PRILOG DISKUSIJI O IZRAVNANJU GEODETSKIH MREŽA

Krunislav MIHAILOVIĆ — Beograd*

U radovima [1] i [2] pokušano je da se otklone nesporazumi koji su izazvani radom [3], pa se citirano tvrdi: »da inverzne matrice date jediničnom (26) i jednačinom (30), (ovi brojevi odgovaraju brojevima kojima su označene jednačine u radu [3] nemaju isti tretman pri oceni tačnosti. Dok je inverzna matrica data jednačinom (26) ujedno i matrica kaofaktora nepoznatih, odnosno definitivnih izravnatih koordinata, matrica data jednačinom (30) teorijski to nije, bez obzira što se radi o dvema jednakim inverznim matricama«.

Da bi se problem pojednostavio, autor radova [1] i [2] je uložio određeni napor da opravdanost svojih tvrdnji ilustruje primerom. Primer se odnosi na problematiku iz nivelmana gdje je nivelanjem određena visinska razlika između dva repera čije su kote određene posredstvom mareografa. Za približne veličine usvojene su kote koje su dobijene mjerenjem, pa su na taj način po svojim vrednostima priraštaji x' izjednačeni sa popravkama v_i tj. $v_i = x_i$. Zatim se, određuju srednje greške popravaka x'_i koje nisu iste sa srednjim greškama odgovarajućih definitivnih kota x_i koje se dobijaju kada se za približne kote ne usvajaju merene veličine.

U radovima [1] i [2] određene su srednje greške popravaka (priraštaja), ali doduše na primeru, i to iz nivelmana, uz napomenu da zaključci imaju opšti karakter.

Prvo ćemo pokušati da teorijski uobličimo i uopštimo primer iz radova [1] i [2].

Iz rada [4] strana 66. preuzimamo

$$x' = (A^*_1 Q_1^{-1} A_1 + Q_2^{-1})(A^*_1 Q_1^{-1} l_1 - A^*_1 Q_1^{-1} A_1 l_2) =$$
$$= N^{-1} A^*_1 Q_1^{-1} l_1 - N_-{}' A^*_1 Q_1^{-1} A_1 l_2 \tag{1}$$

gdje je

$$N = A^*_1 Q_1^{-1} A_1 + Q_2^{-1} = N_1 + Q_2^{-1}$$
$$N_1 = A^*_1 \; Q_1^{-1} A_1 \tag{2}$$

Korelaciona matrica, biće

$$Q_{y'} = N^{-1} A^*_1 Q_1^{-1} A_1 N^{-1} + N^{-1} + A^*_1 Q_1^{-1} A_1 Q_2 A^*_1 Q_1^{-1} A_1 N^{-2} =$$
$$= N^{-1} N_1 N^{-1} + N^{-1} N_1 Q_2 N_1 N^{-1} \tag{4}$$

Elementi na glavnoj dijagonali matrice Qx' su koeficijenti težina koji se odnose na popravke v_i, jer su prethodno, odgovarajućim izborom vrednosti za približne veličine izjednačeni vektor priraštaja x' sa vektorom popravaka v.

* Adresa autora: Prof. dr. Krunislav Mihailović, Beograd Građevinski fakultet

Zato ovi koeficijenti težina eventualno, mogu da se koriste za određivanje srednjih grešaka popravaka v_i a nikako za srednjee greške priraštaja x'_i koji se ne mogu posmatrati nezavisno od približnih vrednosti traženih veličina x_{0i} odnosno traženih veličina x_i.

Međutim, ako nas interesuju koeficijenti težina koji se odnose na popravke v_i mogu se jednostavnije odrediti ako se pođe od poznate relacije

$$Q_v = Q - A N^{-1} A^* = \begin{Vmatrix} Q_1 & \\ & Q_2 \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} A_1 \\ E \end{Vmatrix} N^{-1} \| A^*_1 \; E \| = \begin{Vmatrix} Q_1 & \\ & Q_2 \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} A_1 N^{-1} A^*_1 & A_1 N^{-1} \\ N^{-1} A^*_1 & N^{-1} \end{Vmatrix}$$

odnosno

$$Q_{v1} = Q_1 - A_1 N^{-1} A^*_1 \tag{5}$$

$$Q_{v2} = Q_2 - N^{-1} \tag{6}$$

Nije teško primetiti da se koeficijenti težina koji se odnose na vektor v_2 mogu jednostavnije odrediti pomoću (6), nego na osnovu (4). Matrice Q_x' i Qv_2 daju identične vrednosti.

Dokaz:

$$N^{-1}(N_1 + N_1 Q_2 N_1) N^{-1} = Q_2 - N^{-1}$$

$$N_1 + N_1 Q_2 N_1 = N Q_2 N - N$$

$$N_1 + N_1 Q_2 N_1 = (N_1 + Q_2^{-1}) Q_2 (N_1 + Q_2^{-1}) - (N_1 + Q_2^{-1})$$

$$N_1 + N_1 Q_2 N_1 = N_1 Q_2 N_1 + N_1$$

Završen dokaz.

Znači, kada nas interesuju srednje greške popravaka koeficijente težina jednostavnije je odrediti kako se to inače u praksi radi pomoću (6) a ne kako je to učinjeno u radovima [1] i [2] pomoću (4). Na predloženom primeru u radovima [1] i [2], kao i na svim ostalim primerima ovo se može lako proveriti.

U radovima [1] i [2] prijašnji x_i posmatraju se nezavisno od pri vremenih vrednosti nepoznatih veličina x_{0i}. To nije u redu. Ove veličine su povezane poznatom relacijom.

$$X_2 = x_{0i} + x'_i$$

i moraju se integralno posmatrati.

Kada su funkcije linearnog oblika, mogu se direktno odrediti nepoznate veličine. x_z. Tada se mora ići preko približnih vrednosti.

Približne vrednosti nepoznatih veličina X_{02} služe za lineaciju nelinearične funkcije, pri razvijanju funkcija u Tajlorov red. Pošto se zadržava samo linearni deo, a zanemaruju članovi višeg reda, približne veličine moraju biti dovoljno bliske traženim veličinama. Naime, vrednosti za približne veličine mogu se birati sasvim proizvoljno u određenom intervalu kada ne dolaze do izražaja članovi višega reda. U tom intervalu moguće je izvesno prelivanje vrednosti između približnih veličina x_{0i} i odgovarajućih priraštaja x_i'. Međutim, u totalu njihov zbir mora dati traženu veličinu x_i. Ovdje je primarna veličina x_i, a x_{0i} i x'_i su pomoćne veličine koje imaju privremenu ulogu i prolazan karakter. Zato ocena tačnosti priraštaja x_i' nezavisno od traženih veličina ima trivijalan značaj. Zapravo, takva ocena tačnosti nema nikakvog smisla, niti može biti opravdana.

Kada se tražene veličine X_i razlažu na dve komponente, približne vrednosti x_{oi} i priraštanje x_i, tada prilikom ocene tačnosti sve prerogative traženih veličina X_i preuzimaju priraštaji x_i.

Na kraju napomenimo da nije nov problem neposredno merenje traženih veličina. Postoje mnogi primeri u udžbeničkoj literaturi gde su, kod posrednog izravnanja neposredno izmerene tražene veličine.

Mnogi autori računa izravnanja u svojim knjigama navode primer kako se trougao može izravnati po metodi posrednih merenja kada su u njemu izmerena sva tri ugla. Između ovog primera i primera navedenog u radovima [1] i [2] nema principijelnih razlika.

U zaključku još jednom istaknimo da kod posrednog izravnanja tražene veličine mogu se odrediti preko njihovih približnih vrednosti ili direktno kada su linearne funkcije. Vrednosti za približne veličine mogu se usvajati sasvim proizvoljno (u granicama tolerancije pri linearizaciji funkcija), te karakter stohastičko promenjivih veličina koje imaju nepoznate veličine X_i prelazi na njihove priraštaje x_i. Približne veličine ostaju konstante bez obzira šta je usvojeno za njihove vrednosti. Zbog toga konstatacija koja je na početku citirana iz radova [1] i [2] ne može imati svoje opravdanje, niti se može poistovetiti karakter priraštanja x_i' i popravaka v_i.

Naime, matrice date jednačinom (26) i jednačinom (30) prikazane u radovima [1] i [2] moraju imati isti tretman pri oceni tačnosti. Obe matrice predstavljaju kofaktore nepoznatih odnosno definitivno izravnatih koordinata [4].

LITERATURA

[1] Stevanović: Prilog diskusiji o oceni tačnosti za slučajeve kada se u izravnanje uključe približne odnosno merene vrednosti, Geodetski list br. 4—6, Zagreb 1977.

[2] Stevanović: Generalisation of the adjustment problem in triangulacion, XV international congres of surveyors, Stokholm 1977.

[3] Stevanović: Generalisanje problema izravnanja u triangulaciji — Geodetski list br. 1—3,Zagreb 1976.

[4] Mihailović: Apsolutne i relativne visine u geodetskim mrežama, Geodetska služba br. 16, Beograd, 1976.

KRATAK SADRŽAJ

U radu se polemiše sa autorem radova [1], [2] i [3] u kojima se tvrdi: »da inverzne matrice date jednačinom (26) i jednačinom (30), nemaju isti tretman pri oceni tačnosti ...« pa se u zaključku ističe da ove matrice moraju imati isti tretman pri oceni tačnosti. Obe matrice predstavljaju kofaktore nepoznatih odnosno definitivno izravnatih koordinata [4].

ZUSAMMENFASSUNG

In vorliegenden Artikel wird mit dem Verfasser der Artikel [1], [2] und [3] polemisiert, in denen behauptet wird: »die inversen mit den Gleichungen (26) und (30) gegebenen Matrizen spielen nicht die gleiche Rolle bei der Genauigkeitsbeurteilung ...«.

Im vorliegenden Aratikel behauptet man, dass diese Matrizen die gleiche Rolle bei der Genauigkeitsberteilung haben müssen. Beide Matrizen stellen die Kofaktoren der Unbekanten bezeihungsweise der definitiv ausgeglichenen Koordinaten [4] dar.