

# IZJEDNAČENJE NIVELMANSKE I POLIGONOMETRIJSKE MREŽE POSTUPNIM PRIBLIŽAVANJEM

Boris FILATOV — Zagreb\*

## UVOD

Postupno približavanje po poligonima je vrlo jednostavan i ujedno strogi način izjednačenja visinskih razlika određenih po vlakovima nivelmanske mreže.

Sušтина je ovog načina u tome, što se izjednačenje visinskih razlika *odjednom* u svim poligonima mreže (načinom uvjetnih mjerenja), svodi na njihovo postupno izjednačenje po *pojednim poligonima*.

Pojedini poligoni se izjednačuju odabranim redosljedom strogim načinom tj. podjelom njihovih nesuglasica proporcionalno recipročnim vrijednostima težina vlakova koji ulaze u poligon. Pri tome se kod podjele nesuglasice svakog poligona uzimaju u obzir svi oni popravci ( s odgovarajućim predznacima) koji su za zajedničke vlakove već ranije bili određeni prethodnim izjednačenjem graničnih poligona.

Tijekom ponavljanja takvog izjednačenja poligona u krugovima — *približavanjima* — dobivaju se u graničnim poligonima za zajedničke vlakove popravci, apsolutne vrijednosti kojih će se postupno međusobno približavati sve dotle, dok konačno, ne postanu posve iste.

Istom se metodom mogu izjednačiti sume kutova i sume koordinatnih razlika, koje su određene po vlakovima poligonometrijske mreže, ako se primijeni u praksi uobičajeni postupak njihovog približnog izjednačenja, tj. najprije se izjednačuju sume kuteva, a zatim posebno sume ordinatnih i posebno sume apcinskih razlika.

Metoda postupnog približavanja po poligonima potiče od C. F. Gaussa.<sup>1</sup>

U današnje vrijeme u praksi se primijenjuje nekoliko načina izjednačenja po ovoj metodi (npr. Voglerov [12]<sup>2</sup>, Popova [10] i dr.). Svi se načini međusobno ponešto razlikuju.

Ovdje prikazujem izjednačenje nivelmanske i poligonometrijske mreže svojom varijantom ove metode.

\* Adresa: Boris Filatov dipl. inž. 41000 Zagreb, Vrbanićeva ul. 11

<sup>1</sup> Valja napomenuti, da pored metode postupnog približavanja po poligonima postoji još i metoda postupnog približavanja po čvornim točkama (Anér [1], Popov [10] i dr.) kojom se izjednačenje odjednom svih čvornih točaka u nivelmanskoj odnosno poligonometrijskoj mreži (načinom posrednih mjerenja) svodi na postupno izjednačenje pojedinih čvornih točaka po principu opće aritmetičke sredine. Ova metoda prikazana je u [4] i [5].

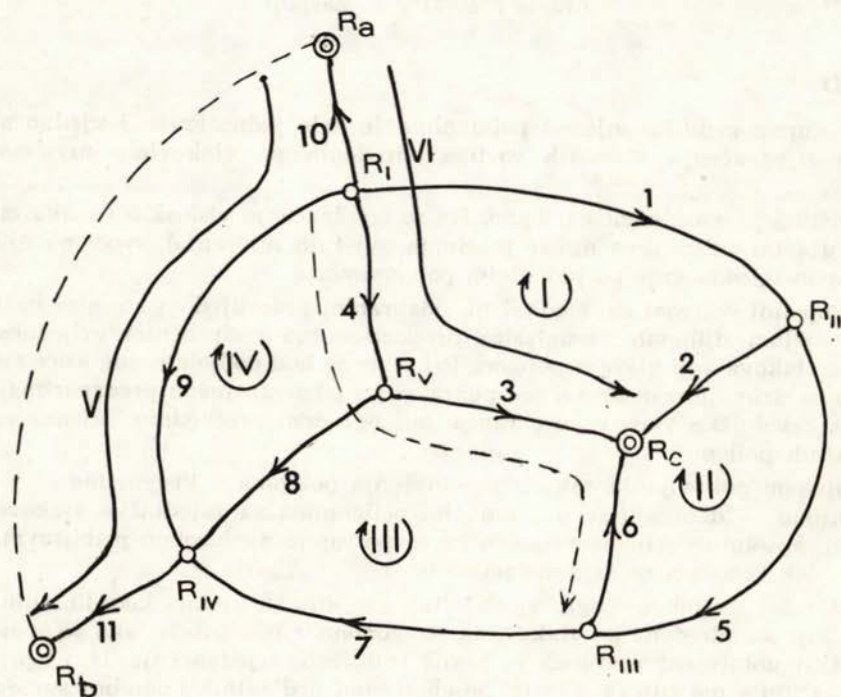
<sup>2</sup> Ovaj način opisan je u [3].

Nadam se, da ovaj jednostavan način izjednačenja nivelmanskih i poligonometrijskih mreža može korisno poslužiti našim geodetskim stručnjacima u praksi.

### IZJEDNAČENJE MREŽE GEOMETRIJSKOG NIVELMANA

Na slici 1 prikazana je mreža geometrijskog nivelmana, koja je priključena na tri zadana repera  $R_a$ ,  $R_b$  i  $R_c$  s visinama  $H_a$ ,  $H_b$  i  $H_c$ , pri tome se reperi  $R_a$  i  $R_b$  nalaze izvan (na periferiji) mreže, a reper  $R_c$ , unutar nje.

Po vlakovima mreže 1, 2, ..., 11 s dužinama  $s_1, s_2, s_{11}$  izmjerene su visinske razlike  $h'_1, h'_2, \dots, h'_{11}$ . Na slici strelicom je označen uspon terena.



Slika 1

#### Numerički podaci

$H_a = 136,274$  m;

$H_b = 177,612$  m;

$H_c = 150,503$  m

VI.	$h'$	S	$p=1/S$
1	12,360 m	5,5 km	0,18
2	4,674	2,6	0,38
3	5,435	2,3	0,43
4	11,640	2,1	0,48
5	1,285	4,8	0,21
6	3,400	3,1	0,32
7	15,727	4,5	0,22
8	17,788	2,8	0,36
9	29,396	4,1	0,24
10	2,824	2,4	0,42
11	14,748	2,9	0,34

U mreži pet čvornih repera  $R_I, R_{II}, \dots, R_V$ , visine kojih  $H_I, H_{II}, \dots, H_V$  treba odrediti.

U nivelmanskoj i poligonometrijskoj mreži odredit će se broj »r« nezavisnih poligona, koji se moraju neizostavno uzeti u izjednačenje, kao razlika između broja vlakova i broja čvornih točaka (broj prekobrojnih mjerenja).

Pri tom broj nezavisnih zatvorenih poligona jednak je broju svih zatvorenih poligona, u mreži, ne računajući vanjski zatvoreni poligon a broj nezavisnih umetnutih poligona jednak je broju zadanih točaka (priključaka) umanjenom za jedinicu.

Prema tome u našoj mreži ima svega  $r = 11 - 5 = 6$  nezavisnih poligona. Nezavisnih zatvorenih poligona ima 4, umetnutih  $3 - 1 = 2$ .

Od umetnutih poligona uzimaju se oni, koji su kraći (manje vlakova) i koji idu, ukoliko je to moguće, po periferiji mreže. Mi smo uzeli poligon  $R_a - R_I - R_{IV} - R_b$ , koji ide po periferiji mreže i poligon  $R_a - R_I - R_V - R_c$  koji djelomično ide unutar nje.

Pitanje s kojim poligonom treba početi izjednačenje, i kojim redoslijedom poligona, ima izvjesno praktično značenje. U nekim slučajevima broj približavanja može se smanjiti, ako se izjednačenje počne s poligonom koji ima najviše zajedničkih vlakova s drugim poligonima, ili s poligonom koji ima najveću izvornu nesuglasicu. Međutim unaprijed se nikada ne zna koji je redoslijed poligona za izjednačenja neke mreže najpovoljniji. Sve to zavisi od toga kako su izvorne nesuglasice u poligonima mreže raspoređene po veličini i po predznaku.

U našem primjeru za početni poligon uzima se zatvoreni poligon  $R_I - R_{II} - R_c - R_V - R_I$ , koji ima najviše zajedničkih stranica s drugim poligonima.

Na slici 1. poligoni su numerirani od I — IV onim redom kojim će se izjednačavati. Uz broj poligona strelicom je označen smjer njegovog obilaska (računanja).

U principu svjedno je kojim će se smjerom pojedini poligoni obilaziti. Međutim radi jednoličnog određivanja predznaka popravaka za zajedničke vlakove u graničnim poligonima, bolje je za sve poligone, ako je to moguće, uzeti isti smjer obilaska.

Zatvoreni poligoni od I — VI će se obilaziti u smjeru kretanja kazala na satu. (Istim smjerom obilazi se i umetnuti poligon V koji ide po periferiji mreže. Treba ga samo fiktivnom spojnicom krajnjih točaka, koja mora ležati sa suprotne strane mreže, kao što je prikazano na slici 1. (vidi i sliku 2.), dograditi do zatvorenog poligona. Smjer obilaska umetnutog poligona VI, koji ide unutar mreže, uzima se po volji jedan ili drugi. U ovom slučaju je smjer od  $R_a$  do  $R_c$ .

Za težine vlakova geometrijskog nivelmana uzimaju se recipročne vrijednosti njihovih dužina. Prema tome se podjela nesuglasice poligona proporcionalno recipročnim vrijednostima težina vlakova svodi na podjelu nesuglasice proporcionalno njihovim dužinama.

## Izjednačenje visinskih razlika u tablici br. 1.

Tijek računanja:

U 1. stupac upisuju se brojevi poligona onim redom kojim se izjednačuju.

U 2. stupac upisuje se za svaki vlak broj graničnog poligona. Pri tome s predznakom plus (+) ili (-) označuje se da li visinska razlika vlaka i njen poprava ulazi u granični poligon s istim predznakom — kada je smjer obilaska vlaka u oba granična poligona isti ili sa *spurotnim* predznakom — kada je smjer obilaska vlaka u graničnim poligonima *spurotan*.

Osobitost ove mreže je u tome, što u umetnuti poligon VI ulaze vlakovi 3. i 4. koji se nalaze unutar mreže i prema tome ovi vlakovi ulaze u tri poligona. Vlak 3. ulazi u poligone I, III i VI, a vlak 4. u poligon I, IV i VI. U svim ovim poligonima kod 3. vlaka odnosno 4. vlaka valjalo bi upisati brojeve dvaju gračnih poligona. Međutim u daljnjem računanju oba granična poligona nisu potrebna, nego samo onaj od njih koji se izjednačivao kasnije, pa će se upisati oznaka samo tog graničnog poligona. Dakle, u I poligonu kod 3. vlaka upisuje se — VI, kod 4. vlaka također — VI; U poligonu kod 3. vlaka upisuje se — I; U IV poligonu kod 4. vlaka isto — I i u VI poligonu kod 3. vlaka upisuje se + III, a kod 4. vlaka + IV.

Za vanjske vlakove 1, 5, 7 i 11 koji ulaze samo u jedan poligon, umjesto oznake graničnog poligona stavi se *točka*.

U 3. stupac upisuju se brojevi vlakova koji ulaze u pojedine poligone.

U 4. stupac najprije upisujemo visinske razlike  $h'$  izmjerene po vlakovima. Kada se smjer obilaska poligona *podudara* sa smjerom uspona terena, onda se visinska razlika upisuje s predznakom *plus* (izražena u apsolutnoj vrijednosti). U *protivnom* slučaju visinsku razliku upisuje se s predznakom *minus* izraženu u dekadskoj dopuni).

Zatim se račun nesuglasica (pogrešku zatvaranja)  $f$  po pravilu:

Nesuglasica: ima — treba.

Prema tome nesuglasica zatvorenog poligona odredit će se kao suma izmjerenih visinskih razlika, a nesuglasica umetnutog poligona ako se od zbroja visine početnog repera (koja je upisana gore) i visinskih razlika odbije visina završnog repera (koja je upisana dolje).

Nesuglasica  $f$  upisuje se s pripadnim predznakom izražena u milimetrima.

U 5. stupac upisuje se dužine vlakova  $s$  u km i zatim njihova suma, dakle dužina poligona  $[S]$  km.

U 6. stupcu računa se logaritmarom za svaki vlak u poligonu (radi lakše podjele nesuglasica proporcionalno dužinama vlakova (kvocijente  $k = s/[S]$  za kontrolu treba da bude  $[k] = 1$ ). Preporuča se ove vrijednosti upisati *c r v e n o*.

Poligon	(x)	Izmjeren- ne visinske razlike $\frac{h}{m}$ Nesugla- sica $f_{mm}$	Dužine s km	$\frac{s}{[s]}$ = K	Odredjivanje popravaka v u mm približavanjem															Izjed- načene visin- ske razlike $h=h'+v$ m	$\frac{vv}{s} =$ pvv	Izjednač visine čvornih točaka i njihove približne srednje pogreške			
					1			2			3			4			5						6		
					$\frac{f}{v}$	$\frac{f}{v}$	$\frac{f}{v}$	$\frac{f}{v}$	$\frac{f}{v}$	$\frac{f}{v}$	$\frac{f}{v}$	$\frac{f}{v}$	$\frac{f}{v}$	$\frac{f}{v}$	$\frac{f}{v}$	$\frac{f}{v}$	$\frac{f}{v}$	$\frac{f}{v}$	$\frac{f}{v}$				$\frac{f}{v}$	$\frac{f}{v}$	$\frac{f}{v}$
					$-f'k$	$v$	$v$	$-f'k$	$v$	$v$	$-f'k$	$v$	$v$	$-f'k$	$v$	$v$	$-f'k$	$v$	$v$				$-f'k$	$v$	$v$
1	2	3	4	5	6	7															8	9	10		
I						-41	-41	-41	-41	-41	-41	-41	-41	-41	-41	-41	-41	-41	-41						
	1	12,360	5,5	0,44	0	+18	+18	+18	-3	+15	+15	0	+15	+15	+1	+16	+16	0	+16	+16	0	+16	12,376	46,5	$H_C$ 150,503
	- II 2	4,674	2,6	0,21	0	+9	+9	+9	-1	+8	+6	0	+6	+6	0	+6	+6	0	+6	+6	0	+6	4,680	13,8	$-h_2$ 4,680
	- VI 3	x4,565	2,3	0,18	0	+7	+7	+5	-1	+4	+6	0	+6	+6	0	+6	+7	0	+7	+7	0	+7	x4,572	21,3	$H_{II}$ 145,823
	- VI 4	x88,360	2,1	0,17	0	+7	+7	-15	-1	+14	+14	0	+14	+13	0	+13	+12	0	+12	+12	0	+12	x88,372	68,6	$+h_5$ 1,290
		x99,959	12,5	1,00	-41	+41	0	+6	-6	0	0	0	0	0	-1	+1	0	0	0	0	0	0	0,000		$H_{III}$ 147,113
					f= - 41																				$+h_7$ 15,741
II						+11	+11	+11	+11	+11	+11	+11	+11	+11	+11	+11	+11	+11	+11	+11	+11	+11			$H_{IV}$ 162,854
	- I 2	x5,326	2,6	0,25	-9	0	-9	-8	+2	-6	-6	0	-6	-6	0	-6	-6	0	-6	-6	0	-6	x5,320		$-h_8$ 17,779
	5	1,285	4,8	0,46	0	-1	-1	-1	+3	+2	+2	0	+2	+2	+1	+3	+3	+1	+4	+4	+1	+5	1,290	5,2	$H_V$ 145,075
	-III 6	3,400	3,1	0,29	0	-1	-1	-9	+2	-7	-7	0	-7	-8	0	-8	-9	0	-9	-10	0	-10	3,390	32,3	$-h_4$ 11,628
		0,011	10,5	1,00	+2	-2	0	-7	+7	0	0	0	0	-1	+1	0	-1	+1	0	-1	+1	0	0,000		$H_I$ 133,447
					f= + 11																				$+h_{10}$ 2,827
III						-26	-26	-26	-26	-26	-26	-26	-26	-26	-26	-26	-26	-26	-26	-26	-26	-26			$H_a$ 136,274
	- I 3	5,435	2,3	0,18	-7	+6	-1	-4	0	-4	-6	+1	-5	-6	0	-6	-7	0	-7	-7	0	-7	5,428		
	- II 6	x6,600	3,1	0,24	+1	+8	+9	+7	0	+7	+7	+1	+8	+8	+1	+9	+9	+1	+10	+10	0	+10	x6,610		$[P]_I = 1,32$
	7	15,727	4,5	0,36	0	+11	+11	+11	-1	+10	+10	+1	+11	+11	+1	+12	+12	+1	+13	+13	+1	+14	15,741	43,6	$[P]_{II} = 0,77$
	- IV 8	x82,212	2,8	0,22	0	+7	+7	+13	0	+13	+11	+1	+12	+10	+1	+11	+10	0	+10	+9	0	+9	x82,221	28,9	$[P]_{III} = 0,75$
		x99,974	12,7	1,00	-32	+32	0	+1	-1	0	-4	+4	0	-3	+3	0	-2	+2	0	-1	+1	0	0,000		$[P]_{IV} = 1,16$
					f= - 26																				$[P]_V = 1,27$
IV						+32	+32	+32	+32	+32	+32	+32	+32	+32	+32	+32	+32	+32	+32	+32	+32	+32			
	- I 4	11,640	2,1	0,23	-7	-4	-11	-14	+2	-12	-14	+2	-12	-13	+1	-12	-12	0	-12	-12	0	-12	11,628		
	-III 8	17,788	2,8	0,31	-7	-6	-13	-13	+2	-11	-12	+2	-10	-11	+1	-10	-10	+1	-9	-9	0	-9	17,779		$P'_I = 1,05$
	- V 9	x70,604	4,1	0,46	0	-8	-8	-12	+3	-9	-13	+3	-10	-12	+2	-10	-12	+1	-11	-12	+1	-11	x70,593	29,5	$P'_{II} = 0,69$
		0,032	9,0	1,00	+18	-18	0	-7	+7	0	-7	+7	0	-4	+4	0	-2	+2	0	-1	+1	0	0,000		$P'_{III} = 0,65$
					f= + 32																				$P'_{IV} = 0,96$
V	$H_a$	136,274				-18	-18	-18	-18	-18	-18	-18	-18	-18	-18	-18	-18	-18	-18	-18	-18	-18	136,274		$P'_V = 0,99$
	- IV 9	29,396	4,1	0,44	+8	+4	+12	+9	+4	+13	+10	+2	+12	+10	+2	+12	+11	+1	+12	+11	0	+11	29,407		
	+ VI 10	x7,176	2,4	0,25	0	+3	+3	-2	+2	0	-2	+1	-1	-3	+1	-2	-3	0	-3	-3	0	-3	x7,173	3,8	
	11	14,748	2,9	0,31	0	+3	+3	+3	+2	+5	+5	+2	+7	+7	+1	+8	+8	+1	+9	+9	+1	+10	14,758	34,5	$M'_I = \pm 7,2$
		177,594	9,4	1,00	-10	+10	0	-8	+8	0	-5	+5	0	-4	+4	0	-2	+2	0	-1	+1	0	177,612	328,0	$M'_{II} = +8,9$
	$H_b$	177,612																							$M'_{III} = +9,2$
					f= - 18																				$M'_{IV} = \pm 7,6$
VI	$H_a$	136,274				+22	+22	+22	+22	+22	+22	+22	+22	+22	+22	+22	+22	+22	+22	+22	+22	+22			$M'_V = \pm 7,4$
	+III 3	5,435	2,3	0,34	-1	-4	-5	-4	-2	-6	-5	-1	-6	-6	-1	-7	-7	0	-7	-7	0	-7	5,428		
	+ IV 4	11,640	2,1	0,31	-11	-4	-15	-12	-2	-14	-12	-1	-13	-12	0	-12	-12	0	-12	-12	0	-12	11,628		
	+ V 10	x7,176	2,4	0,35	+3	-5	-2	0	-2	-2	-1	-2	-3	-2	-1	-3	-3	0	-3	-3	0	-3	x7,173		
		150,525	6,8	1,00	+13	-13	0	+6	-6	0	+4	-4	0	+2	-2	0	0	0	0	0	0	0	150,503		
	$H_c$	150,503																							
					f= + 22																				

(x) Minus kada je smjer obilaska vlaka u graničnom poligonu suprotan i plus - kada je isti.

U 7. stupcu određuje se postupnim približavanjem popravke  $v$  za izmjerene visinske razlike  $h'$ . Popravke  $v$  određuju se u milimetrima.<sup>3</sup>

Stupci koji su namijenjeni pojedinim (prvom, drugom, trećem itd.) približavanjima podijeljeni su na tri dijela: *lijevi, srednji i desni* dio.

U lijevom dijelu stupca određuje se preostala nesuglasica  $f'$  poligona u tom približavanju.

Najprije se upisuje gore iznad crte prvobitna nesuglasica  $f$  poligona.

Zatim se za svaki vlak poligona upisuje pod oznakom  $v_{gr}$  popravak koji je ranije bio određen za isti vlak u desnom dijelu stupca graničnog poligona. Iz kojeg se graničnog poligona popravak uzima i da li se pri tome njegov predznak mijenja ili ne, označeno je u 2. stupcu. Granični poligon uzima se iz onog približavanja u kojem je on bio izjednačen kasnije, tj. kada je njegov redni broj manji uzima se iz istog, a kada je veći — iz predhodnog približavanja.

Popravke  $v$  za vlakove 3. i 4. koji ulaze u dva granična poligona uzimaju se samo iz onog graničnog poligona, koji je bio izjednačen kasnije, a oznaku kojega smo upisali u 2. stupac.

Za vanjske vlakove 1., 5., 7. i 11. kao  $v_{gr}$  uzima se s nepromijenjenim predznakom popravak  $v$ , koji je bio određen za taj vlak u desnom dijelu stupca istog poligona u predhodnom približavanju.

Zbrajanjem gore upisane izvorne nesuglasice  $f$  sa svima upisanim popravkama  $v_{gr}$  dobiva se *preostala* nesuglasica  $f'$  poligona u tom približavanju.

U srednjem dijelu stupca podijeli se preostala nesuglasica  $f'$  poligona, uzeta sa suprotnim predznakom proporcionalno dužinama vlakova. Dakle za svaki vlak izračuna se (logaritmarom) produkt  $-f' \cdot k$ . Za kontrolu mora biti  $[-f' \cdot k] = -f'$

U desnom dijelu stupca određuju se popravci  $v$  za visinske razlike  $h'$  u tom približavanju. Ovi se popravci određuju zbrajanjem po redcima popravaka  $v_{gr}$  s produktima  $-f' \cdot k$ . Za kontrolu suma izvorne nesuglasice  $f$ , koja se upisuje gore, i svih dobivenih popravaka  $v$  treba da bude nula.

U svim približavanjima poligoni se izjednačuju istim redosljedom od I do VI.

Kao što se vidi preostale nesuglasice  $f'$  nakon svakog približavanja se smanjuju u svim poligonima i konačno, posve nestaju nakon šestog približavanja. U ovom približavanju dobiva se u nekim poligonima preostale nesuglasice  $f'$  od jednog milimetra (tzv. repići), koje valja dodati vanjskim vlakovima i onda kada to nisu vlakovi s najvećim dužinama, kao što smo postupili u V poligonu. Na taj način izbjeći će se njihovo daljnje prenašanje u druge poligone, što bi samo izazvalo nesvršishodno povećanje broja približavanja.

S time je završeno određivanje popravaka, jer su u svim poligonima za sve zajedničke vlakove dobiveni popravci iste apsolutne vrijednosti. Da li

<sup>3</sup> Kod izjednačenja preciznih nivelmanskih mreža, kada su visinske razlike  $h'$  određene na desetinke milimetara a nesuglasice  $f$  su male popravci  $v$  se računaju također na desetinke milimetara. Određivati popravke s takvom tačnošću u našem primjeru nije svrsishodno.

su se, pri tome, popravci u graničnim poligonima morali dobiti s istim ili sa suprotnim predznakom označeno je u 2. stupcu. Kontrola uspoređivanjem.

Dakle, u desnom dijelu stupca u šestom približavanju dobiveni su traženi najvjerojatniji popravci  $v$  za izmjerene visinske razlike  $h'$ .

U 8. stupcu računaju se izjednačene visinske razlike  $h = h' + v$ . Za kontrolu  $[h]$  u zatvorenom poligonu mora biti jednaka nuli, a u umetnutom poligonu zajedno s visinom početnog repera — visini završnog repera.

Za sve zajedničke vlakove u svim poligonima izjednačene visinske razlike moraju biti iste apsolutne vrijednosti (kontrola uspoređivanjem).

U 9. stupcu računa se srednja pogreška jedinice težine  $m_0$ . Najprije se izračunaju (logaritmarom) kvocijenti  $v v : s = p v v$ , a zatim njihovu sumu  $[v v : s] = [p v v] = 328,0$

Pri dnu izračuna se (logaritmarom)

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{[p v v]}{r}} = \pm \sqrt{\frac{328}{6}} = \pm 7,4 \text{ mm/km}$$

Valja napomenuti da se elektronskim računalom s memorijom mogu izračunati vrijednosti za  $m_0$  iz  $v$  i  $s$  bez ispisivanja međurezultata. Stupac 9 u tom slučaju nije potreban.

U 10. stupcu izračunaju se definitivne visine  $H_I, H_{II}, \dots, H_V$  čvornih točaka. Radi kontrole ove visine se računaju u umetnutom poligonu  $R_c - R_{II} - R_{III} = R_{IV} - R_V - R_I - R_a$

Za izjednačene visine čvornih točaka prema želji mogu se odrediti približne vrijednosti njihovih težina i srednjih pogrešaka.

Približna težina  $P_N$  definitivne visine  $H_N$  čvorne točke  $N$  određuje se po pravilu V. Kozlova [8] ovako:

Izračuna se suma težina svih vlakova,<sup>4</sup> koji se sastaju u toj čvornoj točki  $[p]_N$  i odbije od ove sume toliko razlomaka koliko ima vlakova, koji povezuju ovu čvornu točku  $N$  s drugim čvornim točkama. Pri čemu brojnik razlomaka je kvadrat težine  $p_i^2$  veznog vlaka  $i$ , a nazivnik je suma težina svih vlakova  $[p]$  koji se sastaju u početnoj točki  $K$  tog veznog vlaka  $i$ .

Približna srednja pogreška izjednačene visine čvorne točke  $N$  određuje se po formuli:  $M'_N = \pm m_0 : \sqrt{P'_N}$ .

Valja napomenuti da se ovim načinom za dvostruke čvorne točke određuju stroge vrijednosti težina i srednjih pogrešaka.

Kod mreža s više čvornih točaka, ako njihov broj nije prevelik, razlike između približnih i strogih težina ne prelaze 15 — 20%. Dok se približne srednje pogreške određuju s dva puta manjom pogreškom, tj. s pogreškom od 7,5 — 10%.

$$[p]_I = p_1 + p_4 + p_9 + p_{10} = 0,18 + 0,48 + 0,24 + 0,42 = 1,32$$

$$[p]_{II} = p_1 + p_2 + p_5 = 0,18 + 0,38 + 0,21 = 0,77$$

$$[p]_{III} = p_5 + p_6 + p_7 = 0,21 + 0,32 + 0,22 = 0,75$$

$$[p]_{IV} = p_7 + p_8 + p_9 + p_{11} = 0,22 + 0,36 + 0,24 + 0,34 = 1,16$$

$$[p]_V = p_3 + p_4 + p_8 = 0,43 + 0,48 + 0,36 = 1,27$$

<sup>4</sup> Težine vlakova, koje za samo izjednačenje nisu bile potrebne izračunali smo naknadno i upisali ih zajedno s ostalim numeričkim podacima (kod slike 1).

$$P'_I = [p]_I - \frac{p^2_1}{[p]_{II}} - \frac{p^2_4}{[p]_V} - \frac{p^2_9}{[p]_{IV}} = 1,32 - \frac{0,12^2}{0,77} - \frac{0,48^2}{1,27} - \frac{0,24^2}{1,16} =$$

$$= 1,32 - 0,04 - 0,181 - 0,05 = 1,05$$

$$P'_{II} = [p]_{II} - \frac{p^2_1}{[p]_I} - \frac{p^2_5}{[p]_{III}} = 0,77 - \frac{0,18^2}{1,32} - \frac{0,21^2}{0,75} =$$

$$= 0,77 - 0,02 - 0,06 = 0,69$$

$$P'_{III} = [p]_{III} - \frac{p^2_5}{[p]_{II}} - \frac{p^2_7}{[p]_{IV}} = 0,75 - \frac{0,21^2}{0,77} - \frac{0,22^2}{1,16} =$$

$$= 0,75 - 0,06 - 0,04 = 0,65$$

$$P'_{IV} = [p]_{IV} - \frac{p^2_7}{[p]_{III}} - \frac{p^2_8}{[p]_V} - \frac{p^2_9}{[p]_I} = 1,16 - \frac{0,22^2}{0,75} - \frac{0,36^2}{1,27} - \frac{0,24^2}{1,32} =$$

$$= 1,16 - 0,06 - 0,10 - 0,04 = 0,96$$

$$P'_V = [p]_V - \frac{p^2_4}{[p]_I} - \frac{p^2_8}{[p]_{IV}} = 1,27 - \frac{0,48^2}{1,32} - \frac{0,36^2}{1,16} =$$

$$= 1,27 - 0,17 - 0,11 = 0,99$$

$$M'_I = \pm \frac{7,4}{\sqrt{1,05}} = \pm 7,2 \text{ mm}; \quad M'_{II} = \pm \frac{7,4}{\sqrt{0,69}} = \pm 8,9 \text{ mm};$$

$$M'_{III} = \pm \frac{7,4}{\sqrt{0,65}} = \pm 8,2 \text{ mm};$$

$$M'_{IV} = \pm \frac{7,4}{\sqrt{0,96}} = \pm 7,6 \text{ mm}; \quad M'_V = \pm \frac{7,4}{\sqrt{0,99}} = \pm 7,4 \text{ mm}$$

Dobivene vrijednosti za  $[p]_N$ ,  $P'_N$  i  $M'_N$  upisuju se u 10. stupac.

Napominjemo, da elektronskim računalom s memorijom svaka od ovih vrijednosti može se izračunati bez ispisivanja međurezultata i odmah upisati u 10. stupac.

#### ODREĐIVANJA SREDNJE POGREŠKE FUNKCIJE IZJEDNAČENIH VELIČINA

Prema potrebi može se odrediti stroga vrijednost srednje pogreške funkcije veličina, dakle, za nivelman srednja pogreška izjednačene visinske razlike  $\Delta H_{i,k}$  između repera  $R_i$  i  $R_k$ .

Radi određivanja srednje pogreške izjednačene visinske razlike, treba prethodno odrediti njenu težinu. Tražena težina može se odrediti načinom K. Marzahna [9].

Na primjer, odredi se ovim načinom težina izjednačene visinske razlike  $H_{I,III}$  između repera  $R_I$  i  $R_{III}$  (slika 1.). Između poligona koji međusobno povezuju ta dva repera odabire se jedan, tzv. *put prenosa* i označi se na slici ispre-



kidanom strelicom. Svejedno je koji će se *put prenosa* uzeti i u kojem smjeru je: uvijek će se dobiti, u granicama točnosti računanja, isti rezultat za traženu težinu. Obično se uzima najkraći put prenosa.

U ovom primjeru uzet je »put prenosa«  $R_I - R_V - R_C - R_{III}$ . Dakle, visinska razlika  $\Delta H_{I,III}$  određuje se kao suma izjednačenih visinskih razlika  $h_3, h_4$  i  $h_6$  dobivenih po *prenosnim* vlakovima 3, 4 i 6 s dužinama  $s_3, s_4$  i  $s_6$ .

Recipročna težina  $1/p'_{I,III}$  izmjerene vrijednosti  $\Delta H'_{I,III}$  ove visinske razlike, koja je suma međusobno nezavisnih izmjerenih visinskih razlika  $h'_3, h'_4$  i  $h'_6$  odredit će se po formuli:

$$1/p'_{I,III} = \frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_4} + \frac{1}{p_6} = S_3 + S_4 + S_6$$

Da bi odredili recipročnu težinu  $1/P_{I,III}$  izjednačene visinske razlike  $\Delta H_{I,III}$  valja recipročnoj težini izmjerene visinske razlike dodati sumu nekih za sada nepoznatih, od težina izjednačenih visinskih razlika  $h_3, h_4$  i  $h_6$  zavisnih veličina  $q_3, q_4$  i  $q_6$ . Dakle,

$$1/P_{I,III} = 1/p'_{I,III} + (q_3 + q_4 + q_6)$$

Ovi tzv. *popravci* težine  $q_3, q_4$  i  $q_6$  moraju biti uvijek negativni, jer izjednačena visinska razlika ima manju recipročnu težinu od neizjednačene.

Popravke težine određuju se u *tablici* br. 2 postupnim približavanjem analognu određivanju popravaka visinskih razlika u *tablici* br. 1.

U 1., 2., 3., 5. i 6. *stupcu* *tablice* br. 2 upisuju se iste veličine kao i u *tablici* br. 1. U 3. *stupcu* uokvireni su (radi boljeg pregleda) brojevi 3., 4. i 6. »*prenosnih*« vlakova.

U 4. *stupcu* upisuje se u pojedinim poligonima za svaki *prenosni* vlak njegova dužina  $s$  (općenito  $1/p$ ). Pri tome dužinu valja upisati s predznakom plus (+), kada se odabrani smjer prenosa  $R_I - R_V - R_C - R_{III}$  koji se na slici 1. označio crtkanom strelicom (*podudara* sa smjerom obilaska poligona, odnosno s predznakom minus (—) kada je *suprotan*.

Za ostale vlakove stavi se točka (*nula*).

Zbrajanjem u svakom poligonu upisanih dužina  $s$  s (općenito  $1/p$ ) *prenosnih* valokova dobivaju se tzv. nesuglasice težina  $W$  poligona. (U  $V$  poligonu nesuglasica težina  $W$  je nula).

U 7. *stupcu* određuju se postupnim približavanjem »*popravci* težine«  $q_3, q_4$  i  $q_6$

U svakom poligonu umjesto nesuglasice  $f$  uvodi se »*nesuglasice* težina«  $W$ . S njima tijekom približavanja postupa se na isti način, kao što se postupalo i s nesuglasticama poligona  $f$  u *tablici* br. 1.

Približavanja se ponavljaju sve dok preostale *nesuglasice* težina  $W'$  ne postanu u svim poligonima nule. To će biti nakon *petog* približavanja.

U desnom *stupcu* ovog približavanja u redcima koji se odnose na *prenosne* vlakove 3, 4 i 6 dobivaju se traženi *popravci*  $q_3, q_4$  i  $q_6$ . Ove *popravke*, kako je

Tablica br.2

Poligon	Granični poligon	Vlak	l v  = S Preno- snih vlak.	l v  = S km	S [S] = K	Odredjivanje popravaka težine q <sub>3</sub> , q <sub>4</sub> i q <sub>6</sub> po 3,4 i 6 vlaku														
						P r i b l i ž a v a n j e														
						1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	2	3	4	5	6	7														
I						-4,4	-4,4	-4,4	-4,4	-4,4	-4,4	-4,4	-4,4	-4,4	-4,4	-4,4	-4,4	-4,4	-4,4	
.	1	.	5,5	0,44	0,0	+1,9	+1,9	+1,9	-0,4	+1,5	+1,5	-0,2	+1,3	+1,3	-0,1	+1,2	+1,2	0,0	+1,2	
-II	2	.	2,6	0,21	0,0	+0,9	+0,9	-0,1	-0,2	-0,3	-0,1	-0,1	-0,2	-0,1	-0,1	-0,2	-0,2	0,0	-0,2	
-VI	③	-2,3	2,3	0,18	0,0	+0,8	+0,8	+1,9	-0,2	+1,7	+1,9	-0,1	+1,8	+1,9	-0,1	+1,8	+1,8	0,0	+1,8	
-VI	④	-2,1	2,1	0,17	0,0	+0,8	+0,8	+1,7	-0,2	+1,5	+1,6	-0,1	+1,5	+1,6	0,0	+1,6	+1,6	0,0	+1,6	
w=	-4,4	12,5	1,00	-4,4	+4,4	0,0	+1,0	-1,0	0,0	+0,5	-0,5	0,0	+0,3	-0,3	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	
II						-3,1	-3,1	-3,1	-3,1	-3,1	-3,1	-3,1	-3,1	-3,1	-3,1	-3,1	-3,1	-3,1	-3,1	
-I	2	.	2,6	0,25	-0,9	+1,0	+0,1	+0,3	-0,2	+0,1	+0,2	-0,1	+0,1	+0,2	0,0	+0,2	+0,2	0,0	+0,2	
.	5	.	4,8	0,46	0,0	+1,8	+1,8	+1,8	-0,5	+1,3	+1,3	-0,1	+1,2	+1,2	-0,1	+1,1	+1,1	0,0	+1,1	
-III	⑥	-3,1	3,1	0,29	0,0	+1,2	+1,2	+2,0	-0,3	+1,7	+1,9	-0,1	+1,8	+1,9	-0,1	+1,8	+1,8	0,0	+1,8	
w=	-3,1	10,5	1,00	-4,0	+4,0	0,0	+1,0	-1,0	0,0	+0,3	-0,3	0,0	+0,2	-0,2	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	
III						+5,4	+5,4	+5,4	+5,4	+5,4	+5,4	+5,4	+5,4	+5,4	+5,4	+5,4	+5,4	+5,4	+5,4	
-I	③	+2,3	2,3	0,18	-0,8	-0,6	-1,4	-1,7	-0,1	-1,8	-1,8	0,0	-1,8	-1,8	0,0	-1,8	-1,8	0,0	-1,8	
-II	⑥	+3,1	3,1	0,24	-1,2	-0,8	-2,0	-1,7	-0,2	-1,9	-1,8	-0,1	-1,9	-1,8	0,0	-1,8	-1,8	0,0	-1,8	
.	7	.	4,5	0,36	0,0	-1,2	-1,2	-1,2	-0,2	-1,4	-1,4	-0,1	-1,5	-1,5	-0,1	-1,6	-1,6	+0,1	-1,5	
-IV	8	.	2,8	0,22	0,0	-0,8	-0,8	-0,2	-0,1	-0,3	-0,2	0,0	-0,2	0,2	-0,0	-0,2	-0,3	0,0	-0,3	
w=	+5,4	12,7	1,00	+3,4	-3,4	0,0	+0,6	-0,6	-0,0	+0,2	-0,2	-0,0	+0,1	-0,1	-0,0	-0,1	+0,1	0,0	0,0	
IV						+2,1	+2,1	+2,1	+2,1	+2,1	+2,1	+2,1	+2,1	+2,1	+2,1	+2,1	+2,1	+2,1	+2,1	
-I	④	+2,1	2,1	0,23	-0,8	-0,5	-1,3	-1,5	-0,1	-1,5	-1,5	0,0	-1,5	-1,6	0,0	-1,6	-1,6	0,0	-1,6	
-III	8	.	2,8	0,31	+0,8	-0,6	+0,2	+0,3	-0,1	+0,2	+0,2	0,0	+0,2	+0,2	+0,1	+0,3	+0,3	0,0	+0,3	
-V	9	.	4,1	0,46	0,0	-1,0	-1,0	-0,6	-0,1	-0,7	-0,9	+0,1	-0,8	-0,9	+0,1	-0,8	-0,9	+0,1	-0,8	
w=	+2,1	9,0	1,00	+2,1	-2,1	0,0	+0,3	-0,3	0,0	-0,1	+0,1	0,0	-0,2	+0,2	0,0	-0,1	+0,1	0,0	0,0	
V						0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	
-IV	9	.	4,1	0,44	+1,0	-0,4	+0,6	+0,7	+0,2	+0,9	+0,8	+0,1	+0,9	+0,8	+0,1	+0,9	+0,8	0,0	+0,8	
+VI	10	.	2,4	0,25	0,0	+0,3	-0,3	-0,8	+0,1	-0,7	-0,9	+0,1	-0,8	-0,9	0,0	-0,9	-1,0	0,0	-1,0	
.	11	.	2,9	0,31	0,0	-0,3	-0,3	-0,3	+0,1	-0,2	-0,2	+0,1	-0,1	-0,1	+0,1	0,0	0,0	+0,2	+0,2	
w=	0,0	9,4	1,00	+1,0	-1,0	0,0	-0,4	+0,4	0,0	-0,3	+0,3	0,0	-0,2	+0,2	0,0	-0,2	+0,2	0,0	0,0	
VI						+4,4	+4,4	+4,4	+4,4	+4,4	+4,4	+4,4	+4,4	+4,4	+4,4	+4,4	+4,4	+4,4	+4,4	
+III	③	+2,3	2,3	0,34	-1,4	-0,5	-1,9	-1,8	-0,1	-1,9	-1,8	-0,1	-1,9	-1,8	0,0	-1,8	-1,8	0,0	-1,8	
+IV	④	+2,1	2,1	0,31	-1,3	-0,4	-1,7	-1,5	-0,1	-1,6	-1,5	-0,1	-1,6	-1,6	0,0	-1,6	-1,6	0,0	-1,6	
+V	10	.	2,4	0,35	-0,3	-0,5	-0,8	-0,7	-0,2	-0,9	-0,8	-0,1	-0,9	-0,9	-0,1	-1,0	-1,0	0,0	-1,0	
w=	+4,4	6,8	1,00	+1,4	-1,4	0,0	+0,4	-0,4	0,0	+0,3	-0,3	0,0	+0,1	-0,1	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	

(x) Plus kada se smjer puta prenašanja podudara sa smjerom obilaska poligona i minus - kada je suprotan.

već rečeno, uzimama se s *negativnim* predznacima bez obzira na one s kojima su dobivene.

Dakle, »popravci težine« bit će:

$$q_3 = -1,8; q_4 = -1,6 \text{ i } q_6 = -1,8$$

Konačno, za izjednačenu visinsku razliku:

$$\Delta H_{I,III} = h_3 + h_4 - h_6 = 5,428 + 11,628 - 3,390 = + 13,6666 \text{ m}$$

s dužinom:

$$S_{I,III} = S_3 + S_4 + S_6 = 2,3 + 2,1 + 3,1 = 7,5 \text{ km}$$

dobila se recipročna težina

$$1/P_{I,III} = (S_3 + S_4 + S_6) / (q_3 + q_4 + q_6) = 7,5 / (-1,8 - 1,6 - 1,8) = 2,3.$$

i srednja pogreška

$$M_{I,III} = m_0 \sqrt{1/P_{I,III}} = 7,4 \sqrt{2,3} = \pm 11,2 \text{ mm}$$

### Napomena

Recipročna težina odnosno srednja pogreška izjednačene visinske razlike  $\Delta H_{N,i}$  između čvorne točke  $R_i$  i najbližeg zadanog repera  $R_N$  bit će ujedno i recipročna težina  $1/P_i$  odnosno srednja pogreška  $M_i$  izjednačene visine  $H_i$  čvorne točke  $R_i$ .

## IZJEDNAČENJE MREŽE TRIGONOMETRIJSKOG NIVELMANA

Mreža trigonometrijskog nivelmana izjednačuje se na isti način kao i mreža geometrijskog nivelmana.

Pri tome se razlikuje da li su čvorne točke u mreži povezane međusobno odnosno s zadanim točkama stranicama trigonometrijskog nivelmana (koje se često međusobno sijeku<sup>5</sup>) ili vlakovima, tj, da li se u poligonima izjednačuju visinske razlike stranica ili vlakova.

U prvom slučaju nesuglasice u poligonima dijele se proporcionalno recipročnim težinama stranica, a u drugom — proporcionalno recipročnim težinama vlakova.

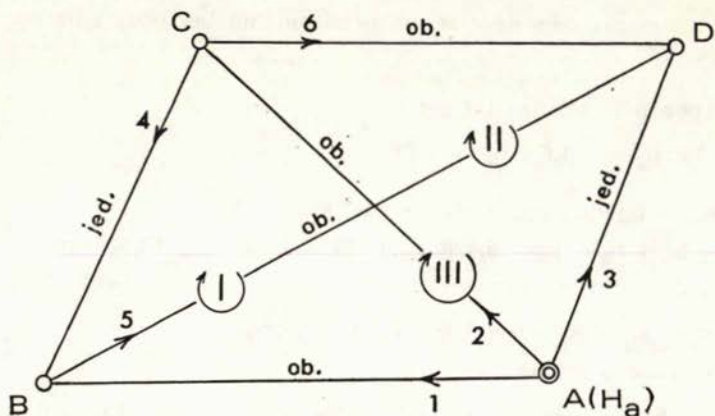
Pri tome se recipročna težina obostrano opažane visinske razlike stranice dužine  $d_{k,m}$  određuje po formuli  $1/p_{ob} = d^2$ , a jednostrano opažane — po formuli  $1/p_{jed} = 2 d^2$ .

Recipročna težina visinske razlike vlaka određuje se kao suma recipročnih težina visinskih razlika stranica koje ulaze u taj vlak, tj.

$$1/P_{vl} = \left[ \frac{1}{p} \right] = \left[ \frac{1}{p_{ob.}} \right] + \left[ \frac{1}{p_{jed.}} \right] = [d^2] + [2d^2]$$

### Numerički primjer

Na slici 2. prikazan je geodetski četverokut ABCD. Visinske razlike između krajnjih točaka njegovih stranica određene su trigonometrijskim načinom. Visina  $H_a$  točke A je zadana.



Slika 2

Numerički podaci:

$H_a = 156,28 \text{ m}$

Str.	$h'$ m	Opažano	d km	P
1	18,88	obostr.	1,84	0,30
2	13,34	obostr.	1,60	0,39
3	43,57	jednostr.	1,17	0,37
4	5,41	jednostr.	1,32	0,29
5	24,79	obostr.	2,60	0,15
6	30,06	obostr.	1,70	0,35

Na slici je strelicom označen uspon terena.

Dakle, u mreži je izmjereno šest visinskih razlika  $h'_1, h'_2 \dots, h'_6$ , a ima tri čvorne točke B, C i D visine  $H_b, H_c$  i  $H_d$  kojih treba odrediti. Znači imamo tri  $1/6-3 = 3/$  prekobrojna mjerenja i prema tome u izjednačenje treba uzeti tri nezavisna poligona. Uzmemo, na primjer, poligone  $ABC = I$ ,  $ACD = II$  i  $ABD = III$ .

Izjednačenje ove mreže prikazano je u tablici br. 3

<sup>5</sup> Takve mreže trigonometrijskog nivelmana bolje je izjednačiti načinom postupnog približavanja po čvornim točkama.

