primjenom dva vlaka.

2. Opisana dva načina mogu se primijeniti ne samo za lance trokuta već i za centralni sistem, ali je ovdje poželjno da date točke budu na što dužoj dijametralnoj udaljenosti što obezbjeđuje točnije određivanje potrebnih elemenata (interpolacija umjesto ekstrapolacije).

SAŽETAK

U članku razrađen je postupak izjednačenja lanca trokuta koji je priključen na dvije koordinatama zadane triangulacione točke. U lancu trokuta nema mjernih dužina, izmjereni su samo kutovi. Rješenje ovog problema dato je na dva načina i za ilustraciju izrađen je numerički primjer.

ZUSAMMENFASSUNG

In diesem Aufsatz ist ein Ausgleichungsverfahren einer Dreieckskette, die auf zwei nach Koordinaten gegebenen trigonometrischen Punkten ageschlossen ist, beschrieben. In Dreieckskette sind nur die Winkel, d. h. keine Strecken gemessen. Die Lösung dieses Problems wird auf zwei Wegen erhalten. Es liegt auch ein numerischer Beispiel bei.